ЛЕКЦИЯ 1

# I.ВВЕДЕНИЕ

## 1.Предмет курса.

Большинство законов природы записывается в форме соотношений, в которые входят физические величины, зависящие от одной или нескольких переменных, а также их производные по этим переменным. Примером может служить закон Ньютона, описывающий движение классической частицы с импульсом $\vec{p}\,(t)$ под действием силы $\vec{F}\,(t)$:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}\,(t)\,,$$

где

$$\vec{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\vec{v},$$

$m_0$ - масса покоя, $\tilde{n}$ - скорость света, $\vec{v}$ - скорость частицы. Здесь неизвестной величиной является скорость частицы, которая зависит от одной переменной - времени $t$. Другим важнейшим законом природы является закон Максвелла, который описывает распространение электромагнитных волн в среде. Так, в вакууме напряженности электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ полей, являющихся функциями трех координат и времени, описываются соотношениями:

$$rot \quad \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$rot \quad \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$div \quad \vec{E} = 0$$

$$div \quad \vec{H} = 0$$

Обратимся к конкретным физическим примерам.

Радиоактивный распад. Пусть $m\,(t)$ - масса радиоактивного вещества в момент времени $t$. Обозначим через $dm\,(t)$ изменение (уменьшение) массы вещества за промежуток времени $dt$. Тогда, физически оправдано предположение, что величина $dm$ пропорциональна длительности промежутка $dt$ и исходной массе радиоактивного вещества $m$, т.е.

$$dm = -\alpha m dt,$$

где постоянная $\alpha > 0$. Отсюда следует, что

$$\frac{dm}{m} = -\alpha dt,$$

и, интегрируя, получаем

$$\ln m = -\alpha t + \ln c$$

или

$$m = ce^{-\alpha t}.$$

Семейство решений содержит одну неизвестную постоянную $c$ и имеет мощность континуума. Если в начальный момент времени $t = 0$ имеется $m_0$ вещества, то $m_0 = c$, и поэтому

$$m(t) = m_0 e^{-\alpha t}.$$

Время, за которое начальная масса вещества уменьшается в два раза, называется периодом полураспада $T$:

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-\alpha T} \Longrightarrow T = \frac{\ln 2}{\alpha}.$$

Постоянная $\alpha$ определяется природой радиоактивного вещества.

Свободное падение тела. Запишем уравнение Ньютона для частицы массы $m$, падающей вниз под действием силы тяжести:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g}.$$

Отсюда,

$$\frac{dv}{dt} = -g \Longrightarrow v(t) = -gt + c_1.$$

Тогда для координаты частицы имеем

$$\frac{dy}{dt} = -gt + c_1,$$

или после интегрирования

$$y = -\frac{gt^2}{2} + c_1 t + c_2.$$

Формула охватывает всевозможные падения тел под действием силы тяжести. Она содержит две неизвестные постоянные. Пусть при $t = 0$ определены координата $y_0$ и скорость $v_0$ тела. Тогда, $v_0 = c_1, y_0 = c_2$, и получаем единственное решение:

$$y(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + y_0.$$

## 2.Основные определения.

**Определения**. Дифференциальным уравнением называется соотношение для неизвестной функции, в которое входят ее производные или дифференциалы. Если функция зависит от одной независимой переменной, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным. Дифференциальное уравнение называется уравнением в частных производных, если функция, входящая в него, зависит от нескольких независимых переменных. Примеры таких уравнений - соответственно уравнение Ньютона и уравнения Максвелла.

Порядком уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение. В примерах мы имели дело с обыкновенными дифференциальными уравнениями первого и второго порядков. Общий вид обыкновенного дифференциального уравнения $n$-го порядка для неизвестной функции $y(x)$ таков:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Здесь функция $F$ обязательно должна зависеть от $y^{(n)}$. Общий вид дифференциального уравнения первого порядка:

$$F\left(x, y, y'\right) = 0.$$

Общий вид дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(x, y\right).$$

**Определения**. Решением дифференциального уравнения называется всякая функция, обращающая его в тождество. Частным решением называется решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям (если оно единственно). Множество всех частных решений называется общим решением дифференциального уравнения.

Как мы видели на примере, общее решение дифференциального уравнения первого порядка является семейством функций, зависящих от одного параметра: $y = \varphi\left(x, c\right)$, где функция $\varphi\left(x, c\right)$ дифференцируема по $x$. Из общего решения можно получить частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $\left(x_0, y_0\right)$ : $\varphi\left(x_0, c\right) = y_0$ - уравнение для определения постоянной $c$. Решая его, получим $c = c_0$. Следовательно, частное решение имеет вид: $y = \varphi\left(x, c_0\right)$.

Общее решение дифференциального уравнения $n$-го порядка, как правило, есть семейство функций, зависящих от $n$ произвольных постоянных: $y = \varphi\left(x, c_1, c_2, \ldots, c_n\right)$. Начальные условия должны давать возможность определить константы $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Иногда общее решение дифференциального уравнения первого порядка получается в форме

$$\Phi\left(x, y, c\right) = 0$$

и называется общим интегралом. Частное решение, записанное в подобной форме, называют частным интегралом.

## 3.Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной.

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(x, y\right),$$

где $f\left(x, y\right)$ определена в некоторой двумерной области $G \subset \Re^2$. Частное решение $y = \varphi\left(x\right)$ обращает уравнение в тождество

$$\frac{d\varphi\left(x\right)}{dx} \equiv f\left(x, \varphi\left(x\right)\right)$$

и удовлетворяет начальным условиям $\varphi\left(x_0\right) = y_0$. При этом $\left(x_0, y_0\right) \in G$. На плоскости $y = \varphi\left(x\right)$ представляет кривую, проходящую через т.$M_0\left(x_0, y_0\right)$. Эта кривая называется интегральной кривой. По нашему определению, это - единственная кривая. Множество всех интегральных кривых соответствует общему решению уравнения. Геометрически ясно, что оно зависит от одного параметра - ординаты начальной точки. Из геометрического смысла производной следует, что тангенс угла наклона касательной к интегральной кривой в т.$x_0$ равен значению функции $f(x_0, y_0)$:

$$f(x_0, y_0) = \left.\frac{d\varphi(x)}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

Таким образом, правая часть $f(x, y)$ дифференциального уравнения задает в области $G$ поле направлений. Будем отмечать это отрезками в области $G$ (а не векторами, поскольку направление определено с точностью до $\pi$). Тогда, интегральной кривой будет кривая, касательная к которой совпадает с направлением поля в каждой своей точке.

**Определение**. Изоклиной называется кривая, в каждой точке которой поле имеет одно и то же фиксированное направление.

Пример. Построим интегральные кривые уравнения

$$\frac{dy}{dx} = 1 + xy.$$

Полагая $dy/dx = k$, находим уравнения изоклин: $xy = k - 1$. Построим на плоскости несколько простейших изоклин, отвечающих $k = -1, 0, 1, 2$ (см.рис). Перед построением интегральных кривых найдем их точки перегиба. Как известно, точки, подозрительные на перегиб, определяются из условия равенства нулю второй производной. Вычисляя $y''$ из исходного уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y + xy' = y + x(1 + xy)$$

и полагая ее равной нулю, получаем кривую точек перегиба

$$y = -\frac{x}{1 + x^2}.$$

Теперь уже не составляет труда качественно изобразить ход интегральных кривых исходного дифференциального уравнения. Примененный способ построения интегральных кривых носит название метода изоклин.