ЛЕКЦИЯ 1

I.ВВЕДЕНИЕ

1.Предмет курса.

Большинство законов природы записывается в форме соотношений, в которые входят физические величины, зависящие от одной или нескольких переменных, а также их производные по этим переменным. Примером может служить закон Ньютона, описывающий движение классической частицы с импульсом $\vec{p}\,(t)$ под действием силы $\vec{F}\,(t)$:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}\,(t)\,,$$

где

$$\vec{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\vec{v},$$

m_0 - масса покоя, $\tilde{n}$ - скорость света, $\vec{v}$ - скорость частицы. Здесь неизвестной величиной является скорость частицы, которая зависит от одной переменной - времени t. Другим важнейшим законом природы является закон Максвелла, который описывает распространение электромагнитных волн в среде. Так, в вакууме напряженности электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ полей, являющихся функциями трех координат и времени, описываются соотношениями:

$$rot \quad \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$rot \quad \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$div \quad \vec{E} = 0$$

$$div \quad \vec{H} = 0$$

Обратимся к конкретным физическим примерам.

Радиоактивный распад. Пусть $m\,(t)$ - масса радиоактивного вещества в момент времени t. Обозначим через $dm\,(t)$ изменение (уменьшение) массы вещества за промежуток времени dt. Тогда, физически оправдано предположение, что величина dm пропорциональна длительности промежутка dt и исходной массе радиоактивного вещества m, т.е.

$$dm = -\alpha m dt,$$

где постоянная $\alpha > 0$. Отсюда следует, что

$$\frac{dm}{m} = -\alpha dt,$$

и, интегрируя, получаем

$$\ln m = -\alpha t + \ln c$$

или

$$m = ce^{-\alpha t}.$$

Семейство решений содержит одну неизвестную постоянную c и имеет мощность континуума. Если в начальный момент времени $t = 0$ имеется m_0 вещества, то $m_0 = c$, и поэтому

$$m(t) = m_0 e^{-\alpha t}.$$

Время, за которое начальная масса вещества уменьшается в два раза, называется периодом полураспада T:

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-\alpha T} \Longrightarrow T = \frac{\ln 2}{\alpha}.$$

Постоянная α определяется природой радиоактивного вещества.

Свободное падение тела. Запишем уравнение Ньютона для частицы массы m, падающей вниз под действием силы тяжести:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g}.$$

Отсюда,

$$\frac{dv}{dt} = -g \Longrightarrow v(t) = -gt + c_1.$$

Тогда для координаты частицы имеем

$$\frac{dy}{dt} = -gt + c_1,$$

или после интегрирования

$$y = -\frac{gt^2}{2} + c_1 t + c_2.$$

Формула охватывает всевозможные падения тел под действием силы тяжести. Она содержит две неизвестные постоянные. Пусть при $t = 0$ определены координата y_0 и скорость v_0 тела. Тогда, $v_0 = c_1, y_0 = c_2$, и получаем единственное решение:

$$y(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + y_0.$$

2.Основные определения.

Определения. Дифференциальным уравнением называется соотношение для неизвестной функции, в которое входят ее производные или дифференциалы. Если функция зависит от одной независимой переменной, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным. Дифференциальное уравнение называется уравнением в частных производных, если функция, входящая в него, зависит от нескольких независимых переменных. Примеры таких уравнений - соответственно уравнение Ньютона и уравнения Максвелла.

Порядком уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение. В примерах мы имели дело с обыкновенными дифференциальными уравнениями первого и второго порядков. Общий вид обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка для неизвестной функции $y(x)$ таков:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Здесь функция F обязательно должна зависеть от $y^{(n)}$. Общий вид дифференциального уравнения первого порядка:

$$F\left(x, y, y'\right) = 0.$$

Общий вид дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(x, y\right).$$

Определения. Решением дифференциального уравнения называется всякая функция, обращающая его в тождество. Частным решением называется решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям (если оно единственно). Множество всех частных решений называется общим решением дифференциального уравнения.

Как мы видели на примере, общее решение дифференциального уравнения первого порядка является семейством функций, зависящих от одного параметра: $y = \varphi\left(x, c\right)$, где функция $\varphi\left(x, c\right)$ дифференцируема по x. Из общего решения можно получить частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $\left(x_0, y_0\right)$: $\varphi\left(x_0, c\right) = y_0$ - уравнение для определения постоянной c. Решая его, получим $c = c_0$. Следовательно, частное решение имеет вид: $y = \varphi\left(x, c_0\right)$.

Общее решение дифференциального уравнения n-го порядка, как правило, есть семейство функций, зависящих от n произвольных постоянных: $y = \varphi\left(x, c_1, c_2, \ldots, c_n\right)$. Начальные условия должны давать возможность определить константы $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Иногда общее решение дифференциального уравнения первого порядка получается в форме

$$\Phi\left(x, y, c\right) = 0$$

и называется общим интегралом. Частное решение, записанное в подобной форме, называют частным интегралом.

3.Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной.

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(x, y\right),$$

где $f\left(x, y\right)$ определена в некоторой двумерной области $G \subset \Re^2$. Частное решение $y = \varphi\left(x\right)$ обращает уравнение в тождество

$$\frac{d\varphi\left(x\right)}{dx} \equiv f\left(x, \varphi\left(x\right)\right)$$

и удовлетворяет начальным условиям $\varphi\left(x_0\right) = y_0$. При этом $\left(x_0, y_0\right) \in G$. На плоскости $y = \varphi\left(x\right)$ представляет кривую, проходящую через т.$M_0\left(x_0, y_0\right)$. Эта кривая называется интегральной кривой. По нашему определению, это - единственная кривая. Множество всех интегральных кривых соответствует общему решению уравнения. Геометрически ясно, что оно зависит от одного параметра - ординаты начальной точки. Из геометрического смысла производной следует, что тангенс угла наклона касательной к интегральной кривой в т.x_0 равен значению функции $f(x_0, y_0)$:

$$f(x_0, y_0) = \left.\frac{d\varphi(x)}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

Таким образом, правая часть $f(x, y)$ дифференциального уравнения задает в области G поле направлений. Будем отмечать это отрезками в области G (а не векторами, поскольку направление определено с точностью до π). Тогда, интегральной кривой будет кривая, касательная к которой совпадает с направлением поля в каждой своей точке.

Определение. Изоклиной называется кривая, в каждой точке которой поле имеет одно и то же фиксированное направление.

Пример. Построим интегральные кривые уравнения

$$\frac{dy}{dx} = 1 + xy.$$

Полагая $dy/dx = k$, находим уравнения изоклин: $xy = k - 1$. Построим на плоскости несколько простейших изоклин, отвечающих $k = -1, 0, 1, 2$ (см.рис). Перед построением интегральных кривых найдем их точки перегиба. Как известно, точки, подозрительные на перегиб, определяются из условия равенства нулю второй производной. Вычисляя y'' из исходного уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y + xy' = y + x(1 + xy)$$

и полагая ее равной нулю, получаем кривую точек перегиба

$$y = -\frac{x}{1 + x^2}.$$

Теперь уже не составляет труда качественно изобразить ход интегральных кривых исходного дифференциального уравнения. Примененный способ построения интегральных кривых носит название метода изоклин.

ЛЕКЦИЯ 2

4.Построение дифференциального уравнения по общему решению.

Пусть дано семейство дифференцируемых функций, зависящих от одного параметра. Требуется найти дифференциальное уравнение, для которого это семейство будет решением.

Итак, известно:

$$y = \varphi\left(x, c\right). \tag{1}$$

Продифференцируем уравнение (1) по x:

$$y' = \varphi'_x\left(x, c\right). \tag{2}$$

Из уравнений (1),(2) нужно исключить c. Может оказаться, что равенство $y' = \varphi'_x$ уже не содержит c. Следовательно, это равенство и будет искомым уравнением. В общем случае из уравнения (1) можно исключить c (если $\varphi'_c\left(x, c\right) \neq 0$) и выразить

$$c = \psi\left(x, y\right). \tag{3}$$

При этом справедливо тождество

$$c \equiv \psi\left(x, \varphi\left(x, c\right)\right).$$

Подставляя равенство (3) в уравнение (1), имеем

$$y' = \varphi'_x\left(x, \psi\left(x, y\right)\right) = f\left(x, y\right). \tag{4}$$

Покажем, что $y = \varphi\left(x, c\right)$ действительно является общим решением дифференциального уравнения (4). Подставим (1) в (4)

$$\varphi'_x\left(x, c\right) = \varphi'_x\left(x, \psi\left(x, \varphi\left(x, c\right)\right)\right) \equiv \varphi'_x\left(x, c\right).$$

<u>Пример</u>.

$$y = \sqrt{c^2 - x^2}.$$

Тогда,

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{c^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}.$$

В итоге, получаем уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Если же имеется семейство n раз дифференцируемых функций, зависящих от n параметров: $y = \varphi\left(x, c_1, c_2, \ldots, c_n\right)$, и мы хотим построить дифференциальное уравнение, для которого это семейство является общим решением, то следует дифференцировать равенство последовательно n раз:

$$y' = \varphi'_x\left(x, c_1, \ldots, c_n\right), \ldots, y^{(n)} = \varphi^{(n)}_{x\ldots x}\left(x, c_1, \ldots, c_n\right).$$

Из первых n уравнений определяем

$$c_i = \psi_i\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right), i = 1, 2, \dots, n;$$

а затем подставляем в последнее уравнение. В итоге получим,

$$y^{(n)} = \psi\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right).$$

Заметим, что дифференциальное уравнение считается проинтегрированным, если решение найдено в виде квадратур.

II.ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1.Уравнения с разделяющимися переменными

Простейшим дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными является уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \tag{5}$$

Предполагается, что $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b). Все решения этого уравнения даются формулой:

$$y = \int f(x)\, dx + c. \tag{6}$$

Переобозначив постоянную c, его удобно записать в виде

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi + c.$$

Если задано начальное условие: $y = y_0$ при $x = x_0$, то $c = y_0$, и получаем частное решение

$$y = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi. \tag{7}$$

В силу непрерывности $f(x)$ входящий в (7) интеграл существует. Все решения уравнения (5) расположены в полосе $a < x < b$, $\quad -\infty < y < \infty$, а интегральные кривые получаются из (7) сдвигом параллельно оси OY.

Другим видом уравнения с разделяющимися переменными является:

$$\frac{dy}{dx} = f(y), \tag{8}$$

где $f(y)$ непрерывна в интервале $c < y < d$. Будем искать решение уравнения (8) в виде обратной функции к решению $y = \varphi(x)$, т.е. в виде $x = \psi(y)$, где $\psi(y) = \varphi^{(-1)}(y)$. Для этого запишем уравнение (8) в эквивалентной форме

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}. \tag{9}$$

Это можно сделать, если $f(y) \neq 0$.

Пусть α и β - два последних нуля функции $f(y)$, т.е. $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ и при $\forall y \in (\alpha, \beta) : f(y) \neq 0$. Тогда в интервале (α, β) уравнения (8) и (9) равноправны. В уравнении (9) правая часть в интервале (α, β) непрерывна, и, следовательно, в соответствии с (6)

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + c. \tag{10}$$

Здесь все интегральные кривые расположены в полосе (α, β) и получаются одна из другой сдвигом по оси OX.

Предположим, что при $y = \beta$ интеграл $\int dy/f(y)$ сходится. Тогда, интегральная кривая касается линии $y = \beta$. Если, наоборот, при $y = \alpha$ интеграл $\int dy/f(y)$ расходится, и $1/f(\alpha) = -\infty$. Тогда интегральная кривая асимптотически приближается к линии $y = \alpha$.

Заметим, что формула (10) определяет y как однозначную функцию x. Действительно, поскольку функция $f(y)$ не меняет знак в (α, β), то не меняет знак и производная dx/dy, а, значит, функция $x = \psi(y)$ имеет однозначную обратную функцию $y = \varphi(x)$ - решение уравнения (8).

Помимо решения (10) прямые $y = \alpha$ и $y = \beta$ являются также решениями уравнения (8):

$$\frac{d\alpha}{dx} \equiv f(\alpha), \quad \frac{d\beta}{dx} \equiv f(\beta).$$

Однако, через любую точку прямой $y = \alpha$ проходит одна интегральная кривая, а через любую точку прямой $y = \beta$ две интегральные кривые уравнения (8). Такие решения носят название <u>особых</u>. В нашем случае $y = \beta$ - особое решение.

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения (8) не выражается одной формулой

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + c, \quad y = \alpha, \quad y = \beta.$$

Особое решение возникает тогда, когда через каждую точку соответствующей интегральной кривой проходит (касается) другая интегральная кривая.

<u>Пример</u>. Движение частицы в вязкой среде.

Пусть частица массы m движется прямолинейно в вязкой среде, сила трения которой пропорциональна кубу скорости частицы. Тогда уравнение Ньютона запишется в виде:

$$m\frac{dv}{dt} = -\gamma v^3, \quad (\gamma > 0).$$

Одно из решений уравнения очевидно - $v = 0$. Такое решение, отвечающее покоящейся частице, неинтересно с физической точки зрения. Если $v \neq 0$, то

$$\frac{dv}{v^3} = -\frac{\gamma}{m}dt \Longrightarrow -\frac{1}{2v^2} = -\frac{\gamma t}{m} - \frac{c}{2}.$$

Отсюда находим общее решение

$$v = \pm\frac{1}{\sqrt{c + 2\gamma t/m}}.$$

В асимптотике ($t \to \infty$) частица останавливается: $v \to 0$. Знаки $\pm$ отвечают различному направлению движения частицы вдоль оси ОХ.

Рассмотрим следующий тип уравнения с разделяющимися переменными

$$f_1(x)\, f_2(y)\, dx = g_1(x)\, g_2(y)\, dy. \tag{11}$$

Считаем $f_1(x), f_2(y), g_1(x), g_2(y)$ непрерывными функциями в некоторой области. Допустим, что $y = y_i, i = 1, 2, \ldots$ есть решения уравнения $f_2(y) = 0$. Тогда, очевидно, $y = y_i$ являются интегральными кривыми уравнения (11). Пусть $x = x_j, j = 1, 2, \ldots$ - корни уравнения $g_1(x) = 0$. Тогда прямые $x = x_j$ являются интегральными, но они не являются решениями уравнения (11), поскольку $x = x_j$ не есть функция.

Далее, предполагая, что $f_2(y) \neq 0, g_1(x) \neq 0$, находим делением на $g_1(x)\, f_2(y)$

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} dx = \frac{g_2(y)}{f_2(y)} dy.$$

Это уравнение равносильно (11). Интегрируя обе части, имеем:

$$\int \frac{f_1(x)}{g_1(x)} dx = \int \frac{g_2(y)}{f_2(y)} dy + c. \tag{12}$$

Получили соотношение вида $\Phi(x, y, c) = 0$. Это общий интеграл уравнения (11). Можно показать, что формула (12) определяет y как неявную функцию x.

2.Уравнения, приводимые к уравнениям с разделяющимися переменными.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by), \quad a, b \in \Re \quad (a, b \neq 0).$$

Введем новую функцию $z = ax + by$. Тогда, $dz = adx + bdy$ и

$$\frac{dz - adx}{bdx} = f(z)$$

или

$$dz = [a + bf(z)]\, dx.$$

Таким образом, пришли к уравнению с разделяющимися переменными.

Определение. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется однородной, если для произвольного действительного параметра t:

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где k - некоторое натуральное число, показывающее "степень" однородной функции (ее порядок).

Пример.

$$f(x,y) = x^3 + 2y^3 - 3xy^2 -$$

однородная функция 3-ей степени.

$$f(x,y) = x^2 e^{-y/x} + 8xy \sin\frac{x}{y} -$$

однородная функция 2-го порядка.

Для случая двух переменных условие однородности функции записывается в следующем виде

$$f(tx,ty) = t^k f(x,y).$$

Положим в этом равенстве $t = 1/x$. Тогда,

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^k} f(x,y),$$

т.е.

$$f(x,y) = x^k f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Если $k = 0$, то:

$$f(x,y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right).$$

Итак, однородная функция двух независимых переменных нулевого порядка есть функция отношения y/x.

Определение. Если правая часть дифференциального уравнения является однородной функцией нулевого порядка, то дифференциальное уравнение называется однородным:

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right).$$

Это уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $y/x = u$, где u - новая функция. Тогда,

$$y = ux \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} = g(u).$$

Следовательно,

$$x\frac{du}{dx} = g(u) - u.$$

Допустим, что $u_1, u_2, \ldots$- корни уравнения $g(u) - u = 0$. Тогда $u = u_i$ - есть решение полученного уравнения. Значит, прямые $y = u_i x$, проходящие через начало координат, являются интегральными кривыми. Считая $u \neq u_i$, находим:

$$\frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

или

$$\int \frac{du}{g(u) - u} = \ln|x| + \ln|c| = \ln|cx|.$$

Отсюда, находим решение $u = \omega(cx)$, а по нему общее решение исходного однородного уравнения $y = x\omega(cx)$.

ЛЕКЦИЯ 3

Уравнения, приводимые к однородным.

Отметим основные способы сведения уравнений к однородным:

а) заменой функции $y = z^{\alpha}$. Степень α подбирают так, чтобы уравнение стало однородным,

б) уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1}\right)$$

приводится к однородному одновременной заменой и аргумента и функции: $x = \xi + \alpha, y = \eta + \beta$, где константы α и β выбираются специальным образом. В силу произведенной замены $dx = d\xi, dy = d\eta, ax + by + c = (a\xi + b\eta) + a\alpha + b\beta + c, a_1 x + b_1 y + c_1 = (a_1\xi + b_1\eta) + a_1\alpha + b_1\beta + c_1$. Слагаемые, стоящие вне круглых скобок, полагаются равными нулю. Отсюда получается система уравнений для определения α и β:

$$\left\{ \begin{array}{c} a\alpha + b\beta + c = 0 \\ a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \end{array} \right| .$$

Данная система имеет единственное решение, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда исходное дифференциальное уравнение перейдет в однородное

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a\xi + b\eta}{a_1\xi + b_1\eta}\right) = g\left(\frac{\eta}{\xi}\right).$$

Если $\Delta = 0$, т.е. $a_1/a = b_1/b = \lambda$, то

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{\lambda\,(ax + by) + c_1}\right),$$

и оно приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $z = ax + by$.

3.**Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.**

Определение. Линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка называют уравнение вида

$$y' + P\,(x)\,y = Q\,(x)\,, \tag{1}$$

где неизвестная функция y и ее производная y' входят в первой степени.

Будем полагать, что функции $P\,(x)$ и $Q\,(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$. Если $Q\,(x) \equiv 0$, то уравнение

$$y' + P\,(x)\,y = 0 \tag{2}$$

называют линейным однородным уравнением, соответствующим неоднородному линейному уравнению (1). Уравнение (2) является уравнением с разделяющимися переменными и легко решается. Оно имеет очевидное тривиальное решение

$$y = 0. \tag{3}$$

Если $y \neq 0$, то

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\,dx \Longrightarrow \ln|y| = -\int P(x)\,dx + \ln|c|\,, c \neq 0.$$

Поэтому

$$y = c\exp\left\{-\int P(x)\,dx\right\}. \tag{4}$$

В уравнении (4) $c \neq 0$. Если же "разрешить" c принимать нулевое значение, то придем к решению (3). Поэтому, общее решение однородного уравнения (2) дается формулой

$$y = c\exp\left\{-\int P(x)\,dx\right\}. \tag{5}$$

Оказывается, решение неоднородного уравнения (1) можно получить из (5), применив метод Лагранжа - метод вариации произвольной постоянной. Будем искать решение исходного неоднородного уравнения (1) в виде

$$y = c(x)\exp\left\{-\int P(x)\,dx\right\}, \tag{6}$$

где $c(x)$ - неизвестная функция. Подставим это решение в (1)

$$c'(x)\exp\left\{-\int P(x)\,dx\right\} - c(x)P(x)\exp\left\{-\int P(x)\,dx\right\} +$$

$$+P(x)c(x)\exp\left\{-\int P(x)\,dx\right\} = Q(x) \Longrightarrow c'(x) = Q(x)\exp\left\{\int P(x)\,dx\right\}$$

$$\Longrightarrow c(x) = \int Q(x)\exp\left\{\int P(x)\,dx\right\}dx + c_1.$$

Подставляя $c(x)$ в (6), получим:

$$y = \exp\left\{-\int P(x)\,dx\right\}\left[c_1 + \int Q(x)\exp\left\{\int P(x)\,dx\right\}dx\right]. \tag{7}$$

Таким образом, общее решение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка можно найти с помощью двух квадратур (интегралов).

Проанализируем структуру полученного решения. Общее решение линейного неоднородного уравнения представляет собой сумму двух слагаемых:

$$y_1 = c_1\exp\left\{-\int P(x)\,dx\right\} -$$

это общее решение однородного уравнения и

$$y_2 = \exp\left\{-\int P(x)\,dx\right\}\int Q(x)\exp\left\{\int P(x)\,dx\right\}dx -$$

это решение получается из (7) при $c_1 = 0$, т.е. является частным решением неоднородного уравнения. Оказывается, это общее правило.

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения представляет собой суперпозицию общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Предположим, что каким-то образом удалось найти $\psi(x)$ - частное решение неоднородного уравнения. Тогда общее решение неоднородного уравнения можно найти с помощью одной квадратуры. Сделаем замену $y = z + \psi(x)$, где z - новая функция. Подставим все в уравнение (1):

$$z' + \underbrace{\psi'(x)} + P(x)\,z + \underbrace{P(x)\,\psi(x)} = \underbrace{Q(x)}.$$

Поскольку $\psi(x)$ - решение уравнения (1), то выделенные слагаемые сокращаются, и получаем уравнение вида (2)

$$z' + P(x)\,z = 0.$$

Следовательно, общее решение уравнения (1) представляется в форме

$$y = c\exp\left\{-\int P(x)\,dx\right\} + \psi(x).$$

Если известно два частных решения линейного неоднородного дифференциального уравнения, то его общее решение может быть найдено без квадратур. Пусть $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ - два указанных частных решения, т.е.

$$\begin{gathered}{\psi_1}' + P(x)\,\psi_1 = Q(x)\,,\\ {\psi_2}' + P(x)\,\psi_2 = Q(x)\,.\end{gathered}$$

Вычитая второе уравнение из первого, найдем

$$[\psi_1 - \psi_2]' + P(x)\,[\psi_1 - \psi_2] = 0.$$

Следовательно, $(\psi_1 - \psi_2)$ - есть решение однородного уравнения. Таким образом, общее решение однородного уравнения можно представить как

$$y = c\,(\psi_1 - \psi_2)\,,$$

а общее решение неоднородного уравнения (1) в виде

$$y = \psi_1(x) + c\,[\psi_1(x) - \psi_2(x)]\,.$$

Отсюда видно, что общее решение неоднородного уравнения (1) дается формулой

$$y = \varphi(x) + c\psi(x)\,, \tag{8}$$

т.е. является линейной функцией постоянной c.

Обратно, если взять линейную функцию произвольного постоянного, то дифференциальное уравнение, для которого эта линейная функция является общим решением, будет линейным. Покажем это. Продифференцируем соотношение (8):

$$y' = \varphi'(x) + c\psi'(x)\,. \tag{9}$$

Исключая c из (8),(9), приходим к

$$\frac{y' - \varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{y - \varphi(x)}{\psi(x)}$$

или

$$y' \underbrace{- \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}}_{P(x)} y = \underbrace{\varphi'(x) - \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\varphi(x)}_{Q(x)}.$$

Пример. Заряд конденсатора.

Запишем уравнения Кирхгофа для электрической схемы, представленной на рисунке. Здесь: E - постоянная э.д.с., U - напряжение на емкости, I - ток, текущий через сопротивление R и конденсатор C. Тогда,

$$E = RI + U, \quad I = C\frac{dU}{dt}.$$

В итоге, для напряжения U на емкости получается линейное дифференциальное уравнение

$$\tau\frac{dU}{dt} + U = E \qquad (\tau = RC).$$

Частное решение этого неоднородного уравнения физически очевидно: $U = E$. Тогда, производя замену $U = z + E$, придем к однородному уравнению

$$\tau\frac{dz}{dt} + z = 0,$$

решение которого имеет вид

$$z = c_1 e^{-t/\tau}.$$

И, следовательно, общее решение

$$U = E + c_1 e^{-t/\tau}.$$

Если в начальный момент времени $t = 0$ конденсатор был разряжен: $U(0) = 0$, то $E + c_1 = 0 \to c_1 = -E$, и процесс заряда описывается формулой

$$U = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

Таким образом, время заряда конденсатора равно постоянной времени $\tau = RC$.

4.**Уравнения Бернулли и Риккати.**

Есть ряд дифференциальных уравнений, которые приводятся к линейным. Уравнение вида

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^n, \quad (n \neq 0, 1) \tag{10}$$

называют уравнением Бернулли. Если $n > 0$, то $y = 0$ - тривиальное решение. Будем полагать далее, что $y \neq 0$. Тогда, поделив обе части уравнения (10) на y^n, получим:

$$y^{-n}y' + P(x)\,y^{-n+1} = Q(x).$$

Легко заметить, что
$$\left(y^{-n+1}\right)' = (1-n)\, y^{-n} y'.$$
Тогда, производя замену функции: $y^{-n+1} = z$, приходим к линейному дифференциальному уравнению
$$\frac{z'}{1-n} + P(x)\, z = Q(x)\,.$$

Пример. Рассмотрим уравнение Бернулли вида
$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x} = \frac{x^2}{2y}.$$
Поскольку в этом уравнении $n = -1$, то по рецепту нужно применить замену $y^2 = z$. Домножение на $2y$ обеих частей уравнения дает:
$$2yy' - \frac{y^2}{x} = x^2$$
или
$$z' - \frac{z}{x} = x^2.$$
Далее, действуя по схеме решения линейного дифференциального уравнения, получим общий интеграл исходного уравнения
$$y^2 = cx + \frac{x^3}{2}.$$

Уравнением Риккати называют дифференциальное уравнение вида
$$y' + \alpha(x)\, y + \beta(x)\, y^2 = \gamma(x)\,. \tag{11}$$
На самом деле, это - обобщенное уравнение, поскольку Риккати изучал более простое:
$$y' + \beta y^2 = \gamma x^m. \tag{12}$$
Заметим, что уравнение вида (12) встречается в физике. Оно получается из уравнения для напряженности электрического поля $E(x)$ в плоско-слоистой среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(x)$:
$$\frac{d^2E}{dx^2} + k^2\varepsilon(x)\, E = 0.$$
Сделав замену переменной
$$E = \exp\left\{\int z(x)\, dx\right\}$$
и вычислив
$$E' = z(x)\exp\left\{\int z(x)\, dx\right\} = zE, \quad E'' = z'E + zE' = \left(z' + z^2\right) E,$$

придем к уравнению Риккати

$$z' + z^2 = -k^2 \varepsilon (x) .$$

Следует заметить, что, в отличие от уравнения Бернулли, уравнение Риккати в общем случае не интегрируется в квадратурах. Однако, если известно частное решение (11) $\psi (x)$, то его можно свести к уравнению Бернулли и найти его общее решение. В самом деле. Проведем в (11) замену функции: $y = z + \psi (x)$. Тогда

$$z' + \underbrace{\psi' (x)} + \alpha (x) z + \underbrace{\alpha (x) \psi (x)} + \beta (x) z^2 + 2\beta (x) z\psi (x) + \underbrace{\beta (x) \psi^2 (x)} = \underbrace{\gamma (x)} .$$

Поскольку $\psi (x)$ - решение уравнения (11), отмеченные слагаемые сокращаются. В итоге, для функции $z (x)$ получается уравнение Бернулли

$$z' + [\alpha (x) + 2\beta (x) \psi (x)] z + \beta (x) z^2 = 0,$$

которое линеаризуется заменой $1/z = u \quad (n = 2)$.

Пример. Рассмотрим уравнение Риккати

$$y' + 3y^2 = \frac{2}{x^2}.$$

Поищем частное решение этого уравнения в виде $y = c/x$. Тогда,

$$-\frac{c}{x^2} + \frac{3c^2}{x^2} = \frac{2}{x^2} \Longrightarrow 3c^2 - c - 2 = 0 \Longrightarrow c_1 = 1, c_2 = -\frac{2}{3}.$$

В итоге мы нашли сразу два частных решения. Беря наиболее простое из них и производя замену функции: $y = z + 1/x$, придем к уравнению Бернулли

$$z' + \frac{6z}{x} + 3z^2 = 0.$$

Решая последнее, найдем общее решение исходного уравнения

$$y = \frac{cx^5 + 2}{x (cx^5 - 3)}.$$

ЛЕКЦИЯ 4

5.Уравнение в полных дифференциалах.

В записи дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y)$$

y является функцией, а x - аргументом. В эквивалентной форме записи уравнения

$$f(x, y)\, dx - dy = 0$$

переменные равноправны, но отсутствует симметрия. Поэтому наиболее общая форма дифференциального уравнения, разрешенного относительно производной, такова:

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0. \tag{1}$$

Будем полагать, что в (1) функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ непрерывны в некоторой области G вместе с частными производными $\partial M/\partial y$ и $\partial N/\partial x$.

Может оказаться, что левая часть уравнения (1) представляет собой полный дифференциал некоторой функции, т.е. $\exists U(x, y)$ такая, что

$$dU = M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy.$$

В силу формулы первого дифференциала функции двух переменных это означает, что

$$M = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{2}$$

В этом случае уравнение (1) называют уравнением в полных дифференциалах.

Если функция $U(x, y)$ известна, то решение уравнения (1) легко найти. В самом деле

$$dU(x, y) = 0 \Longrightarrow U(x, y) = c. \tag{3}$$

Пусть $y = \varphi(x)$ - решение дифференциального уравнения (1). Тогда, из (3) имеем:

$$U(x, \varphi(x)) \equiv c,$$

т.е. функция U по любой интегральной кривой принимает одно и то же значение. Для разных интегральных кривых эти значения различны.

Определение. Функция $U(x, y)$, непрерывно-дифференцируемая по обоим аргументам, которая вдоль любой интегральной кривой принимает постоянное значение, называется первым интегралом.

Заметим, что это определение относят чаще к системам дифференциальных уравнений. Здесь мы его привели, чтобы подчеркнуть отличие от общего интеграла: в отличие от общего интеграла $\Phi(x, y, c) = 0$ первый интеграл разрешен относительно произвольной постоянной $U(x, y) = c$. Первых интегралов существует бесчисленное множество, поскольку любая функция от первого интеграла также будет первым интегралом

$$\Psi(U(x, y)) = \Psi(c) = c_1,$$

причем эти интегралы будут функционально независимы.

Пусть функция $U(x,y)$ известна. Как получить любое частное решение уравнения (1)? Зададимся начальным значением (x_0,y_0) и сосчитаем из (3) $c_0 = U(x_0,y_0)$. Тогда утверждается, что частное решение дифференциального уравнения (1) можно найти, разрешив относительно y уравнение

$$U(x,y) = c_0. \tag{4}$$

Уравнение (4) определяет неявно y как функцию x (или x как функцию y). Для этого необходимо, чтобы $\partial U(x_0,y_0)/\partial y \neq 0$, т.е. $N(x_0,y_0) \neq 0$, либо $\partial U(x_0,y_0)/\partial x \neq 0$, т.е. $M(x_0,y_0) \neq 0$. Может случиться, что в т.(x_0,y_0): $M(x_0,y_0) = N(x_0,y_0) = 0$. Подобные точки называются особыми, и мы их пока изучать не будем. Допустим, что $N(x_0,y_0) \neq 0$. Тогда по теореме о существовании неявного решения уравнение (4) определяет функцию $y = \varphi(x)$, причем $\varphi(x_0) = y_0$. Докажем, что эта функция является решением дифференциального уравнения (1).

Подставляя в равенство (4) $y = \varphi(x)$, имеем:

$$U(x,\varphi(x)) \equiv c_0.$$

Продифференцируем обе части тождества по x

$$\frac{\partial U(x,\varphi(x))}{\partial x}dx + \frac{\partial U(x,\varphi(x))}{\partial y}d\varphi(x) \equiv 0$$

или в силу (2)

$$M(x,\varphi(x))\,dx + N(x,\varphi(x))\,d\varphi(x) \equiv 0. \qquad \boxtimes$$

Таким образом, если функция $U(x,y)$ известна, то мы можем получить все частные решения уравнения (1).

Возникает вопрос: какому условию должны удовлетворять функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$, чтобы выражение $Mdx + Ndy$ являлось полным дифференциалом некоторой функции ?

Необходимость.

Предположим $\exists U(x,y)$ такая, что $dU = Mdx + Ndy$, т.е. выполнены равенства (2):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N.$$

Но, тогда

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

В силу непрерывности частных производных $\partial M/\partial y$ и $\partial N/\partial x$, которую мы предположили, имеем:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \qquad \boxtimes \tag{5}$$

Достаточность.

Построим функцию U, исходя из условий (2),(5).

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x,y) \Longrightarrow U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \Psi(y),$$

где y - параметр. Чтобы определить неизвестную $\Psi(y)$, нужно использовать второе условие в (2)

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \frac{d\Psi}{dy} =$$

и поскольку $\partial M/\partial y$ непрерывна

$$= \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx + \frac{d\Psi}{dy}.$$

В соответствии с условием (5) имеем далее

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}dx + \frac{d\Psi}{dy}$$

или, согласно (2),

$$N(x,y) = N(x,y) - N(x_0,y) + \frac{d\Psi}{dy} \Longrightarrow \Psi'(y) = N(x_0,y).$$

В результате,

$$\Psi(y) = \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy.$$

Таким образом, мы нашли (построили) функцию $U(x,y)$:

$$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy. \qquad \boxtimes \tag{6}$$

6.Интегрирующий множитель.

Условие (5) не всегда выполняется, поэтому можно пытаться преобразовать уравнение (1) так, чтобы условие стало справедливым. Предположим, что уравнение (1) не является уравнением в полных дифференциалах, т.е.

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Поставим задачу: найти такую функцию $\mu(x,y)$, при умножении на которую левая часть уравнения (1) превращается в полный дифференциал некоторой функции. Существует ли такая функция ? Интегрирующим множителем как раз и называют указанную функцию $\mu(x,y)$. Докажем ряд теорем об интегрирующем множителе.

Теорема 1. О существовании интегрирующего множителя.

Если дифференциальное уравнение (1) имеет первый интеграл, то интегрирующий множитель существует.

Доказательство.

Предположим, что существует непрерывно-дифференцируемая функция $U(x,y)$, для которой выражение $U(x,y)=c$ определяет все решения уравнения (1). Возьмем дифференциал от обеих частей выражения

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial U}{\partial x}\underline{dx}+\frac{\partial U}{\partial y}\underline{dy}=0 \\ M\underline{dx}+N\underline{dy}=0 \end{array} \right| .$$

Будем рассматривать это как систему уравнений с двумя неизвестными: dx и dy. Система однородна и поэтому имеет не нулевое решение, когда ее определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ M & N \end{vmatrix}=0.$$

Отсюда,

$$\frac{U'_x}{M}=\frac{U'_y}{N}.$$

Обозначая это отношение за $\mu(x,y)$, придем к

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\mu M, \quad \frac{\partial U}{\partial y}=\mu N,$$

т.е. если уравнение (1) умножить на $\mu(x,y)$, то его левая часть превратится в dU: $dU=\mu(Mdx+Ndy)$. Выражение для $\mu(x,y)$ находится, поскольку $U(x,y)$ известна. ⊠

Теорема 2.

Число интегрирующих множителей бесконечно.

Доказательство.

Пусть известен интегрирующий множитель $\mu(x,y)$ такой, что при умножении на него левая часть уравнения превращается в $dU=\mu(Mdx+Ndy)$. Умножим это выражение на произвольную непрерывную функцию $\varphi(U(x,y))$. Тогда получим

$$\varphi(U)\,dU=d\underbrace{\int\varphi(U)\,dU}_{V}=\varphi(U)\,\mu(Mdx+Ndy)$$

или

$$dV=\varphi(U)\,\mu(Mdx+Ndy).$$

Это означает, что $\varphi(U)\,\mu$ также интегрирующий множитель

$$\mu_1=\varphi(U)\,\mu. \quad ⊠ \tag{7}$$

Теорема 3.

Любой интегрирующий множитель уравнения (1) имеет вид (7).

Доказательство.

Пусть имеются два интегрирующих множителя $\mu(x,y)$ и $\mu_1(x,y)$ уравнения (1), т.е.

$$dU = \mu(Mdx + Ndy),$$

$$dV = \mu_1(Mdx + Ndy).$$

Эти уравнения эквивалентны тому, что

$$U'_x = \mu M, \quad U'_y = \mu N, \quad V'_x = \mu_1 M, \quad V'_y = \mu_1 N.$$

Поскольку

$$\frac{U'_x}{V'_x} = \frac{U'_y}{V'_y} = \frac{\mu}{\mu_1},$$

то якобиан

$$\begin{vmatrix} U'_x & U'_y \\ V'_x & V'_y \end{vmatrix} \equiv \frac{D(U,V)}{D(x,y)} \equiv 0.$$

Последнее означает, что между функциями $U(x,y)$ и $V(x,y)$ существует функциональная зависимость: $\Phi(U,V) = 0$. Поскольку мы исключили особые точки, это уравнение можно разрешить как относительно U, так и относительно V. Пусть, например, $V = \varphi(U)$. Тогда $dV = \varphi'(U)\,dU$. Отсюда $\mu_1 = \varphi'(U)\,\mu$. ⊛

Теорема 4.

Если известны два существенно различных (т.е. не отличающихся на постоянный множитель) интегрирующих множителя, то первый интеграл уравнения (1) можно получить без квадратур.

Доказательство.

Пусть имеются два существенно различных интегрирующих множителя μ и μ_1. Тогда, по теореме 2 (см.(7))

$$\frac{\mu_1}{\mu} = \varphi(U) = V-$$

некоторый первый интеграл дифференциального уравнения (1). Действительно, поскольку $U = c$, то $V = \varphi(U) = \varphi(c) = c_1$. ⊛

ЛЕКЦИЯ 5

Некоторые способы нахождения интегрирующего множителя.

Рассмотрим уравнение
$$Mdx + Ndy = 0.$$
Требуется найти такую функцию $\mu(x, y)$, что
$$\mu(Mdx + Ndy) = dU.$$
Для того, чтобы это выражение было полным дифференциалом, необходимо и достаточно, чтобы
$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$
или
$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x} \Longrightarrow \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} \Longrightarrow$$
$$N\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} - M\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{1}$$
В общем случае, как видно из (1), для определения интегрирующего множителя $\mu(x, y)$ необходимо решать уравнение *в частных производных*. В отдельных случаях удается найти интегрирующий множитель частного вида. Поищем множитель в виде $\mu = \mu(x)$. Тогда,
$$\frac{d\ln\mu}{dx} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)/N.$$
Если правая часть зависит только от x, то существует интегрирующий множитель, зависящий только от x. Аналогично для $\mu = \mu(y)$. Можно искать множитель в виде: $\mu = \mu(x \pm y), \mu = \mu(xy), \mu = \mu(y/x)$ и т.д. Иногда удается разбить уравнение на группы и искать интегрирующий множитель для каждой группы отдельно. Например,
$$(M_1dx + N_1dy) + (M_2dx + N_2dy) = 0.$$
Пусть для первой группы интегрирующий множитель - μ_1 и U_1 такая функция, что $dU_1 = \mu_1(M_1dx + N_1dy)$, а для второй группы это соответственно μ_2 и U_2. Тогда для первой группы общий вид всех интегрирующих множителей в соответствии с доказанной теоремой таков: $\varphi_1(U_1)\mu_1$, а для второй - $\varphi_2(U_2)\mu_2$. Если удается подобрать φ_1 и φ_2 так, чтобы $\varphi_1(U_1)\mu_1 = \varphi_2(U_2)\mu_2 = \mu$, то μ и есть искомый интегрирующий множитель.

Пример.

Найдем решение следующего уравнения в дифференциалах:
$$\left(\frac{y}{x} + 3x^2\right)dx + \left(1 + \frac{x^3}{y}\right)dy = 0.$$

Разобьем левую часть на две группы

$$\left(\frac{y}{x}dx + dy\right) + \left(3x^2dx + \frac{x^3}{y}dy\right) = 0.$$

Тогда, очевидно, для первой группы: $\mu_1 = x, U_1 = xy$, а общий вид интегрирующего множителя - $x\varphi_1(xy)$, а для второй - $\mu_2 = y, U_2 = x^3y$, а общий вид множителя - $y\varphi_2(x^3y)$. Легко видеть, что при $\varphi_1(U) = U^2, \varphi_2(U) = U$: $x(xy)^2 = y(x^3y)$. Значит, искомый множитель $\mu = x^3y^2$. В результате,

$$(xy)^2 d(xy) + \left(x^3y\right) d\left(x^3y\right) = 0 \Longrightarrow \frac{(xy)^3}{3} + \frac{\left(x^3y\right)^2}{2} = c.$$

Пример.

Согласно *первому закону термодинамики* имеет место закон сохранения энергии для тепловых процессов

$$dQ = dU + pdV,$$

где dQ - количество теплоты, пришедшей в систему, dU - приращение внутренней энергии газа, pdV - работа газа.

Поскольку работа газа не является полным дифференциалом, а dU - полный дифференциал, то dQ также не есть полный дифференциал. Оказывается, если ввести новую физическую величину - *энтропию* S как функцию состояния газа через $dS = dQ/T$ при *равновесном процессе*, то первый закон термодинамики перепишется в виде

$$dS = \frac{1}{T}(dU + pdV).$$

Оказывается dS - полный дифференциал, значит $1/T$ - интегрирующий множитель (T - *абсолютная температура* газа).

7.Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной.

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{2}$$

Предположим, что $f(x, y)$ непрерывна по обоим аргументам в некоторой односвязной области $G \subset \Re^2$, содержащей начальные значения (x_0, y_0), т.е. точку $M(x_0, y_0)$. Всегда можно выбрать прямоугольник D с центром в т.$M(x_0, y_0)$, целиком лежащий в G, с шириной $2a$ и высотой $2b$. Далее всегда будем рассматривать прямоугольник $D : \{|x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}$. Докажем следующую важную теорему.

Теорема (Коши).

Пусть: 1) функция $f(x, y)$ непрерывна по обоим аргументам в прямоугольнике $D : \{|x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}$,

2) удовлетворяет в нем условию Липшица относительно y, т.е. $\exists N > 0 : \forall x, y_1, y_2 \in D :$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le N |y_1 - y_2|,$$

причем постоянная N не зависит от x.

Тогда существует единственное решение уравнения (2) $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее начальному условию

$$\varphi(x_0) = y_0 \tag{3}$$

и определенное при $|x - x_0| \le h \quad (h \le a)$. Постоянная h будет определена в ходе доказательства.

Перед доказательством теоремы дадим некоторые пояснения и сформулируем несколько предложений.

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ *условию Липшица*, если $\exists N > 0$, что для $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le N |x_1 - x_2|.$$

Геометрически это означает, что тангенс угла наклона секущей по модулю не превышает числа $N : |\tan\alpha| \le N$. Значит, кривая достаточно плавно меняется на отрезке $[a, b]$.

Заметим, что входящее в посылку теоремы условие Липшица можно заменить более сильным. Предположим, что в прямоугольнике D существует ограниченная частная производная функции $f(x, y)$:

$$\left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right| \le N.$$

Тогда, по формуле конечных приращений Лагранжа

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = \frac{\partial f(x, y_2 + \theta(y_1 - y_2))}{\partial y}(y_1 - y_2) \quad (0 < \theta < 1),$$

и поэтому

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le N |y_1 - y_2|.$$

Сформулированная теорема существования носит локальный характер. Условие непрерывности $f(x, y)$ обеспечивает существование решения (теорема Пеано), условие Липшица обеспечивает не только существование решения, но и его единственность. Заметим, что оба условия являются достаточными, но не необходимыми.

Предложение I. Дифференциальное уравнение (2) вместе с начальным условием (3) эквивалентно *интегральному уравнению*

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx. \tag{4}$$

Доказательство: $\boxed{\Longrightarrow}$ пусть функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (2)

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)) \tag{5}$$

и начальному условию (3):

$$\varphi(x_0) = y_0.$$

Интегрируя тождество (5) в пределах от x_0 до x, имеем:

$$\int_{x_0}^{x} \varphi'(x)\, dx \equiv \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\, dx$$

или

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \equiv \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\, dx.$$

Тогда, в силу (3)

$$\varphi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\, dx. \tag{6}$$

Значит, функция $y = \varphi(x)$ есть и решение интегрального уравнения (4). ⊠

$\boxed{\Longleftarrow}$ Обратно, пусть $y = \varphi(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (4). Тогда имеет место тождество (6). Полагая в нем $x = x_0$, получаем $\varphi(x_0) = y_0$ (начальное условие). Дифференцируя (6) по x, находим:

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)). \qquad ⊠$$

Предложение II. **Определение.** Закон, по которому каждой функции φ из некоторого класса ставится в соответствие функция ψ некоторого (другого) класса, называется *оператором* $\hat{A}$

$$\psi = \hat{A}\varphi.$$

Над функцией $\varphi(x)$, определенной и непрерывной на отрезке $|x - x_0| \le a$ с областью изменения $|\varphi(x) - y_0| \le b$, т.е. из класса $\mathbf{C}_a$, проделаем операцию

$$y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\, dx,$$

которая в указанном прямоугольнике D имеет смысл. В результате получим новую функцию

$$\hat{A}\varphi = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\, dx.$$

На языке введенного оператора решением интегрального уравнения (4) будет функция, которая удовлетворяет равенству (см.(6))

$$\varphi = \hat{A}\varphi.$$

В этом случае говорят, что решением дифференциального уравнения (2) является *неподвижная точка* оператора $\hat{A}$.

Предложение III. Нормой функции $\varphi(x)$ назовем

$$\|\varphi(x)\| = \max_{|x - x_0| \le a} |\varphi(x)|.$$

Две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из класса $\mathbf{C}_a$ равны, если $\|\varphi(x) - \psi(x)\| = 0$.

ЛЕКЦИЯ 6

Доказательство:

Сузим класс функций $\varphi(x)$ так, чтобы функции $\hat{A}\varphi$ принадлежали тому же классу. Дело в том, что функция $\psi(x) = \hat{A}\varphi(x)$ будет непрерывна, дифференцируема, но условие $|\psi(x) - y_0| \le b$ может не выполняться. Уменьшим интервал изменения $|x - x_0|$ так, чтобы $|\psi(x) - y_0| \le b$. Новый прямоугольник $\{|x - x_0| \le h, |y - y_0| \le b\}$ обозначим через D_h.

Выберем число h таким образом, чтобы выполнялись условия:

а) $\left|\hat{A}\varphi - y_0\right| \le b$ для $\forall x : |x - x_0| \le h$;

б) для $\forall \varphi(x), \psi(x)$ класса $\mathbf{C}_h$ (определенных и непрерывных на отрезке $|x - x_0| \le h$)

$$\left\|\hat{A}\varphi - \hat{A}\psi\right\| \le K \|\varphi - \psi\|, \tag{1}$$

где K - некоторое число ($0 < K < 1$). Оператор, удовлетворяющий условию (1), называется *сжимающим*.

Оценим величину в левой части неравенства а). В силу непрерывности $f(x, y)$ на D_h - $\exists M > 0 : \forall (x, y) \in D_h : |f(x, y)| \le M$, и мы имеем следующую цепочку неравенств:

$$\left|\hat{A}\varphi - y_0\right| = \left|y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\, dx - y_0\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, \varphi(x))|\, dx\right| \le M |x - x_0| \le Mh \le b.$$

Отсюда, $h \le b/M$ и должно выполняться $h \le a$.

Из условия б) имеем:

$$\left|\hat{A}\varphi - \hat{A}\psi\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\, dx - \int_{x_0}^{x} f(x, \psi(x))\, dx\right| \le$$

$$\le \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, \varphi(x)) - f(x, \psi(x))|\, dx\right| \le$$

по условию Липшица

$$\le N \left|\int_{x_0}^{x} |\varphi(x) - \psi(x)|\, dx\right| \le N \|\varphi - \psi\| |x - x_0| \le Nh \|\varphi - \psi\|.$$

Поскольку это неравенство справедливо для $\forall x : |x - x_0| \le h$, то и

$$\left\|\hat{A}\varphi - \hat{A}\psi\right\| \le Nh \|\varphi - \psi\|.$$

Выберем h из условия $Nh < 1$, т.е. $h < 1/N$.

Итак, будем считать в дальнейшем, что h удовлетворяет одновременно трем условиям:

$$h \leq \frac{b}{M}, \quad h \leq a, \quad h < \frac{1}{N}. \tag{2}$$

Теперь можно взять число K такое, что $Nh < K < 1$.

Применим далее для доказательства *метод последовательных приближений*. Будем строить последовательные приближения к решению как

$$\varphi_0 = y_0; \quad \varphi_1 = \hat{A}\varphi_0; \quad \varphi_2 = \hat{A}\varphi_1; \ldots; \quad \varphi_n = \hat{A}\varphi_{n-1}; \ldots,$$

где

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, \varphi_{n-1}(x))\, dx.$$

Докажем, что построенная нами *функциональная последовательность* $\{\varphi_n(x)\}$ равномерно сходится на отрезке $|x - x_0| \leq h$.

Определение. Функциональная последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ называется *равномерно сходящейся* к функции $\varphi(x)$ на отрезке $|x - x_0| \leq h$, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N, \forall x : |x - x_0| \leq h : |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

Заменим вопрос равномерной сходимости функциональной последовательности вопросом равномерной сходимости эквивалентного ей *функционального ряда*:

$$\varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + (\varphi_2 - \varphi_1) + \ldots + (\varphi_n - \varphi_{n-1}) + \ldots =$$

$$= \varphi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n - \varphi_{n-1}). \tag{3}$$

В самом деле. Сумма первых n членов построенного ряда (n-я частичная сумма) равна:

$$S_n(x) = \varphi_n(x).$$

Поэтому вопрос существования предела $S_n(x)$ при $n \to \infty$ (сходимости ряда) эквивалентен сходимости последовательности $\{\varphi_n(x)\}$. В то же время, для проверки равномерной сходимости ряда существует эффективно применяемый на практике достаточный признак Вейерштрасса.

Признак Вейерштрасса.

Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на отрезке $|x - x_0| \leq h$, если $|u_n(x)| \leq a_n$ для $\forall n \in \mathbf{N}$ и $\forall x : |x - x_0| \leq h$, и при этом числовой (мажорирующий) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Оценим по норме члены нашего функционального ряда.

$$\|\varphi_2 - \varphi_1\| = \left\|\hat{A}\varphi_1 - \hat{A}\varphi_0\right\| \leq K \|\varphi_1 - \varphi_0\| = K \left\|\hat{A}\varphi_0 - y_0\right\| \leq Kb;$$

$$\|\varphi_3 - \varphi_2\| = \left\|\hat{A}\varphi_2 - \hat{A}\varphi_1\right\| \le K\|\varphi_2 - \varphi_1\| \le K^2 b; \ldots; \|\varphi_{n+1} - \varphi_n\| \le K^n b.$$

Поскольку

$$|\varphi_{n+1} - \varphi_n| \le \|\varphi_{n+1} - \varphi_n\| \le K^n b,$$

то члены функционального ряда (3) не превосходят членов числового ряда

$$b + bK + bK^2 + \ldots + bK^n + \ldots = b\sum_{n=0}^{\infty} K^n. \qquad (4)$$

Числовой ряд (4) сходится, поскольку он представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $K < 1$. Тогда по признаку Вейерштрасса функциональный ряд (3) сходится равномерно.

Воспользуемся теперь свойством равномерно сходящегося функционального ряда: сумма этого ряда является непрерывной функцией на отрезке равномерной сходимости: $|x - x_0| \le h$. Таким образом, и ряд (3) и последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ сходятся к одной и той же непрерывной на отрезке $|x - x_0| \le h$ функции $\varphi(x)$.

Поскольку $|\varphi_n - y_0| \le b$, то, переходя в этом неравенстве к пределу $n \to \infty$, имеем: $|\varphi(x) - y_0| \le b$, т.е. $\varphi(x) \in \mathbf{C}_h$. Теперь надо доказать, что полученная функция $\varphi(x)$ является решением интегрального уравнения

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx.$$

Оценим $\left\|\hat{A}\varphi - \hat{A}\varphi_n\right\|$.

$$\left\|\hat{A}\varphi - \hat{A}\varphi_n\right\| \le K\|\varphi - \varphi_n\| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \hat{A}\varphi_n = \hat{A}\varphi.$$

Переходя в соотношении $\varphi_n = \hat{A}\varphi_{n-1}$ к пределу при $n \to \infty$, имеем

$$\varphi = \hat{A}\varphi.$$

Таким образом, функция $\varphi(x)$ является решением интегрального уравнения на отрезке $|x - x_0| \le h$, т.е. решением исходного дифференциального уравнения. Существование решения доказано.

Докажем теперь единственность решения. Предположим, что существуют два решения дифференциального уравнения $y = \varphi(x), \quad r_1 < x < r_2$ и $y = \psi(x), \quad s_1 < x < s_2$, удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям: $\varphi(x_0) = y_0, \psi(x_0) = y_0$, причем $\varphi(x) \ne \psi(x)$. Покажем, что в общей части эти решения совпадают.

Докажем, прежде всего, что эти решения совпадают на отрезке $|x - x_0| \le h$, где: $h \le a, \quad h \le b/M, \quad h < 1/N, \quad [x_0 - h, x_0 + h] \subset ((r_1, r_2) \cap (s_1, s_2))$. Поскольку $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - решения интегрального уравнения, то: $\varphi = \hat{A}\varphi, \quad \psi = \hat{A}\psi$. Поэтому,

$$\|\varphi - \psi\| = \left\|\hat{A}\varphi - \hat{A}\psi\right\| \le K\|\varphi - \psi\|, \quad (0 < K < 1).$$

Этому неравенству можно удовлетворить лишь при $\|\varphi - \psi\| = 0$. Отсюда $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ при $|x - x_0| \leq h$.

Обозначим за x_1 такую точку $x_1 > x_0$, что для всех $x_0 < x \leq x_1 : \varphi(x) \equiv \psi(x)$, а для $x > x_1 : \varphi(x) \neq \psi(x)$. Например, $x_1 = x_0 + h$. Тогда точку $(x_1, \varphi(x_1))$ можно принять за начальную, с центром в этой точке построить прямоугольник D_1, для него найти h_1, которое фигурирует в теореме существования. В результате, по доказанному ранее $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ для $|x - x_1| \leq h_1$ и т.д. В итоге, в области пересечения интервалов (r_1, r_2) и (s_1, s_2) решения совпадают. Значит, решение единственно. ⊠

Пример. Приведем пример на метод последовательных приближений, примененный при доказательстве теоремы существования и единственности. Рассмотрим дифференциальное уравнение
$$\frac{dy}{dx} = y$$
с начальной точкой $(0, 1)$. Ему эквивалентно интегральное уравнение:
$$y = 1 + \int_0^x y dx.$$
Строим последовательные приближения:
$$\varphi_0 = 1; \quad \varphi_1 = 1 + \int_0^x 1 \cdot dx = 1 + x;$$
$$\varphi_2 = 1 + \int_0^x (1 + x)\, dx = 1 + x + \frac{x^2}{2};$$
$$\varphi_3 = 1 + \int_0^x \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) dx = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}; \ldots;$$
$$\varphi_n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$
Тогда, предельная функция
$$\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Проверим, что получено решение исходного уравнения.
$$\frac{dy}{y} = dx \Longrightarrow \ln y = x + \ln c \Longrightarrow y = ce^x.$$
Из начального условия: $1 = ce^0 \longrightarrow c = 1$. Таким образом, решение дифференциального уравнения действительно $y = e^x$.

ЛЕКЦИЯ 7

Замечание. Доказанная теорема носит локальный характер. Показано, что решение $y = \varphi(x)$ существует при $|x - x_0| \le h$, где: $h \le a, \quad h \le b/M, \quad h < 1/N$ (N - постоянная Липшица). Как получить решение во всей области, где выполняется условие Липшица ? Применяется метод продолжения решения.

Берем т.$A\left(x_0 + h, \varphi\left(x_0 + h\right)\right)$ и с центром в ней строим прямоугольник D_1, целиком лежащий в G. Для него находим $a_1, \quad b_1, M_1, N_1$ и по теореме существования определяем h_1. В данном прямоугольнике D_1 найдем решение $y = \psi(x)$, определенное при $|x - (x_0 + h)| \le h_1$, т.е. при $x_0 + h - h_1 \le x \le x_0 + h + h_1$. Решения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ совпадают на некотором участке. По теореме единственности они совпадают всюду, где определены. Построенная функция $\psi(x)$ будет продолжением решения $\varphi(x)$.

Определение. Пусть имеются два решения дифференциального уравнения $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям: $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$. Пусть также $\varphi(x)$ определено при $r_1 < x < r_2$, а $\psi(x)$ при $s_1 < x < s_2$, причем $(r_1, r_2) \subset (s_1, s_2)$. Тогда решение $y = \psi(x)$ называется *продолжением* решения $y = \varphi(x)$.

Непродолжаемым называется такое решение, которое является продолжением любого другого решения.

Рассмотрим множество всех решений, удовлетворяющих одним и тем же начальным условиям (x_0, y_0). Каждое решение имеет свой интервал определения. Пусть R_1 - множество левых концов этих интервалов, а R_2 - множество правых концов, причем $m_2 = \sup R_2$; $m_1 = \inf R_1$ (может быть $m_2 = +\infty$; $m_1 = -\infty$). Необходимо построить решение $y = \varphi(x)$, определенное в интервале (m_1, m_2) и удовлетворяющее начальному условию $\varphi(x_0) = y_0$.

Пусть $x_0 < x^* < m_2$. Согласно определению m_2, $\exists$ решение $\psi(x)$, которое определено при $x = x^*$. Вычислим $\psi(x^*)$ и положим $\varphi(x^*) = \psi(x^*)$. В силу теоремы единственности выбранное значение $\varphi(x^*)$ не зависит от выбора функции $\psi(x)$. Аналогично можно определить $\varphi(x)$ для аргументов x^* таких, что $m_1 < x^* < x_0$. Тем самым, построенная $\varphi(x)$ определена при $m_1 < x < m_2$. К тому же она является решением, т.к. в каждой точке ее значение совпадает с одним из решений. В силу определения m_1 и m_2 данное решение не продолжаемо. В силу теоремы единственности оно единственно.

Теорема.

Непродолжаемое решение примыкает к границе области.

Доказательство.

Предположим, что в области G правая часть дифференциального уравнения - $f(x, y)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по y. Выбрана т.(x_0, y_0) и определено непродолжаемое решение $\varphi(x)$, $m_1 < x < m_2$. Покажем, что каково бы ни было замкнутое множество $F \subset G$, $\exists$ числа r_1, r_2 ($m_1 < r_1 < r_2 < m_2$) такие, что для $\forall x \notin [r_1, r_2]$ точка $(x, \varphi(x)) \notin F$.

Определение. *Расстоянием между точечными множествами* A и B называется величина

$$d = \inf_{M \in A, P \in B} \rho(M, P),$$

где $\rho(M, P)$ - расстояние между точками M и P.

Обозначим через ρ расстояние между множествами $E_2 \backslash G$ и F (E_2 - евклидова плоскость). Определим замкнутое множество F^* как множество точек, расстояние которых от множества F не превышает $\rho/2$. Тогда, $F^* \subset G$. В силу непрерывности функции $f(x, y)$, стоящей в правой части дифференциального уравнения: $\exists M > 0 : |f(x, y)| \leq M$ для $\forall (x, y) \in F^*$. Выберем постоянную Липшица N так, чтобы неравенство

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq N |y_2 - y_1|$$

выполнялось для $\forall (x, y_1), (x, y_2) \in F^*$. Выберем a и b таким образом, чтобы $a^2 + b^2 \leq \rho^2/4$. Далее, как обычно, выберем параметр h из условий: $h \leq a, \quad h \leq b/M, \quad h < 1/N$. Это h будет одно и то же для всех точек множеств F^* и $F \subset F^*$. Покажем, что т.$(x, \varphi(x))$ при $\forall x > m_2 - h$ выходит за пределы множества F. *"От противного"*. Предположим, что $\exists \bar{x} > m_2 - h$ такое, что т.$(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) \in F$. Тогда эту точку можно принять за начальную и определить решение при всех $x : |x - \bar{x}| \leq h$, т.е. при $\bar{x} - h \leq x \leq \bar{x} + h$. Но $\bar{x} + h > m_2$, следовательно, наше решение $\varphi(x)$ определено при $x > m_2$. Но m_2 - точная верхняя грань правых концов интервалов, где существует решение. Пришли к противоречию. ⊛

8. Непрерывная зависимость решения дифференциального уравнения от начальных условий и от параметров.

До сих пор мы исследовали решение дифференциального уравнения, когда фиксируется некоторая начальная точка (x_0, y_0), через которую должно проходить это решение. Если изменить точку и взять $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$, то изменится и решение. Поэтому непродолжаемое решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

определенное при $m_1 < x < m_2$, будет зависеть еще и от координат начальной точки: $y = \varphi(x, x_0, y_0)$. Вообще говоря, и значения m_1, m_2 также зависят от (x_0, y_0), т.е. $m_1 = m_1(x_0, y_0), m_2 = m_2(x_0, y_0)$. Таким образом, формула

$$y = \varphi(x, x_0, y_0) \tag{2}$$

исчерпывает все возможные непродолжаемые решения уравнения (1), т.е. дает общее решение дифференциального уравнения. В свете вышесказанного, возникает важный для практических приложений вопрос: как будет меняться решение (2) при изменении начальных условий ? Дело в том, что в физике значение y_0 находится обычно путем экспериментального измерения. Поэтому возникают незначительные погрешности с заданием начальных условий, и если они приведут к сильному изменению решения дифференциального уравнения, то это неприемлемо - придется менять математическую модель явления.

На поставленный нами вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема.

Множество точек (x, x_0, y_0), в котором определено общее решение (2) уравнения (1), является открытым, и решение (2) представляет собой непрерывную функцию по совокупности аргументов на этом множестве.

Без доказательства.

Укажем на одно следствие сформулированной теоремы. При $\forall x_1, x_2 : m_1 (x_0, y_0) < x_1 < x_2 < m_2 (x_0, y_0)$ и $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta = \delta (\varepsilon) > 0 : \forall \bar{x}_0, \bar{y}_0 : |x_0 - \bar{x}_0| < \delta, |y_0 - \bar{y}_0| < \delta :$

$$|\varphi (x, x_0, y_0) - \varphi (x, \bar{x}_0, \bar{y}_0)| < \varepsilon$$

для $\forall x \in [x_1, x_2]$.

Сформулированная теорема доказывается с помощью еще более мощной теоремы. Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f (x, y, \mu), \tag{3}$$

где μ - некоторый параметр, а функция $f (x, y, \mu)$ определена в трехмерной области S. Предположим, что $f (x, y, \mu)$ непрерывно-дифференцируема по совокупности аргументов в S и удовлетворяет условию Липшица

$$|f (x, y_2, \mu) - f (x, y_1, \mu)| \leq N |y_2 - y_1| \tag{4}$$

равномерно относительно x и μ (N не зависит от x, μ) для $\forall (x, y_1, \mu), (x, y_2, \mu) \in S$.

Зададимся фиксированным начальным условием (x_0, y_0). Пусть при $x = x_0, \quad y = y_0$ параметр μ изменяется от μ_1 до μ_2 в области $S : \mu \in (\mu_1, \mu_2)$. Совершенно ясно, что решение $y = \varphi (x)$ дифференциального уравнения (3), удовлетворяющее начальному условию $y_0 = \varphi (x_0)$, будет зависеть от параметра μ. Если зададим $\mu = \mu^*$, то решение $y = \varphi (x, \mu^*)$ будет представлять кривую в плоскости σ. Непродолжаемое решение определено при $m_1 < x < m_2$. Ясно, что границы m_1 и m_2 зависят от μ. Спрашивается: каково множество, в котором определено решение $\varphi (x, \mu)$? Оказывается, это множество открытое !

Теорема.

Если правая часть дифференциального уравнения (3) непрерывна в области S и удовлетворяет условию Липшица (4), то решение $y = \varphi (x, \mu)$, удовлетворяющее фиксированным начальным условиям (x_0, y_0), определено в открытой области T и непрерывно в этой области по своим аргументам.

Без доказательства.

На математическом языке сформулированная теорема означает, что если $(x^*, \mu^*) \in T$, то все достаточно близкие точки (x, μ) также принадлежат области T и $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta = \delta (\varepsilon) > 0 : \forall (x, \mu) \in T, |x - x^*| < \delta, |\mu - \mu^*| < \delta :$

$$|\varphi (x, \mu) - \varphi (x^*, \mu^*)| < \varepsilon.$$

Заметим, что доказанная теорема будет справедлива, если в уравнение (3) будет входить несколько параметров.

ЛЕКЦИЯ 8

9.Простые особые точки. Особые решения.

Что будет, если не выполняются условия теоремы единственности ? Пусть в уравнении
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$
в некоторой точке $(\bar{x}, \bar{y}) : f(\bar{x}, \bar{y}) = \infty$. Тогда можно рассмотреть уравнение
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}. \tag{2}$$
Если доопределить правую часть уравнения (2) в т.$(\bar{x}, \bar{y})$ нулем, если она будет непрерывна и удовлетворять условию Липшица, то через т.$(\bar{x}, \bar{y})$ будет проходить одна интегральная кривая с вертикальной касательной.

Часто на практике встречаются дифференциальные уравнения вида:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \tag{3}$$
Предположим, что в т.$(\bar{x}, \bar{y})$:
$$P(\bar{x}, \bar{y}) = Q(\bar{x}, \bar{y}) = 0. \tag{4}$$
Такие точки называются особыми точками типа $\frac{0}{0}$. Ограничимся пока примерами.

1.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}.$$
Для этого уравнения $(0, 0)$ - особая точка. Решая уравнение, имеем:
$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \Longrightarrow y = cx^2.$$
Таким образом, интегральными кривыми являются параболы. Оси координат также являются интегральными кривыми. Через особую точку $(0, 0)$ проходит бесконечное число интегральных кривых. Все интегральные кривые (за исключением $x = 0$) касаются прямой $y = 0$. Кривые с общей касательной образуют особую точку типа *узел*.

2.
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$
Решение уравнения дает:
$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0 \Longrightarrow xy = c.$$
Оси координат являются интегральными кривыми уравнения (они соответствуют $c = 0$). Через особую точку $(0, 0)$ здесь проходят две интегральные кривые. Такая

особая точка называется *седлом*, а проходящие через нее интегральные кривые - *сепаратрисами.*

3.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Решая данное уравнение с разделяющимися переменными, находим:

$$xdx + ydy = 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 = c^2.$$

В данной ситуации через особую точку $(0,0)$ не проходит ни одной интегральной кривой. Такую особую точку называют *центром.*

4.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}.$$

Уравнение является однородным, поэтому для его решения применяем замену функции: $y/x = z$. Тогда,

$$z + xz' = \frac{1+z}{1-z} \Longrightarrow xz' = \frac{1+z^2}{1-z} \Longrightarrow$$

$$\frac{(1-z)\,dz}{1+z^2} = \frac{dx}{x} \Longrightarrow \arctan z - \frac{1}{2}\ln\left(1+z^2\right) = \ln x - \ln c \Longrightarrow$$

$$\arctan\frac{y}{x} = \ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{c} \Longrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = c\exp\left\{\arctan\frac{y}{x}\right\}.$$

В полярных координатах решение записывается более просто

$$\rho = ce^{\varphi}.$$

Интегральными кривыми является семейство логарифмических спиралей. Спирали асимптотически приближаются к особой точке $(0,0)$, однако через начало координат ни одна спираль не проходит. Это особая точка типа *фокус.*

Здесь рассмотрены так называемые *простые* особые точки, их всего четыре типа. Заметим, что бывают еще *сложные* особые точки.

Мы проанализировали случай, когда нарушается условие существования решения (разрыв правой части уравнения). Рассмотрим теперь ситуацию, когда нарушается условие Липшица. Точки, подозрительные на нарушение условия Липшица (нарушение единственности решения), удовлетворяют условию: $\partial f/\partial y \longrightarrow \infty$.

Если кривая, определяемая уравнением

$$\frac{1}{f'_y(x,y)} = 0, \tag{5}$$

является интегральной, и если через каждую ее точку проходят, по крайней мере, две интегральные кривые, то соответствующее данной интегральной кривой решение уравнения (1) называется *особым*. Заметим, что условие $f'_y(x, y) = \infty$ не является необходимым для появления особого решения.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = (y - x)^{2/3} + 1.$$

Определим производную правой части по y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3}(y - x)^{-1/3}.$$

Геометрическим местом точек, где $f'_y = \infty$, будет прямая $y = x$ (биссектриса главного координатного угла). Проверим, является ли она интегральной кривой. Подставляя $y = x$ в дифференциальное уравнение, приходим к тождеству: $1 \equiv 1$.

Теперь решим само уравнение, применив замену переменной: $y - x = z$. Тогда,

$$1 + z' = z^{2/3} + 1 \Longrightarrow z' = z^{2/3} \Longrightarrow \frac{dz}{z^{2/3}} = dx \Longrightarrow$$

$$3z^{1/3} = x - c \Longrightarrow y = x + \frac{(x - c)^3}{27}.$$

Интегральные кривые представляют собой семейство кубических парабол. Точки перегиба парабол, определяемые из условия: $y'' = 0$, имеют координаты (c, c), т.е. лежат на прямой $y = x$. Таким образом, через любую точку прямой $y = x$ проходят две интегральные кривые - нарушается единственность решения. Интегральная кривая $y = x$ - особое решение рассматриваемого дифференциального уравнения.

10.Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной.

Уравнением первого порядка, не разрешенным относительно производной, называют дифференциальное уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0. \tag{6}$$

Рассмотрим сначала простые частные случаи уравнения (6).

1. Пусть функция F не зависит от x и y:

$$F(y') = 0. \tag{7}$$

Предположим, что это уравнение имеет действительные корни $k_1, k_2, \ldots$ Тогда, $y' = k_i; \quad i = 1, 2, \ldots$ Отсюда, $y = k_i x + c$ - прямые. Поскольку, $k_i = (y - c)/x$, то

$$F\left(\frac{y - c}{x}\right) = 0.$$

Это общий интеграл уравнения (7).

2. Пусть функция F не зависит от y:

$$F\left(x, y'\right)=0. \tag{8}$$

Не всегда это уравнение легко решается относительно y'. Если его удается разрешить, то $y'=\varphi(x)$ и

$$y=\int \varphi(x)\, dx+c.$$

Иногда удается подобрать две функции $x=\varphi(t), y'=\psi(t)$ такие, что

$$F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0.$$

Тогда уравнение (8) можно проинтегрировать в параметрической форме. В самом деле.

$$\frac{dy}{dx}=y' \Longrightarrow dy=y' dx=\psi(t)\, \varphi'(t)\, dt.$$

Откуда

$$\left\{\begin{array}{l}x=\varphi(t), \\ y=\int \psi(t)\, \varphi'(t)\, dt+c.\end{array}\right. \tag{9}$$

Уравнения (9) представляют собой общий интеграл уравнения (8) в параметрической форме. Действительно, если исключить параметр t, то получим общий интеграл.

Возникает вопрос: как находить на практике функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$? Иногда можно дать некоторые рекомендации. Пусть, например, имеем уравнение вида:

$$P\left(x, y'\right)+Q\left(x, y'\right)=0,$$

где P и Q - однородные многочлены относительно x и y' (степени однородности в общем случае разные).

<u>Пример</u>.

$$x^{3}+y'^{3}-3 x y'=0.$$

Применим параметризацию $y'=t x$. Заметим, что такую же параметризацию применяют в уравнении декартова листа: $x^{3}+y^{3}-3 a x y=0$. Тогда,

$$x^{3}+t^{3} x^{3}-3 x t x=0 \Longrightarrow x=\frac{3 t}{1+t^{3}}, \quad y'=\frac{3 t^{2}}{1+t^{3}}.$$

Отсюда,

$$dy=\frac{9 t^{2}}{1+t^{3}} \cdot \frac{\left(1+t^{3}\right)-3 t^{3}}{\left(1+t^{3}\right)^{2}} dt \Longrightarrow dy=\frac{9 t^{2}}{\left(1+t^{3}\right)^{3}}\left(1-2 t^{3}\right) dt.$$

Производя замену переменной $z=t^{3}$, вычисляем интеграл

$$y=3 \int \frac{(1-2 z)}{(1+z)^{3}} dz=3 \cdot(-2) \int \frac{dz}{(1+z)^{2}}+9 \int \frac{dz}{(1+z)^{3}}=$$

$$=\frac{6}{1+z}-\frac{9}{2(1+z)^{2}}+c=\frac{3}{2} \cdot \frac{1+4 z}{(1+z)^{2}}+c.$$

Окончательно,

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = \frac{3}{2} \cdot \frac{1+4t^3}{\left(1+t^3\right)^2} + c.$$

Предположим теперь, что уравнение (8) разрешается относительно x:

$$x = g\left(y'\right),$$

т.е. $F\left(g\left(y'\right), y'\right) \equiv 0$. В этом случае параметр ввести легко: $y' = h\left(t\right)$ - произвольная дифференцируемая функция. Тогда, $x = g\left(h\left(t\right)\right)$, и далее проводится интегрирование уравнения (8) в параметрической форме.

ЛЕКЦИЯ 9

3. Пусть, наконец, функция F не зависит от аргумента x:

$$F(y, y') = 0. \tag{1}$$

Если уравнение (1) разрешается относительно y', то далее все ясно - приходим к уравнению с разделяющимися переменными.

Надо поискать $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ такие, чтобы $y = \varphi(t)$, $y' = \psi(t)$ и $F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0$. Тогда,

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)}$$

и

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} + c, \\ y = \varphi(t), \end{cases}$$

- общий интеграл уравнения (1). Как найти $\varphi(t)$ и $\psi(t)$? Если уравнение (1) легко решается относительно y: $y = g(y')$ и

$$F(g(y'), y') \equiv 0.$$

Тогда можно взять $y' = h(t)$, $h(t)$ - произвольная дифференцируемая функция. В результате, $y = g(h(t))$ и далее по схеме.

Пример. Уравнение цепной линии.

В 1638 г. Галилей предложил следующий способ построения параболы. Возьмем цепочку, состоящую из мелких звеньев, и подвесим ее за края на одной высоте. При этом расстояние между точками подвеса меньше длины цепочки L. Далее проведем линию по границе провисшей цепочки. Галилей догадывался, что этот способ построения параболы не совсем точен.

Спрашивается, по какой же линии провисает цепочка ? Лишь спустя полвека Якоб Бернулли чисто теоретическим путем нашел точную формулу провисающей цепочки. Он сделал это в 1690 г. и призвал других решить ту же задачу. Правильное решение в 1691 г. опубликовали Гюйгенс, Лейбниц и братья Бернулли. Математический аппарат решения подобных задач возник в конце XVII века и получил название "Вариационного исчисления". Это наиболее красивая область математики, развитие которой позволило сформулировать вариационные принципы физики.

Один из таких принципов гласит: любая физическая система стремится занять в состоянии равновесия такое положение, в котором ее потенциальная энергия минимальна. Поэтому в задаче о провисающей цепочке надо найти потенциальную энергию цепочки и минимизировать ее. Подобная процедура приводит к дифференциальному уравнению 1-го порядка вида:

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = c.$$

Поскольку $y(0) = y_0, \quad y'(0) = 0$, то $c = y_0$. Полагаем

$$y' = \sinh t \Longrightarrow y = y_0 \cosh t \Longrightarrow dx = \frac{dy}{y'} = y_0 dt.$$

Отсюда,

$$x = y_0 t + c_1.$$

Из условий: $y = y_0$, $x = 0$ при $t = 0$, имеем: $c_1 = 0$. Поэтому окончательно

$$y = y_0 \cosh \frac{x}{y_0}.$$

4. Рассмотрим теперь уравнение общего вида

$$F\left(x, y, y'\right) = 0, \tag{2}$$

где функция F становится однородной относительно всех своих аргументов, если считать аргумент x измерения 1, аргумент y - измерения α, аргумент y' - измерения $(\alpha - 1)$, т.е.

$$F\left(\lambda x, \lambda^{\alpha} y, \lambda^{\alpha-1} y'\right) \equiv \lambda^m F\left(x, y, y'\right), \tag{3}$$

для $\forall x, y, y', \lambda$. Тогда, делая замену функции и аргумента: $x = e^t, y = ze^{\alpha t}$; t - новая независимая переменная, z - новая функция, находим:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}; \quad \frac{dx}{dt} = e^t \Longrightarrow \frac{dt}{dx} = e^{-t}.$$

Отсюда,

$$y' = \left(\frac{dz}{dt} + \alpha z\right) e^{\alpha t} e^{-t}.$$

Подставляя все в (2), (3), придем к:

$$F\left(e^t, ze^{\alpha t}, \left(\frac{dz}{dt} + \alpha z\right) e^{(\alpha-1)t}\right) \equiv e^{mt} F\left(1, z, \frac{dz}{dt} + \alpha z\right) = 0.$$

В этом уравнении отсутствует независимая переменная t, и оно принимает вид (1):

$$G\left(z, \frac{dz}{dt}\right) = 0,$$

которое решается указанным выше способом.

Общий случай введения параметра.

Рассмотрим снова уравнение (2) с функцией F общего вида. Предположим, что каким-то образом удалось представить

$$\begin{cases} x = \varphi\left(u, v\right) \\ y = \psi\left(u, v\right) \\ y' = \chi\left(u, v\right), \end{cases}$$

так что выполняется тождество по (u, v)

$$F\left(\varphi\left(u, v\right), \psi\left(u, v\right), \chi\left(u, v\right)\right) \equiv 0.$$

Покажем, что в этом случае удается перейти к уравнению, разрешенному относительно производной. В самом деле.

$$dy = y'dx \Longrightarrow \frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv = \chi\left(u,v\right)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right].$$

Пусть u - новая независимая переменная, а v - новая функция. Тогда,

$$\frac{dv}{du} = \frac{\partial\psi/\partial u - \chi\cdot\partial\varphi/\partial u}{\chi\cdot\partial\varphi/\partial v - \partial\psi/\partial v}. \tag{4}$$

Допустим, что мы нашли общее решение уравнения (4): $v = \omega\left(u,c\right)$. Тогда решение исходного уравнения (2) получается в виде:

$$\begin{cases} x = \varphi\left(u, \omega\left(u,c\right)\right), \\ y = \psi\left(u, \omega\left(u,c\right)\right). \end{cases}$$

Это общий интеграл уравнения (2) в параметрической форме.

Дифференциальные уравнения, разрешимые относительно x или y. Уравнения Лагранжа и Клеро.

Рассмотрим еще два частных случая, когда параметрическое представление получается просто. Пусть, например, уравнение (2) допускает представление в виде:

$$y = f\left(x, y'\right). \tag{5}$$

Тогда в качестве вышеупомянутых параметров можно выбрать x и $y' = p$, т.е.

$$\begin{cases} x = x, \\ y = f\left(x,p\right), \\ y' = p. \end{cases}$$

В результате из равенства: $dy = y'dx$ имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp = pdx$$

или

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p - \partial f/\partial x}{\partial f/\partial p}.$$

Решая уравнение, получим: $p = \omega\left(x,c\right)$. Таким образом, общее решение исходного уравнения (5) имеет вид:

$$y = f\left(x, \omega\left(x,c\right)\right).$$

В том случае, когда уравнение (2) допускает запись в виде

$$x = g\left(y, y'\right) \tag{6}$$

параметрами считаем y и $y' = p$, т.е.

$$\begin{cases} x = g\left(y, p\right), \\ y = y, \\ y' = p. \end{cases}$$

Тогда

$$dx = \frac{dy}{y'} \Longrightarrow \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial p} dp = \frac{dy}{p}.$$

Отсюда,

$$\frac{dp}{dy} = \frac{1/p - \partial g/\partial y}{\partial g/\partial p}.$$

Если мы получили решение уравнения в виде $p = \omega\left(y, c\right)$, то общее решение уравнения (6) таково

$$x = g\left(y, \omega\left(y, c\right)\right).$$

Пример.

Проанализируем уравнение вида

$$y = x\varphi\left(y'\right) + \psi\left(y'\right), \tag{7}$$

где φ и ψ - дифференцируемые функции. Данное уравнение, в которое переменные x и y входят линейно, носит название *уравнения Лагранжа.* Найдем общее решение данного уравнения. Обозначим $y' = p$. Тогда, $y = x\varphi\left(p\right) + \psi\left(p\right)$, и поэтому

$$dy = pdx = \varphi\left(p\right) dx + x\varphi'\left(p\right) dp + \psi'\left(p\right) dp. \tag{8}$$

Получилось линейное дифференциальное уравнение, если считать x - функцией, а p - независимой переменной:

$$\left[p - \varphi\left(p\right)\right] \frac{dx}{dp} - x\varphi'\left(p\right) = \psi'\left(p\right).$$

Может оказаться, что $p \equiv \varphi\left(p\right)$. Этот случай соответствует специальному уравнению Лагранжа, и мы рассмотрим его чуть позже. Предположим, что уравнение $p - \varphi\left(p\right) = 0$ имеет решения $p_1, p_2, \ldots$ Тогда при подстановке $p = p_i$ в уравнение (8) оно превращается в тождество. Значит

$$y = x\varphi\left(p_i\right) + \psi\left(p_i\right) \tag{9}$$

- интегральные прямые уравнения Лагранжа.

При $p \neq p_i$ имеем:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'\left(p\right)}{\varphi\left(p\right) - p} x = \frac{\psi'\left(p\right)}{p - \varphi\left(p\right)}. \tag{10}$$

Если применить методы решения линейных дифференциальных уравнений, то общее решение уравнения (10) можно записать в виде: $x = c\chi\left(p\right) + \omega\left(p\right)$. Вместе с выражением $y = x\varphi\left(p\right) + \psi\left(p\right)$ оно дает параметрическое представление искомого общего решения.

Проанализируем подробнее ситуацию, когда $p \equiv \varphi(p)$. В этом случае уравнение (7) превращается в

$$y = xy' + \psi(y'), \tag{11}$$

и носит название *уравнения Клеро*. Полагая $\varphi(p) = p$ в уравнении (8), придем к

$$[x + \psi'(p)]\, dp = 0.$$

Далее возможны два случая:

а) $dp = 0 \Longrightarrow p = c$, и тогда

$$y = xc + \psi(c) \tag{12}$$

- общее решение уравнения Клеро.

б) $x + \psi'(p) = 0$. Это уравнение определяет p как функцию $x : p = \omega(x)$. Тогда из (11) имеем:

$$y = x\omega(x) + \psi(\omega(x)). \tag{13}$$

Это будет также решение уравнения Клеро, причем особое. В каждой его точке нарушается единственность. В самом деле. Продифференцируем (12) по c. Тогда получим: $0 = x + \psi'(c)$.

В дифференциальной геометрии доказывается, что если имеется уравнение $\Phi(x, y, c) = 0$, то вместе с уравнением $\Phi'_c(x, y, c) = 0$ оно определяет *C-дискриминантную кривую*, и если к тому же

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 \neq 0$$

и $\partial\Phi/\partial x, \partial\Phi/\partial y$ ограничены, то С-дискриминантная кривая определяет огибающую семейства кривых.

Определение. *Огибающей семейства кривых* называется кривая, которая в каждой своей точке касается одной из кривых семейства.

Оказывается, всегда для уравнения Клеро С-дискриминантная кривая является огибающей. В самом деле: $\Phi(x, y, c) = xc + \psi(c) - y$. Тогда,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = c; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -1 \Longrightarrow c^2 + 1 \neq 0.$$

К тому же $\partial\Phi/\partial x, \partial\Phi/\partial y$ ограничены.

Пример.

Рассмотрим уравнение Клеро вида

$$y = xy' - y'^2.$$

Общее решение $y = xc - c^2$ - семейство прямых. Особое решение:

$$0 = x - 2c \Longrightarrow c = \frac{x}{2} \Longrightarrow y = x\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}.$$

Парабола $y = x^2/4$ разделяет плоскость на две области: в одной через каждую точку проходят две интегральные кривые, а в другой - ни одной (y' в одной области имеет два значения, а в другой - ни одного).

ЛЕКЦИЯ 10

Поговорим об особых решениях уравнения

$$F\left(x,y,y'\right)=0.$$

Как следует из доказанной теоремы, особые решения могут быть, если:

1) $\partial F/\partial y$ - не ограничена;

2) $\partial F/\partial y'=0$.

Первый случай на практике встречается редко. Поэтому остановимся подробнее на второй ситуации. Уравнения

$$\begin{cases} F\left(x,y,y'\right)=0,\\ F'_{y'}\left(x,y,y'\right)=0\end{cases}$$

определяют на плоскости кривую (y' - параметр), которая носит название *p-дискриминантной кривой*. Особое решение уравнения может входить в состав данной кривой.

Пример.

Рассмотрим уравнение Лагранжа

$$x-y=\frac{4}{9}\left(y'\right)^2-\frac{8}{27}\left(y'\right)^3.$$

Составим уравнения p-дискриминантной кривой ($y'=p$):

$$x-y=\frac{4}{9}p^2-\frac{8}{27}p^3;\qquad 0=\frac{8}{9}p-\frac{8}{9}p^2.$$

Отсюда,

$$p\left(1-p\right)=0.$$

Возможны два варианта:

а) $p=0\Longrightarrow y=x$;

б) $p=1\Longrightarrow y=x-4/27$.

Таким образом, p-дискриминантная кривая состоит из двух прямых. Являются ли они интегральными ? Проверим, подставив в исходное уравнение. В результате обнаруживаем, что $y=x$ не является решением, а $y=x-4/27$ является решением уравнения. Найдем теперь общее решение уравнения.

$$y=x-\frac{4}{9}p^2+\frac{8}{27}p^3\Longrightarrow dy=dx-\frac{8}{9}pdp+\frac{8}{9}p^2dp=$$

$$=dx+\frac{8}{9}p\left(p-1\right)dp=y'dx=pdx.$$

В результате, с учетом того, что ($p\neq 1$), имеем

$$dx=\frac{8}{9}pdp\Longrightarrow x-c=\frac{4}{9}p^2,\quad y=c+\frac{8}{27}p^3.$$

Исключая параметр, находим:

$$(y-c)^2=(x-c)^3$$

или

$$y=c\pm(x-c)^{3/2}\,.$$

Отсюда видно, что решение существует лишь при $x>c$, а точки (c,c) являются точками возврата. Эти точки лежат на биссектрисе $y=x$ главного координатного угла. В то же время,

$$y'=\pm\frac{3}{2}\,(x-c)^{1/2}\,.$$

Следовательно, верхние ветви полукубических парабол касаются прямой $y=x-4/27$ в точках

$$\frac{3}{2}\,(x-c)=1\Longrightarrow x=c+\frac{4}{9}.$$

Таким образом, прямая $y=x-4/27$ - огибающая семейства парабол и особое решение.

Теорема.

Огибающая семейства интегральных кривых всегда является особым решением дифференциального уравнения.

Доказательство:

каждая точка огибающей является одновременно и точкой интегральной кривой, поскольку в каждой своей точке она касается одной из интегральных кривых. Это означает, что в каждой своей точке огибающая имеет направление поля. Значит, она также является интегральной линией дифференциального уравнения, т.е. его решением. Но поскольку через каждую точку проходят два решения (в заданном направлении) - она сама и другая интегральная кривая, то огибающая является особым решением. ⊠

III. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.

1.Дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной.

Как мы уже отмечали, дифференциальным уравнением n-го порядка называется соотношение вида:

$$F\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}\right)=0. \qquad (1)$$

Допустим, что уравнение (1) разрешено относительно старшей производной:

$$y^{(n)}=f\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)}\right). \qquad (2)$$

Далее удобно уравнение (2) свести к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Сделаем замены, вводя новые функции $y_1,y_2,\ldots,y_n$:

$$y=y_1,y'=y_2,y''=y_3,\ldots,y^{(n-1)}=y_n. \qquad (3)$$

Тогда дифференциальное уравнение (2) будет эквивалентно следующей системе:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_3, \\ \ldots & \quad \ldots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} &= y_n, \\ \frac{dy_n}{dx} &= f\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Подобная система дифференциальных уравнений называется *нормальной*. Общий вид нормальной системы дифференциальных уравнений таков:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right), \\ \ldots & \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Вводя векторные обозначения: $\vec{y} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}, \vec{f} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, получаем сокращенную форму записи (5)

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}\left(x, \vec{y}\right).$$

Теорема существования и единственности решения нормальной системы дифференциальных уравнений.

Пусть:

1. Правые части системы (5) являются непрерывными функциями по совокупности аргументов $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ в некоторой области G $(n+1)$-мерного пространства, содержащей начальную точку $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$.

2. Существуют ограниченные производные:

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_k}\right| \le N, \quad i = \overline{1, n}; k = \overline{1, n}.$$

Тогда система (5) имеет единственное решение:

$$y_1 = \varphi_1\left(x\right), y_2 = \varphi_2\left(x\right), \ldots, y_n = \varphi_n\left(x\right),$$

удовлетворяющее начальному условию:

$$\varphi_1\left(x_0\right) = y_1^0, \varphi_2\left(x_0\right) = y_2^0, \ldots, \varphi_n\left(x_0\right) = y_n^0$$

и определенное в некоторой окрестности начальной точки: $|x - x_0| \le h$.

Без доказательства.

Заметим, что в векторной форме решение системы (5) записывается в виде $\vec{y} = \vec{\varphi}\,(x)$, причем $\vec{\varphi}\,(x_0) = \vec{y}_0$. Доказательство теоремы очень похоже на доказательство теоремы о существовании решения одного дифференциального уравнения первого порядка, поэтому здесь не приводится. Аналогичным образом доказывается возможность продолжения решения, непрерывная зависимость от начальных условий и т.д.

Поговорим о геометрической интерпретации решения системы дифференциальных уравнений. Общее решение системы представляет собой семейство интегральных кривых в $(n+1)$-мерном пространстве и зависит от n параметров (при фиксированном x_0 - параметры $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$). Отсюда следует вывод, что общее решение системы дифференциальных уравнений (5) зависит от n произвольных постоянных.

Частное решение $\vec{y} = \vec{\varphi}\,(x)$ можно интерпретировать как параметрически заданную (x - параметр) кривую в n-мерном пространстве $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, которую часто называют *траекторией движения* системы (5).

На основе сформулированной общей теоремы докажем теорему для уравнения (2).

Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной.

Пусть в уравнении (2) функция $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ непрерывна по совокупности переменных в некоторой области G $(n+1)$-мерного пространства и существуют ограниченные производные

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}\right| \leq N, \quad k = \overline{0,1}$$

во всей области G. Начальная точка $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in G$.

Тогда, существует единственное решение $y = \varphi\,(x)$ уравнения (2), удовлетворяющее начальному условию $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$, т.е. $\varphi\,(x_0) = y_0, \varphi'\,(x_0) = y_0', \ldots, \varphi^{(n-1)}\,(x_0) = y_0^{(n-1)}$, определенное в окрестности точки x_0: $|x - x_0| \leq h$.

Доказательство.

Поскольку нормальная система (4), соответствующая уравнению (2), является частным случаем системы (5), то можно проверить условия теоремы для системы (5). Первые $(n-1)$ правых частей системы (4) удовлетворяют условиям теоремы существования: $f_k = y_{k+1}$ - непрерывны и

$$\frac{\partial f_k}{\partial y_i} = \delta_{i,k+1} = \begin{cases} 1, & i = k+1 \\ 0, & i \neq k+1 \end{cases} \text{ - символ Кронекера,}$$

т.е. они и ограничены. Остается рассмотреть правую часть последнего уравнения системы (4): $f_n = f$. Непрерывность функции f_n по совокупности переменных вытекает из условий теоремы и замен (3). Ограниченность $\partial f_k/\partial y_i$ следует из условий ограниченности $\partial f/\partial y^{(i)}$ и замен (3). Следовательно, все условия общей теоремы выполняются и в окрестности точки x_0: $|x - x_0| \leq h$ существует единственное решение $y = \varphi\,(x)$. Каковы начальные условия для него ? Для общей системы это $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$, а на нашем языке - $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$, поскольку $y_1 = \varphi\,(x)\,, y_2 = \varphi'\,(x)\,, \ldots, y_n = \varphi^{(n-1)}\,(x)$ согласно (3). ⊠