Глава 12

Формула Стокса

12.1 Необходимые сведения из теории

На этом занятии мы будем практиковаться в использовании формулы Стокса, сводящей интеграл по некоторому замкнутому контуру $\mathcal{L}$ к поверхностному интегралу по произвольной гладкой поверхности $\mathcal{S}$, натянутой на этот контур. В инвариантной, не зависящей от выбора системы координат, форме формула Стокса имеет вид:

$$\oint\limits_{\mathcal{L}} (\vec{A}\cdot\vec{\tau}\,)\,d\ell = \iint\limits_{\mathcal{S}} (\vec{n}\cdot\operatorname{rot}\vec{A}\,)\,dS\,. \tag{12.1}$$

Здесь $\vec{\tau}$ –единичный вектор, касательный к контуру в текущей точке, а $\vec{n}$ –орт нормали к той стороне поверхности $\mathcal{S}$, по которой ведется интегрирование. Формула Стокса справедлива лишь если обход контура (в направлении касательного вектора $\vec{\tau}$) и сторона поверхности (из которой выпущен вектор нормали $\vec{n}$) *согласованы* между собой. В противном случае надо поставить минус перед поверхностным интегралом.

Определение 12.1 *Сторону поверхности и ограничивающий ее контур $\mathcal{L}$ называют согласованными, если левая рука "контуроходца", идущего по выбранной стороне поверхности вдоль контура $\mathcal{L}$ в выбранном направлении, указывает внутрь поверхности. При этом нормаль "пронизывает" ходока в направлении от ног к голове.*

Замечание 12.1 Если контур плоский, а мы смотрим на выбранную сторону поверхности, то указанный обход отвечает движению против часовой стрелки.

Рис. 12.1: Изображение двусторонней поверхности, вектора нормали $\vec{n}$ к выбранной стороне и двух векторов $\vec{\tau}$, касательных к ограничивающему поверхность контуру в разных его точках. Направления нормали к поверхности и обхода контура согласованы так, что для наблюдателя, смотрящего на выбранную сторону поверхности, обход осуществляется против хода часовой стрелки.

Имеются разные формы записи формулы Стокса. Иногда ее представляют в виде:

$$\oint\limits_{\mathcal{L}} (\vec{A} \cdot d\vec{r}\,) = \iint\limits_{\mathcal{S}} ([\vec{\nabla} \times \vec{A}\,] \cdot d\vec{S}\,)\,. \tag{12.2}$$

Здесь $d\vec{r} = \vec{\tau} d\ell$ –дифференциал радиус-вектора, скользящего вдоль контура $\mathcal{L}$ в выделенном направлении. Справа же применена геометрически более наглядная запись ротора на языке оператора набла и использован *ориентированный элемент поверхности* $d\vec{S} = \vec{n} dS$.

Если в пространстве задана декартова система координат (x, y, z), то в практических вычислениях часто оказывается удобной следующая запись формулы Стокса

$$\oint\limits_{\mathcal{L}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_{\mathcal{S}} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS\,. \tag{12.3}$$

Сюда явно входят компоненты $\{P,\, Q,\, R\}$ интегрируемого векторного поля

$$\vec{A} = \vec{i}\, P(x, y, z) + \vec{j}\, Q(x, y, z) + \vec{k}\, R(x, y, z) \tag{12.4}$$

и направляющие косинусы нормали к поверхности

$$\vec{n} = \vec{i}\, \cos\alpha + \vec{j}\, \cos\beta + \vec{k}\, \cos\gamma \tag{12.5}$$

в выбранной декартовой системе координат, а также явно расписано скалярное произведение нормали к поверхности $\vec{n}$ и ротора векторного поля $\vec{A}$. Кроме того, в левой части формулы (3) принято во внимание, что

$$(\vec{A} \cdot d\vec{r}\,) = P\,dx + Q\,dy + R\,dz\,,$$

где (dx, dy, dz) –компоненты дифференциала $d\vec{r}$.

Подчеркнем, что формула Стокса лежит в основе многих фундаментальных физических законов, прежде всего законов электродинамики. С другой стороны, гибкость этой формулы, оставляющей за исследователем право широкого выбора поверхностей $\mathcal{S}$, по которым ведется интегрирование в поверхностном интеграле, делает ее эффективным инструментом анализа, позволяющим подчас существенно упрощать вычисление контурных интегралов. Именно эту особенность формулы Стокса призваны демонстрировать задачи данного занятия.

12.2 Задачи в классе

Задача 12.1
(4367) Применяя формулу Стокса, вычислить криволинейный интеграл

$$I = \oint\limits_{\mathcal{L}} y\,dx + z\,dy + x\,dz\,,$$

где $\mathcal{L}$ *–окружность* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, *пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси* Ox. *Проверить результат непосредственным вычислением.*

Решение 12.1 Интегрирование ведется по окружности, образованной сечением сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$ плоскостью $x+y+z=0$. Пользуясь формулой Стокса, сведем данный криволинейный интеграл к поверхностному. Для этого необходимо выбрать поверхность, по которой будем интегрировать, и определить вектор нормали к нужной стороне поверхности. Поскольку заданный контур плоский, то в качестве поверхности, натянутой на контур, естественно взять плоский круг, вектор единичной нормали к которому во всех точках круга одинаков. При выбранном направлении обхода контура, вектор нормали "смотрит почти на нас" –образует с осью x (как и с остальными осями) острый угол. Другими словами, все его направляющие косинусы положительны.

Компоненты вектора нормали найдем, вспомнив из аналитической геометрии, что если задано уравнение плоскости

$$ax+by+cz+d=0\,,$$

то вектор $\vec{m}$ с компонентами $\{a,b,c\}$ перпендикулярен данной плоскости. Нормировав его, получим единичный вектор нормали к плоскости. В нашем случае вектор $\vec{m}$ имеет компоненты $\{1,1,1\}$. Следовательно единичный вектор нормали задан равенством

$$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}\,\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\,\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\,\vec{k}\,.$$

Вычислим теперь ротор интегрируемого векторного поля

$$\vec{A}=\vec{i}\,y+\vec{j}\,z+\vec{k}\,x\,.$$

Он равен

$$\operatorname{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}=-\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}\,.$$

Обратим внимание, что данный вектор направлен в сторону, в точности противоположную направлению вектора нормали. Иными словами, его скалярное произведение с вектором нормали к выбранной поверхности равно, взятому с отрицательным знаком, модулю этого вектора: $(\vec{n}\cdot\operatorname{rot}\vec{A})=-\sqrt{3}$. Таким образом, согласно формуле Стокса,

$$I=-\sqrt{3}\iint\limits_{S}dS=-\sqrt{3}\,\pi\,a^2\,.$$

Вычислим теперь криволинейный интеграл напрямую, не прибегая к формуле Стокса. Для этого сконструируем из подручного материала вектор, касательный к контуру. Заметим, что ему перпендикулярны ранее найденный вектор $\vec{n}$ и, вследствие симметрии контура относительно начала координат, радиус-вектор $\vec{r}=\vec{i}\,x+\vec{j}\,y+\vec{k}\,z$ точек контура [1]. Векторы $\vec{n}$, $\vec{r}$ и

[1]Тем, кто не удовлетворен ссылкой на симметрию контура, дадим более развернутое доказательство перпендикулярности векторов $\vec{r}$ и $\vec{\tau}$. Запишем параметрическое уравнение контура $\vec{r}=\vec{r}(l)$, где l – естественный параметр, равный длине контура между некоторой начальной точкой и текущей точкой контура. Из способа построения контура, чьи точки лежат на сфере с центром в начале координат, следует, что квадрат длины радиуса-вектора постоянен: $(\vec{r}\cdot\vec{r})\equiv a^2$. Дифференцируя это тождество по l, придем к искомому условию перпендикулярности $(\vec{r}\cdot\vec{\tau})\equiv 0$.

$\vec{\tau}$, очевидно, образуют правую тройку, а значит нормированное векторное произведение первых двух векторов равно искомому касательному вектору:

$$\vec{\tau} = \frac{1}{a}[\vec{n} \times \vec{r}\,] \,.$$

При выводе этой формулы мы учли также, что векторы $\vec{n}$ и $\vec{r}$ взаимно перпендикулярны, поскольку $\vec{r}$ лежит в плоскости $x + y + x = 0$, а $\vec{n}$ перпендикулярен ей. Поэтому модуль их векторного произведения равен:

$$|[\vec{n} \times \vec{r}\,]| = |\vec{n}\,|\,|\vec{r}\,| = a$$

–длине вектора $\vec{r}$.

Найдем явное выражение вектора $\vec{\tau}$:

$$\vec{\tau} = \frac{1}{a\sqrt{3}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \frac{1}{a\sqrt{3}} \left[\,\vec{i}\,(z-y) + \vec{j}\,(x-z) + \vec{k}\,(y-x)\right].$$

Умножим его скалярно на вектор $\vec{A}$. В итоге получим:

$$(\vec{A} \cdot \vec{\tau}\,) = \frac{1}{a\sqrt{3}}[y(z-y) + z(x-z) + x(y-x)] = \frac{1}{a\sqrt{3}}[-a^2 + yz + zx + xy]\,.$$

В последнем равенстве учтено, что (x, y, z) –координаты точек контура, для которых $x^2+y^2+z^2 = a^2$, поскольку контур представляет собой окружность радиуса a с центром в начале координат. Преобразуем к удобному виду оставшиеся произведения. Для этого вспомним еще раз, что контур лежит в плоскости $x + y + z = 0$, а значит

$$(x+y+z)^2 = a^2 + 2(yz + zx + xy) = 0 \iff yz + zx + xy = -\frac{a^2}{2}\,.$$

Таким образом,

$$(\vec{A} \cdot \vec{\tau}\,) = -\frac{1}{a\sqrt{3}}\,\frac{3}{2}\,a^2 = -a\frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

а искомый криволинейный интеграл принимает вид:

$$I = -a\frac{\sqrt{3}}{2} \oint\limits_{\mathcal{L}} d\ell\,.$$

Оставшийся интеграл равен длине окружности $2\pi a$, следовательно:

$$I = -a\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\pi a = -a^2\sqrt{3}\,\pi\,.$$

Замечание 12.1 Обратим внимание, что непосредственное вычисление контурного интеграла повлекло за собой выкладки, гораздо более громоздкие, чем основанные на применении формулы Стокса. Поэтому здесь, как и во многих других ситуациях, использование формулы Стокса оказывается вполне целесообразным.

Задача 12.2
(4368) Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{A\rightsquigarrow B} (x^2 - yz)\,dx + (y^2 - xz)\,dy + (z^2 - xy)\,dz\,,$$

взятый по отрезку винтовой линии

$$x = a\cos\varphi\,, \quad y = a\sin\varphi\,, \quad z = \frac{h}{2\pi}\varphi\,,$$

от точки $A(a, 0, 0)$ до точки $B(a, 0, h)$.

Указание: Дополнить кривую $A \rightsquigarrow B$ прямолинейным отрезком и применить формулу Стокса.

Решение 12.2 Замкнем винтовую линию вертикальным отрезком, концами которого служат указанные точки B и A. Натянем на образованный контур поверхность. Из конфигурации контура видно, что поверхность будет иметь довольно замысловатую форму. Скоро выяснится, что форма поверхности не важна, но все-же, чтобы составить о ней некоторое представление, вообразим, что это поверхность нанесенной на контур мыльной пленки. Более сведущие в математике могут доказать, что это поверхность геликоида.

Согласно формуле Стокса, сумма вклада искомого интеграла I и вклада от упомянутого отрезка (обозначим его I_0), равна поверхностному интегралу

$$I + I_0 = \iint\limits_{S} (\vec{n}\cdot \mathrm{rot}\vec{A}\,)\,dS\,.$$

Вычислим входящий сюда ротор векторного поля

$$\vec{A} = \vec{i}\,(x^2 - yz) + \vec{j}\,(y^2 - xz) + \vec{k}\,(z^2 - xy)\,.$$

Он равен:

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - yz & y^2 - xz & z^2 - xy \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(-x + x) + \vec{j}(-y + y) + \vec{k}(z - z) \equiv 0\,.$$

Поэтому искомый интеграл равен $I = -I_0$. Осталось вычислить интеграл по отрезку. Взяв за переменную интегрирования z и учитывая, что вдоль отрезка $x = a$, $y = 0$, а $dx = dy = 0$, найдем:

$$I = -I_0 = -\int_h^0 z^2\,dz = \int_0^h z^2\,dz = \frac{h^3}{3}\,.$$

Замечание 12.1 Мы не получим полного удовлетворения от решения задачи, пока не выясним "скрытые пружины", обеспечивающие тождественное равенство нулю ротора интегрируемого векторного поля. Еще раз бросив взгляд на его аналитическое выражение, обнаружим, что оно равно градиенту скалярного поля

$$U = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - xyz\,.$$

Другими словами, это *потенциальное поле*, равное градиенту от некоторого скалярного *потенциала* U. А мы уже знаем, что ротор градиента любого скалярного поля тождественно равен нулю.

Задача 12.3

(4371) Применяя формулу Стокса, вычислить интеграл

$$I = \oint\limits_{\mathcal{L}} (y - z)\,dx + (z - x)\,dy + (x - y)\,dz\,,$$

где $\mathcal{L}$ *–эллипс*

$$x^2 + y^2 = a^2\,, \quad xa + \frac{z}{h} = 1 \quad (a > 0\,, \quad h > 0)\,,$$

пробегаемый против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

Решение 12.3 Поскольку мы намерены использовать формулу Стокса, сразу найдем ротор интегрируемого векторного поля

$$\vec{A} = \vec{i}\,(y - z) + \vec{j}\,(z - x) + \vec{k}\,(x - y)\,.$$

Он равен

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y - z & z - x & x - y \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}\,.$$

Вычислим вытекающий из формулы Стокса поверхностный интеграл 2-го типа. Выберем в качестве поверхности лежащий внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$ кусок плоскости $x/a + z/h = 1$. В пользу нашего выбора служит следующий аргумент: Поскольку единичный вектор нормали к плоскости во всех ее точках одинаков, скалярное произведение $(\vec{A}\cdot\vec{n}\,)$ единичной нормали и всюду постоянного ротора интегрируемого векторного поля может быть вынесено из под знака поверхностного интеграла:

$$I = \iint\limits_{\mathcal{S}} \left(\vec{A}\cdot\vec{n}\right)\,dS = \left(\vec{A}\cdot\vec{n}\right)\iint\limits_{\mathcal{S}} dS\,.$$

Следовательно, решение задачи сводится к нахождению величины скалярного произведения $(\vec{A}\cdot\vec{n}\,)$ и площади эллипса, по которому ведется интегрирование.

Сосчитаем вначале скалярное произведение. Из уравнения плоскости $hx + az - ah = 0$ следует, что единичная нормаль к ней равна

$$\vec{n} = \frac{\vec{i}h + \vec{k}a}{\sqrt{h^2 + a^2}}\,.$$

Рис. 12.2: Иллюстрация к задаче 4. Сфера, прорезаемая вертикальным цилиндром меньшего радиуса. Ось z совпадает с ближней к нам образующей цилиндра. Цилиндр и сфера пересекаются по двум контурам, по верхнему из которых производится интегрирование.

Скалярно умножая $\vec{n}$ на ранее выписанный $\operatorname{rot}\vec{A}$, будем иметь:

$$(\vec{A}\cdot\vec{n}\,) = -\frac{2(h+a)}{\sqrt{h^2+a^2}}\,.$$

Осталось определить площадь эллипса. Найдем ее, спроектировав интегрируемую поверхность на круг радиуса a в плоскости (x, y):

$$\iint\limits_{S} dS = \iint\limits_{\sigma} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy\,.$$

Здесь фигурирует явное уравнение плоскости

$$z = h\left(1-\frac{x}{a}\right) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{1}{a}\sqrt{h^2+a^2}\,.$$

Отсюда

$$\iint\limits_{S} dS = \frac{1}{a}\sqrt{h^2+a^2}\,\pi\,a^2$$

и окончательно

$$I = \iint\limits_{S}\left(\vec{A}\cdot\vec{n}\right)\,dS = -\frac{2(h+a)}{\sqrt{h^2+a^2}}\,\frac{1}{a}\sqrt{h^2+a^2}\,\pi\,a^2 = -2\pi a(h+a)\,.$$

Задача 12.4
(4372) Применяя формулу Стокса, вычислить интеграл

$$I = \oint\limits_{\mathcal{L}} (y^2+z^2)\,dx + (x^2+z^2)\,dy + (x^2+y^2)\,dz\,,$$

где $\mathcal{L}$ –кривая

$$x^2+y^2+z^2 = 2Rx\,, \quad x^2+y^2 = 2rx \quad (0 < r < R\,, \quad z > 0)\,,$$

пробегаемая так, что ограниченная ею, на внешней стороне сферы $x^2+y^2+z^2 = 2Rx$, наименьшая область остается слева.

Решение 12.4 Выясним вначале геометрию задачи. Интегрируемый контур образуется пересечением двух поверхностей. Это сфера радиуса R, с центром в точке $x = R$ на оси x, касающаяся начала координат, а также цилиндр меньшего радиуса $r < R$, одной из образующих которого служит ось z. Сфера пересекается цилиндром по двум контурам, соприкасающимся в начале координат. Неравенство $z > 0$ оставляет контур, расположенный в верхней полуплоскости. Из условия задачи ясно, что контур обходится против часовой стрелки, если смотреть на него сверху — с положительной стороны оси z.

Начнем подготовительную работу, нацеленную на использование формулы Стокса. А именно, вычислим ротор входящего в интеграл векторного поля

$$\vec{A} = \vec{i}\,(y^2+z^2) + \vec{j}\,(x^2+z^2) + \vec{k}\,(x^2+y^2)\,.$$

Он равен

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2+z^2 & x^2+z^2 & x^2+y^2 \end{vmatrix} = \vec{i}\,2\,(y-z) + \vec{j}\,2\,(z-x) + \vec{k}\,2\,(x-y)\,.$$

Выпишем векторное уравнение требуемой, расположенной выше контура, области сферы:

$$\vec{r} = \vec{i}\,x + \vec{j}\,y + \vec{k}\,z\,, \qquad z = \sqrt{2Rx - x^2 - y^2}\,.$$

Заменим криволинейный интеграл на поверхностный по указанной поверхности. Затем спроектируем поверхность на круг σ в плоскости (x, y), и выразим поверхностный интеграл через двойной. Заметив при этом, что векторы $\vec{r}_x$, $\vec{r}_y$ и внешняя нормаль $\vec{n}$ к выделенному участку сферы образуют правую тройку, получим:

$$I = \iint\limits_{\sigma} (\operatorname{rot}\vec{A},\, \vec{r}_x,\, \vec{r}_y)\, dxdy\,.$$

Вычислим входящее в двойной интеграл смешанное произведение:

$$(\operatorname{rot}\vec{A},\, \vec{r}_x, \vec{r}_y) = 2\begin{vmatrix} y-z & z-x & x-y \\ 1 & 0 & \dfrac{R-x}{z} \\ 0 & 1 & -\dfrac{y}{z} \end{vmatrix} =$$

$$= 2\left(x - y + \frac{y}{z}(z-x) + \frac{1}{z}(z-y)(R-x)\right) =$$

$$= 2R\left(1 - \frac{y}{z}\right) = 2R\left(1 - \frac{y}{\sqrt{2Rx - x^2 - y^2}}\right)\,.$$

Подставив его в интеграл, видим, что последний распадается на два интеграла

$$I = 2R\iint\limits_{\sigma} dxdy - 2R\int_0^{2r} dx \int_{-\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}} \frac{y\,dy}{\sqrt{2Rx - x^2 - y^2}}\,.$$

Причем первый интеграл равен площади круга $\sigma : (x-r)^2 + y^2 < r^2$, а второй, как следует из соображений симметрии, равен нулю. Таким образом, окончательно: $I = 2\pi\, R\, r^2$.

Рис. 12.3: Иллюстрация к задаче 5. Куб стороной a и секущая его плоскость $x+y+z=\frac{3}{2}a$. Оттенена часть плоскости, расположенная в 1-м октанте. Жирной линией выделен контур, по которому ведется интегрирование.

Задача 12.5
(4373) Применяя формулу Стокса, вычислить интеграл

$$I=\oint\limits_{\mathcal{L}}(y^2-z^2)\,dx+(z^2-x^2)\,dy+(x^2-y^2)\,dz\,,$$

где $\mathcal{L}$ –сечение поверхности куба

$$0\le x\le a\,,\quad 0\le y\le a\,,\quad 0\le z\le a\,,$$

плоскостью

$$x+y+z=\frac{3}{2}\,a\,,$$

пробегаемое против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

Решение 12.5 Согласно формуле Стокса, наш интеграл равен

$$I=\iint\limits_{\mathcal{S}}(\vec{n}\cdot\text{rot}\vec{A}\,)\,dS\,,$$

где интегрирование ведется по лежащему внутри куба куску указанной в условии задачи плоскости. Вектор нормали к любой ее точке найдем, вспомнив, что мы уже определяли, при решении первой задачи этого занятия, вектор нормали к плоскости $x+y+z=0$, параллельной данной. Поэтому сразу выпишем:

$$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\,)\,.$$

Вычислим далее ротор входящего в интеграл векторного поля

$$\vec{A}=\vec{i}\,(y^2-z^2)+\vec{j}\,(z^2-x^2)+\vec{k}\,(x^2-y^2)\,.$$

Он равен

$$\text{rot}\,\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2\end{vmatrix}=-2\,[\vec{i}\,(y+z)+\vec{j}\,(z+x)+\vec{k}\,(x+y)]\,,$$

а его скалярное произведение с ранее выписанным вектором нормали таково:

$$(\vec{n}\cdot\text{rot}\,\vec{A}\,)=-\frac{2}{\sqrt{3}}\,(y+z+z+x+x+y)=-\frac{4}{\sqrt{3}}\,(x+y+z)\,.$$

Заметим еще, что согласно уравнению плоскости, по куску которой ведется интегрирование, сумма в круглых скобках постоянна:

$$x+y+z=\frac{3}{2}a\,.$$

Поэтому скалярное произведение под знаком поверхностного интеграла равно:

$$(\vec{n}\cdot\operatorname{rot}\vec{A}\,) = -\frac{4}{\sqrt{3}}\,\frac{3}{2}a = -2\sqrt{3}\,a\,.$$

Подставив эту величину в поверхностный интеграл, будем иметь:

$$I = -2\sqrt{3}\,a\,S\,, \qquad (*)$$

где S –площадь интегрируемого куска плоскости. Очевидно, она равна $S = D/\cos\alpha = \sqrt{3}\,D$, где D –площадь проекции интегрируемой поверхности на плоскость (y,z) (или любую другую координатную плоскость). Проекция эта представляет собой шестиугольник –часть квадрата $0 \le y \le a\,, \quad 0 \le z \le a\,$, без отсеченных от него прямыми

$$y + z = \frac{a}{2}\,, \quad y + z = \frac{3a}{2}\,,$$

треугольничков. Суммарная площадь последних равна $a^2/4$, так что

$$D = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{r4}\,.$$

Следовательно, наш интеграл равен:

$$I = -2\sqrt{3}\,a\,S = -6aD = -6a\cdot\frac{3a^2}{4} = -\frac{9}{2}a^3\,.$$

Замечание 12.1 Для вычисления площади S интегрируемой поверхности не обязательно проектировать ее на плоскость $x = 0$. Достаточно сообразить, что поверхность имеет вид правильного шестиугольника, длины сторон которого равны $a/\sqrt{2}$, а его площадь равна сумме площадей шести правильных треугольников:

$$S = 6\,\frac{a}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{3}}{4}\,.$$

Подставив это выражение в $(*)$, придем к уже знакомому ответу.

12.3 Домашнее задание

4369, 4370

Задача 12.6
(4369) Пусть $\mathcal{L}$ –замкнутый контур, расположенный в плоскости

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0\,,$$

и ограничивающий площадку $\mathcal{S}$. Найти

$$\oint\limits_{\mathcal{L}} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}\,,$$

где контур $\mathcal{L}$ пробегается в положительном направлении.

Решение 12.6 Интегрируемое векторное поле представляет собой, как нетрудно заметить, векторное произведение нормали к указанной плоскости и радиус-вектора, испущенного из начала координат: $\vec{A} = [\vec{n} \times \vec{r}]$. Вычислим его ротор, заодно еще раз поупражняясь в использовании вектора набла:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \left[\vec{\nabla} \times [\vec{n} \times \vec{r}]\right] .$$

Распишем возникшее двойное векторное произведение по формуле *bac* минус *cab*. В итоге получим:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{n}(\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) - (\vec{n} \cdot \vec{\nabla})\vec{r} = 2\vec{n} .$$

Следовательно, по формуле Стокса, искомый интеграл равен $I = 2S$ – удвоенной площади плоской площадки, ограниченной контуром.

Задача 12.7
(4370) Применяя формулу Стокса, вычислить интеграл

$$I = \oint\limits_{\mathcal{L}} (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz ,$$

где $\mathcal{L}$ *–эллипс*

$$x = a\sin^2 t , \quad y = 2a\sin t\cos t , \quad z = a\cos^2 t \quad (0 \le t \le \pi) ,$$

пробегаемый в направлении возрастания параметра t*.*

Решение 12.7 Ротор интегрируемого векторного поля

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} =$$

$$= (1-1)\vec{i} + (1-1)\vec{j} + (1-1)\vec{k} \equiv \vec{o}$$

–равен нулевому вектору, а значит, по формуле Стокса, данный интеграл равен нулю.