ЛЕКЦИЯ 3

Уравнения, приводимые к однородным.

Отметим основные способы сведения уравнений к однородным:

а) заменой функции $y = z^{\alpha}$. Степень α подбирают так, чтобы уравнение стало однородным,

б) уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1}\right)$$

приводится к однородному одновременной заменой и аргумента и функции: $x = \xi + \alpha, y = \eta + \beta$, где константы α и β выбираются специальным образом. В силу произведенной замены $dx = d\xi, dy = d\eta, ax+by+c = (a\xi + b\eta)+a\alpha+b\beta+c, a_1x+b_1y+c_1 = (a_1\xi + b_1\eta) + a_1\alpha + b_1\beta + c_1$. Слагаемые, стоящие вне круглых скобок, полагаются равными нулю. Отсюда получается система уравнений для определения α и β:

$$\left\{ \begin{array}{c} a\alpha + b\beta + c = 0 \\ a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \end{array} \right| .$$

Данная система имеет единственное решение, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда исходное дифференциальное уравнение перейдет в однородное

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a\xi + b\eta}{a_1\xi + b_1\eta}\right) = g\left(\frac{\eta}{\xi}\right).$$

Если $\Delta = 0$, т.е. $a_1/a = b_1/b = \lambda$, то

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{\lambda\left(ax + by\right) + c_1}\right),$$

и оно приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $z = ax + by$.

3.**Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.**

Определение. Линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка называют уравнение вида

$$y' + P\left(x\right)y = Q\left(x\right), \tag{1}$$

где неизвестная функция y и ее производная y' входят в первой степени.

Будем полагать, что функции $P\left(x\right)$ и $Q\left(x\right)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$. Если $Q\left(x\right) \equiv 0$, то уравнение

$$y' + P\left(x\right)y = 0 \tag{2}$$

называют линейным однородным уравнением, соответствующим неоднородному линейному уравнению (1). Уравнение (2) является уравнением с разделяющимися переменными и легко решается. Оно имеет очевидное тривиальное решение

$$y = 0. \tag{3}$$

Если $y \neq 0$, то

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\,dx \Longrightarrow \ln|y| = -\int P(x)\,dx + \ln|c|\,, c \neq 0.$$

Поэтому

$$y = c\exp\left\{-\int P(x)\,dx\right\}. \tag{4}$$

В уравнении (4) $c \neq 0$. Если же "разрешить" c принимать нулевое значение, то придем к решению (3). Поэтому, общее решение однородного уравнения (2) дается формулой

$$y = c\exp\left\{-\int P(x)\,dx\right\}. \tag{5}$$

Оказывается, решение неоднородного уравнения (1) можно получить из (5), применив метод Лагранжа - метод вариации произвольной постоянной. Будем искать решение исходного неоднородного уравнения (1) в виде

$$y = c(x)\exp\left\{-\int P(x)\,dx\right\}, \tag{6}$$

где $c(x)$ - неизвестная функция. Подставим это решение в (1)

$$c'(x)\exp\left\{-\int P(x)\,dx\right\} - c(x)P(x)\exp\left\{-\int P(x)\,dx\right\} +$$

$$+P(x)c(x)\exp\left\{-\int P(x)\,dx\right\} = Q(x) \Longrightarrow c'(x) = Q(x)\exp\left\{\int P(x)\,dx\right\}$$

$$\Longrightarrow c(x) = \int Q(x)\exp\left\{\int P(x)\,dx\right\}dx + c_1.$$

Подставляя $c(x)$ в (6), получим:

$$y = \exp\left\{-\int P(x)\,dx\right\}\left[c_1 + \int Q(x)\exp\left\{\int P(x)\,dx\right\}dx\right]. \tag{7}$$

Таким образом, общее решение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка можно найти с помощью двух квадратур (интегралов).

Проанализируем структуру полученного решения. Общее решение линейного неоднородного уравнения представляет собой сумму двух слагаемых:

$$y_1 = c_1\exp\left\{-\int P(x)\,dx\right\} -$$

это общее решение однородного уравнения и

$$y_2 = \exp\left\{-\int P(x)\,dx\right\}\int Q(x)\exp\left\{\int P(x)\,dx\right\}dx -$$

это решение получается из (7) при $c_1 = 0$, т.е. является частным решением неоднородного уравнения. Оказывается, это общее правило.

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения представляет собой суперпозицию общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Предположим, что каким-то образом удалось найти $\psi(x)$ - частное решение неоднородного уравнения. Тогда общее решение неоднородного уравнения можно найти с помощью одной квадратуры. Сделаем замену $y = z + \psi(x)$, где z - новая функция. Подставим все в уравнение (1):

$$z' + \underbrace{\psi'(x)} + P(x)\,z + \underbrace{P(x)\,\psi(x)} = \underbrace{Q(x)}.$$

Поскольку $\psi(x)$ - решение уравнения (1), то выделенные слагаемые сокращаются, и получаем уравнение вида (2)

$$z' + P(x)\,z = 0.$$

Следовательно, общее решение уравнения (1) представляется в форме

$$y = c\exp\left\{-\int P(x)\,dx\right\} + \psi(x).$$

Если известно два частных решения линейного неоднородного дифференциального уравнения, то его общее решение может быть найдено без квадратур. Пусть $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ - два указанных частных решения, т.е.

$$\begin{aligned} {\psi_1}' + P(x)\,\psi_1 &= Q(x)\,, \\ {\psi_2}' + P(x)\,\psi_2 &= Q(x)\,. \end{aligned}$$

Вычитая второе уравнение из первого, найдем

$$[\psi_1 - \psi_2]' + P(x)\,[\psi_1 - \psi_2] = 0.$$

Следовательно, $(\psi_1 - \psi_2)$ - есть решение однородного уравнения. Таким образом, общее решение однородного уравнения можно представить как

$$y = c\,(\psi_1 - \psi_2)\,,$$

а общее решение неоднородного уравнения (1) в виде

$$y = \psi_1(x) + c\,[\psi_1(x) - \psi_2(x)]\,.$$

Отсюда видно, что общее решение неоднородного уравнения (1) дается формулой

$$y = \varphi(x) + c\psi(x)\,, \tag{8}$$

т.е. является линейной функцией постоянной c.

Обратно, если взять линейную функцию произвольного постоянного, то дифференциальное уравнение, для которого эта линейная функция является общим решением, будет линейным. Покажем это. Продифференцируем соотношение (8):

$$y' = \varphi'(x) + c\psi'(x)\,. \tag{9}$$

Исключая c из (8),(9), приходим к

$$\frac{y' - \varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{y - \varphi(x)}{\psi(x)}$$

или

$$y' \underbrace{-\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}}_{P(x)} y = \underbrace{\varphi'(x) - \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\varphi(x)}_{Q(x)}.$$

Пример. Заряд конденсатора.

Запишем уравнения Кирхгофа для электрической схемы, представленной на рисунке. Здесь: E - постоянная э.д.с., U - напряжение на емкости, I - ток, текущий через сопротивление R и конденсатор C. Тогда,

$$E = RI + U, \quad I = C\frac{dU}{dt}.$$

В итоге, для напряжения U на емкости получается линейное дифференциальное уравнение

$$\tau\frac{dU}{dt} + U = E \qquad (\tau = RC).$$

Частное решение этого неоднородного уравнения физически очевидно: $U = E$. Тогда, производя замену $U = z + E$, придем к однородному уравнению

$$\tau\frac{dz}{dt} + z = 0,$$

решение которого имеет вид

$$z = c_1 e^{-t/\tau}.$$

И, следовательно, общее решение

$$U = E + c_1 e^{-t/\tau}.$$

Если в начальный момент времени $t = 0$ конденсатор был разряжен: $U(0) = 0$, то $E + c_1 = 0 \to c_1 = -E$, и процесс заряда описывается формулой

$$U = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

Таким образом, время заряда конденсатора равно постоянной времени $\tau = RC$.

4. **Уравнения Бернулли и Риккати.**

Есть ряд дифференциальных уравнений, которые приводятся к линейным. Уравнение вида

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^n, \quad (n \neq 0, 1) \tag{10}$$

называют уравнением Бернулли. Если $n > 0$, то $y = 0$ - тривиальное решение. Будем полагать далее, что $y \neq 0$. Тогда, поделив обе части уравнения (10) на y^n, получим:

$$y^{-n}y' + P(x)\,y^{-n+1} = Q(x).$$

Легко заметить, что
$$\left(y^{-n+1}\right)' = (1-n)\, y^{-n} y'.$$
Тогда, производя замену функции: $y^{-n+1} = z$, приходим к линейному дифференциальному уравнению
$$\frac{z'}{1-n} + P(x)\, z = Q(x)\,.$$

Пример. Рассмотрим уравнение Бернулли вида
$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x} = \frac{x^2}{2y}.$$
Поскольку в этом уравнении $n = -1$, то по рецепту нужно применить замену $y^2 = z$. Домножение на $2y$ обеих частей уравнения дает:
$$2yy' - \frac{y^2}{x} = x^2$$
или
$$z' - \frac{z}{x} = x^2.$$
Далее, действуя по схеме решения линейного дифференциального уравнения, получим общий интеграл исходного уравнения
$$y^2 = cx + \frac{x^3}{2}.$$

Уравнением Риккати называют дифференциальное уравнение вида
$$y' + \alpha(x)\, y + \beta(x)\, y^2 = \gamma(x)\,. \tag{11}$$
На самом деле, это - обобщенное уравнение, поскольку Риккати изучал более простое:
$$y' + \beta y^2 = \gamma x^m. \tag{12}$$
Заметим, что уравнение вида (12) встречается в физике. Оно получается из уравнения для напряженности электрического поля $E(x)$ в плоско-слоистой среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(x)$:
$$\frac{d^2E}{dx^2} + k^2 \varepsilon(x)\, E = 0.$$
Сделав замену переменной
$$E = \exp\left\{\int z(x)\, dx\right\}$$
и вычислив
$$E' = z(x) \exp\left\{\int z(x)\, dx\right\} = zE, \quad E'' = z'E + zE' = \left(z' + z^2\right) E,$$

придем к уравнению Риккати

$$z' + z^2 = -k^2 \varepsilon(x).$$

Следует заметить, что, в отличие от уравнения Бернулли, уравнение Риккати в общем случае не интегрируется в квадратурах. Однако, если известно частное решение (11) $\psi(x)$, то его можно свести к уравнению Бернулли и найти его общее решение. В самом деле. Проведем в (11) замену функции: $y = z + \psi(x)$. Тогда

$$z' + \underbrace{\psi'(x)} + \alpha(x) z + \underbrace{\alpha(x)\psi(x)} + \beta(x) z^2 + 2\beta(x) z\psi(x) + \underbrace{\beta(x)\psi^2(x)} = \underbrace{\gamma(x)}.$$

Поскольку $\psi(x)$ - решение уравнения (11), отмеченные слагаемые сокращаются. В итоге, для функции $z(x)$ получается уравнение Бернулли

$$z' + [\alpha(x) + 2\beta(x)\psi(x)] z + \beta(x) z^2 = 0,$$

которое линеаризуется заменой $1/z = u \quad (n = 2)$.

Пример. Рассмотрим уравнение Риккати

$$y' + 3y^2 = \frac{2}{x^2}.$$

Поищем частное решение этого уравнения в виде $y = c/x$. Тогда,

$$-\frac{c}{x^2} + \frac{3c^2}{x^2} = \frac{2}{x^2} \Longrightarrow 3c^2 - c - 2 = 0 \Longrightarrow c_1 = 1, c_2 = -\frac{2}{3}.$$

В итоге мы нашли сразу два частных решения. Беря наиболее простое из них и производя замену функции: $y = z + 1/x$, придем к уравнению Бернулли

$$z' + \frac{6z}{x} + 3z^2 = 0.$$

Решая последнее, найдем общее решение исходного уравнения

$$y = \frac{cx^5 + 2}{x(cx^5 - 3)}.$$