ЛЕКЦИЯ 2

4.Построение дифференциального уравнения по общему решению.

Пусть дано семейство дифференцируемых функций, зависящих от одного параметра. Требуется найти дифференциальное уравнение, для которого это семейство будет решением.

Итак, известно:

$$y = \varphi(x, c). \tag{1}$$

Продифференцируем уравнение (1) по x:

$$y' = \varphi'_x(x, c). \tag{2}$$

Из уравнений (1),(2) нужно исключить c. Может оказаться, что равенство $y' = \varphi'_x$ уже не содержит c. Следовательно, это равенство и будет искомым уравнением. В общем случае из уравнения (1) можно исключить c (если $\varphi'_c(x, c) \neq 0$) и выразить

$$c = \psi(x, y). \tag{3}$$

При этом справедливо тождество

$$c \equiv \psi(x, \varphi(x, c)).$$

Подставляя равенство (3) в уравнение (1), имеем

$$y' = \varphi'_x(x, \psi(x, y)) = f(x, y). \tag{4}$$

Покажем, что $y = \varphi(x, c)$ действительно является общим решением дифференциального уравнения (4). Подставим (1) в (4)

$$\varphi'_x(x, c) = \varphi'_x(x, \psi(x, \varphi(x, c))) \equiv \varphi'_x(x, c).$$

Пример.

$$y = \sqrt{c^2 - x^2}.$$

Тогда,

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{c^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}.$$

В итоге, получаем уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Если же имеется семейство n раз дифференцируемых функций, зависящих от n параметров: $y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$, и мы хотим построить дифференциальное уравнение, для которого это семейство является общим решением, то следует дифференцировать равенство последовательно n раз:

$$y' = \varphi'_x(x, c_1, \ldots, c_n), \ldots, y^{(n)} = \varphi^{(n)}_{x\ldots x}(x, c_1, \ldots, c_n).$$

Из первых n уравнений определяем

$$c_i = \psi_i \left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right), i = 1, 2, \ldots, n;$$

а затем подставляем в последнее уравнение. В итоге получим,

$$y^{(n)} = \psi \left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right).$$

Заметим, что дифференциальное уравнение считается проинтегрированным, если решение найдено в виде квадратур.

II.ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1.Уравнения с разделяющимися переменными

Простейшим дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными является уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \tag{5}$$

Предполагается, что $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b). Все решения этого уравнения даются формулой:

$$y = \int f(x)\, dx + c. \tag{6}$$

Переобозначив постоянную c, его удобно записать в виде

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi + c.$$

Если задано начальное условие: $y = y_0$ при $x = x_0$, то $c = y_0$, и получаем частное решение

$$y = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi. \tag{7}$$

В силу непрерывности $f(x)$ входящий в (7) интеграл существует. Все решения уравнения (5) расположены в полосе $a < x < b, \quad -\infty < y < \infty$, а интегральные кривые получаются из (7) сдвигом параллельно оси OY.

Другим видом уравнения с разделяющимися переменными является:

$$\frac{dy}{dx} = f(y), \tag{8}$$

где $f(y)$ непрерывна в интервале $c < y < d$. Будем искать решение уравнения (8) в виде обратной функции к решению $y = \varphi(x)$, т.е. в виде $x = \psi(y)$, где $\psi(y) = \varphi^{(-1)}(y)$. Для этого запишем уравнение (8) в эквивалентной форме

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}. \tag{9}$$

Это можно сделать, если $f(y) \neq 0$.

Пусть α и β - два последних нуля функции $f(y)$, т.е. $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ и при $\forall y \in (\alpha, \beta) : f(y) \neq 0$. Тогда в интервале (α, β) уравнения (8) и (9) равноправны. В уравнении (9) правая часть в интервале (α, β) непрерывна, и, следовательно, в соответствии с (6)

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + c. \tag{10}$$

Здесь все интегральные кривые расположены в полосе (α, β) и получаются одна из другой сдвигом по оси OX.

Предположим, что при $y = \beta$ интеграл $\int dy/f(y)$ сходится. Тогда, интегральная кривая касается линии $y = \beta$. Если, наоборот, при $y = \alpha$ интеграл $\int dy/f(y)$ расходится, и $1/f(\alpha) = -\infty$. Тогда интегральная кривая асимптотически приближается к линии $y = \alpha$.

Заметим, что формула (10) определяет y как однозначную функцию x. Действительно, поскольку функция $f(y)$ не меняет знак в (α, β), то не меняет знак и производная dx/dy, а, значит, функция $x = \psi(y)$ имеет однозначную обратную функцию $y = \varphi(x)$ - решение уравнения (8).

Помимо решения (10) прямые $y = \alpha$ и $y = \beta$ являются также решениями уравнения (8):

$$\frac{d\alpha}{dx} \equiv f(\alpha), \quad \frac{d\beta}{dx} \equiv f(\beta).$$

Однако, через любую точку прямой $y = \alpha$ проходит одна интегральная кривая, а через любую точку прямой $y = \beta$ две интегральные кривые уравнения (8). Такие решения носят название <u>особых</u>. В нашем случае $y = \beta$ - особое решение.

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения (8) не выражается одной формулой

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + c, \quad y = \alpha, \quad y = \beta.$$

Особое решение возникает тогда, когда через каждую точку соответствующей интегральной кривой проходит (касается) другая интегральная кривая.

<u>Пример</u>. Движение частицы в вязкой среде.

Пусть частица массы m движется прямолинейно в вязкой среде, сила трения которой пропорциональна кубу скорости частицы. Тогда уравнение Ньютона запишется в виде:

$$m\frac{dv}{dt} = -\gamma v^3, \quad (\gamma > 0).$$

Одно из решений уравнения очевидно - $v = 0$. Такое решение, отвечающее покоящейся частице, неинтересно с физической точки зрения. Если $v \neq 0$, то

$$\frac{dv}{v^3} = -\frac{\gamma}{m}dt \Longrightarrow -\frac{1}{2v^2} = -\frac{\gamma t}{m} - \frac{c}{2}.$$

Отсюда находим общее решение

$$v = \pm\frac{1}{\sqrt{c + 2\gamma t/m}}.$$

В асимптотике $(t \to \infty)$ частица останавливается: $v \to 0$. Знаки $\pm$ отвечают различному направлению движения частицы вдоль оси OX.

Рассмотрим следующий тип уравнения с разделяющимися переменными

$$f_1(x) f_2(y)\, dx = g_1(x) g_2(y)\, dy. \tag{11}$$

Считаем $f_1(x), f_2(y), g_1(x), g_2(y)$ непрерывными функциями в некоторой области. Допустим, что $y = y_i, i = 1, 2, \ldots$ есть решения уравнения $f_2(y) = 0$. Тогда, очевидно, $y = y_i$ являются интегральными кривыми уравнения (11). Пусть $x = x_j, j = 1, 2, \ldots$ - корни уравнения $g_1(x) = 0$. Тогда прямые $x = x_j$ являются интегральными, но они не являются решениями уравнения (11), поскольку $x = x_j$ не есть функция.

Далее, предполагая, что $f_2(y) \neq 0, g_1(x) \neq 0$, находим делением на $g_1(x) f_2(y)$

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} dx = \frac{g_2(y)}{f_2(y)} dy.$$

Это уравнение равносильно (11). Интегрируя обе части, имеем:

$$\int \frac{f_1(x)}{g_1(x)} dx = \int \frac{g_2(y)}{f_2(y)} dy + c. \tag{12}$$

Получили соотношение вида $\Phi(x, y, c) = 0$. Это общий интеграл уравнения (11). Можно показать, что формула (12) определяет y как неявную функцию x.

2.Уравнения, приводимые к уравнениям с разделяющимися переменными.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by), \quad a, b \in \Re \quad (a, b \neq 0).$$

Введем новую функцию $z = ax + by$. Тогда, $dz = adx + bdy$ и

$$\frac{dz - adx}{bdx} = f(z)$$

или

$$dz = [a + bf(z)]\, dx.$$

Таким образом, пришли к уравнению с разделяющимися переменными.

Определение. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется <u>однородной</u>, если для произвольного действительного параметра t:

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где k - некоторое натуральное число, показывающее "степень" однородной функции (ее порядок).

<u>Пример</u>.

$$f(x,y)=x^3+2y^3-3xy^2-$$

однородная функция 3-ей степени.

$$f(x,y)=x^2e^{-y/x}+8xy\sin\frac{x}{y}-$$

однородная функция 2-го порядка.

Для случая двух переменных условие однородности функции записывается в следующем виде

$$f(tx,ty)=t^kf(x,y).$$

Положим в этом равенстве $t=1/x$. Тогда,

$$f\left(1,\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x^k}f(x,y),$$

т.е.

$$f(x,y)=x^kf\left(1,\frac{y}{x}\right).$$

Если $k=0$, то:

$$f(x,y)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)=g\left(\frac{y}{x}\right).$$

Итак, однородная функция двух независимых переменных нулевого порядка есть функция отношения y/x.

Определение. Если правая часть дифференциального уравнения является однородной функцией нулевого порядка, то дифференциальное уравнение называется однородным:

$$\frac{dy}{dx}=g\left(\frac{y}{x}\right).$$

Это уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $y/x=u$, где u - новая функция. Тогда,

$$y=ux\Longrightarrow\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}=g(u).$$

Следовательно,

$$x\frac{du}{dx}=g(u)-u.$$

Допустим, что $u_1,u_2,\ldots$- корни уравнения $g(u)-u=0$. Тогда $u=u_i$ - есть решение полученного уравнения. Значит, прямые $y=u_ix$, проходящие через начало координат, являются интегральными кривыми. Считая $u\neq u_i$, находим:

$$\frac{du}{g(u)-u}=\frac{dx}{x}$$

или

$$\int\frac{du}{g(u)-u}=\ln|x|+\ln|c|=\ln|cx|.$$

Отсюда, находим решение $u=\omega(cx)$, а по нему общее решение исходного однородного уравнения $y=x\omega(cx)$.