ЛЕКЦИЯ 4
5.Уравнение в полных дифференциалах.

В записи дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y)$$

y является функцией, а x - аргументом. В эквивалентной форме записи уравнения

$$f(x, y)\, dx - dy = 0$$

переменные равноправны, но отсутствует симметрия. Поэтому наиболее общая форма дифференциального уравнения, разрешенного относительно производной, такова:

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0. \tag{1}$$

Будем полагать, что в (1) функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ непрерывны в некоторой области G вместе с частными производными $\partial M/\partial y$ и $\partial N/\partial x$.

Может оказаться, что левая часть уравнения (1) представляет собой полный дифференциал некоторой функции, т.е. $\exists U(x, y)$ такая, что

$$dU = M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy.$$

В силу формулы первого дифференциала функции двух переменных это означает, что

$$M = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{2}$$

В этом случае уравнение (1) называют уравнением в полных дифференциалах.

Если функция $U(x, y)$ известна, то решение уравнения (1) легко найти. В самом деле

$$dU(x, y) = 0 \Longrightarrow U(x, y) = c. \tag{3}$$

Пусть $y = \varphi(x)$ - решение дифференциального уравнения (1). Тогда, из (3) имеем:

$$U(x, \varphi(x)) \equiv c,$$

т.е. функция U по любой интегральной кривой принимает одно и то же значение. Для разных интегральных кривых эти значения различны.

Определение. Функция $U(x, y)$, непрерывно-дифференцируемая по обоим аргументам, которая вдоль любой интегральной кривой принимает постоянное значение, называется первым интегралом.

Заметим, что это определение относят чаще к системам дифференциальных уравнений. Здесь мы его привели, чтобы подчеркнуть отличие от общего интеграла: в отличие от общего интеграла $\Phi(x, y, c) = 0$ первый интеграл разрешен относительно произвольной постоянной $U(x, y) = c$. Первых интегралов существует бесчисленное множество, поскольку любая функция от первого интеграла также будет первым интегралом

$$\Psi(U(x, y)) = \Psi(c) = c_1,$$

причем эти интегралы будут функционально независимы.

Пусть функция $U(x,y)$ известна. Как получить любое частное решение уравнения (1)? Зададимся начальным значением (x_0, y_0) и сосчитаем из (3) $c_0 = U(x_0, y_0)$. Тогда утверждается, что частное решение дифференциального уравнения (1) можно найти, разрешив относительно y уравнение

$$U(x,y) = c_0. \tag{4}$$

Уравнение (4) определяет неявно y как функцию x (или x как функцию y). Для этого необходимо, чтобы $\partial U(x_0,y_0)/\partial y \neq 0$, т.е. $N(x_0,y_0) \neq 0$, либо $\partial U(x_0,y_0)/\partial x \neq 0$, т.е. $M(x_0,y_0) \neq 0$. Может случиться, что в т.(x_0,y_0): $M(x_0,y_0) = N(x_0,y_0) = 0$. Подобные точки называются особыми, и мы их пока изучать не будем. Допустим, что $N(x_0,y_0) \neq 0$. Тогда по теореме о существовании неявного решения уравнение (4) определяет функцию $y = \varphi(x)$, причем $\varphi(x_0) = y_0$. Докажем, что эта функция является решением дифференциального уравнения (1).

Подставляя в равенство (4) $y = \varphi(x)$, имеем:

$$U(x, \varphi(x)) \equiv c_0.$$

Продифференцируем обе части тождества по x

$$\frac{\partial U(x,\varphi(x))}{\partial x} dx + \frac{\partial U(x,\varphi(x))}{\partial y} d\varphi(x) \equiv 0$$

или в силу (2)

$$M(x,\varphi(x))\,dx + N(x,\varphi(x))\,d\varphi(x) \equiv 0. \qquad \boxtimes$$

Таким образом, если функция $U(x,y)$ известна, то мы можем получить все частные решения уравнения (1).

Возникает вопрос: какому условию должны удовлетворять функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$, чтобы выражение $Mdx + Ndy$ являлось полным дифференциалом некоторой функции ?

Необходимость.

Предположим $\exists U(x,y)$ такая, что $dU = Mdx + Ndy$, т.е. выполнены равенства (2):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N.$$

Но, тогда

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

В силу непрерывности частных производных $\partial M/\partial y$ и $\partial N/\partial x$, которую мы предположили, имеем:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \qquad \boxtimes \tag{5}$$

Достаточность.

Построим функцию U, исходя из условий (2),(5).

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x,y) \Longrightarrow U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \Psi(y),$$

где y - параметр. Чтобы определить неизвестную $\Psi(y)$, нужно использовать второе условие в (2)

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \frac{d\Psi}{dy} =$$

и поскольку $\partial M/\partial y$ непрерывна

$$= \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx + \frac{d\Psi}{dy}.$$

В соответствии с условием (5) имеем далее

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}dx + \frac{d\Psi}{dy}$$

или, согласно (2),

$$N(x,y) = N(x,y) - N(x_0,y) + \frac{d\Psi}{dy} \Longrightarrow \Psi'(y) = N(x_0,y).$$

В результате,

$$\Psi(y) = \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy.$$

Таким образом, мы нашли (построили) функцию $U(x,y)$:

$$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy. \qquad \boxtimes \tag{6}$$

6.Интегрирующий множитель.

Условие (5) не всегда выполняется, поэтому можно пытаться преобразовать уравнение (1) так, чтобы условие стало справедливым. Предположим, что уравнение (1) не является уравнением в полных дифференциалах, т.е.

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Поставим задачу: найти такую функцию $\mu(x, y)$, при умножении на которую левая часть уравнения (1) превращается в полный дифференциал некоторой функции. Существует ли такая функция ? Интегрирующим множителем как раз и называют указанную функцию $\mu(x, y)$. Докажем ряд теорем об интегрирующем множителе.

Теорема 1. О существовании интегрирующего множителя.

Если дифференциальное уравнение (1) имеет первый интеграл, то интегрирующий множитель существует.

Доказательство.

Предположим, что существует непрерывно-дифференцируемая функция $U(x, y)$, для которой выражение $U(x, y) = c$ определяет все решения уравнения (1). Возьмем дифференциал от обеих частей выражения

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial U}{\partial x}\underline{dx} + \frac{\partial U}{\partial y}\underline{dy} = 0 \\ M\underline{dx} + N\underline{dy} = 0 \end{array} \right| .$$

Будем рассматривать это как систему уравнений с двумя неизвестными: dx и dy. Система однородна и поэтому имеет не нулевое решение, когда ее определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ M & N \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда,

$$\frac{U'_x}{M} = \frac{U'_y}{N}.$$

Обозначая это отношение за $\mu(x, y)$, придем к

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \mu M, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \mu N,$$

т.е. если уравнение (1) умножить на $\mu(x, y)$, то его левая часть превратится в dU: $dU = \mu(Mdx + Ndy)$. Выражение для $\mu(x, y)$ находится, поскольку $U(x, y)$ известна. ⊠

Теорема 2.

Число интегрирующих множителей бесконечно.

Доказательство.

Пусть известен интегрирующий множитель $\mu(x, y)$ такой, что при умножении на него левая часть уравнения превращается в $dU = \mu(Mdx + Ndy)$. Умножим это выражение на произвольную непрерывную функцию $\varphi(U(x, y))$. Тогда получим

$$\varphi(U)\, dU = d\underbrace{\int \varphi(U)\, dU}_{V} = \varphi(U)\, \mu(Mdx + Ndy)$$

или

$$dV = \varphi(U)\, \mu(Mdx + Ndy).$$

Это означает, что $\varphi(U)\, \mu$ также интегрирующий множитель

$$\mu_1 = \varphi(U)\, \mu. \qquad ⊠ \tag{7}$$

Теорема 3.

Любой интегрирующий множитель уравнения (1) имеет вид (7).

Доказательство.

Пусть имеются два интегрирующих множителя $\mu(x,y)$ и $\mu_1(x,y)$ уравнения (1), т.е.

$$dU = \mu(Mdx + Ndy),$$

$$dV = \mu_1(Mdx + Ndy).$$

Эти уравнения эквивалентны тому, что

$$U'_x = \mu M, \quad U'_y = \mu N, \quad V'_x = \mu_1 M, \quad V'_y = \mu_1 N.$$

Поскольку

$$\frac{U'_x}{V'_x} = \frac{U'_y}{V'_y} = \frac{\mu}{\mu_1},$$

то <u>якобиан</u>

$$\begin{vmatrix} U'_x & U'_y \\ V'_x & V'_y \end{vmatrix} \equiv \frac{D(U,V)}{D(x,y)} \equiv 0.$$

Последнее означает, что между функциями $U(x,y)$ и $V(x,y)$ существует функциональная зависимость: $\Phi(U,V) = 0$. Поскольку мы исключили особые точки, это уравнение можно разрешить как относительно U, так и относительно V. Пусть, например, $V = \varphi(U)$. Тогда $dV = \varphi'(U)\,dU$. Отсюда $\mu_1 = \varphi'(U)\,\mu$. ⊠

Теорема 4.

Если известны два существенно различных (т.е. не отличающихся на постоянный множитель) интегрирующих множителя, то первый интеграл уравнения (1) можно получить без квадратур.

Доказательство.

Пусть имеются два существенно различных интегрирующих множителя μ и μ_1. Тогда, по теореме 2 (см.(7))

$$\frac{\mu_1}{\mu} = \varphi(U) = V -$$

некоторый первый интеграл дифференциального уравнения (1). Действительно, поскольку $U = c$, то $V = \varphi(U) = \varphi(c) = c_1$. ⊠