## ЛЕКЦИЯ 5

Некоторые способы нахождения интегрирующего множителя.

Рассмотрим уравнение

$$Mdx + Ndy = 0.$$

Требуется найти такую функцию $\mu(x, y)$, что

$$\mu(Mdx + Ndy) = dU.$$

Для того, чтобы это выражение было полным дифференциалом, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

или

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x} \Longrightarrow \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} \Longrightarrow$$

$$N\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{1}$$

В общем случае, как видно из (1), для определения интегрирующего множителя $\mu(x, y)$ необходимо решать уравнение *в частных производных.* В отдельных случаях удается найти интегрирующий множитель частного вида. Поищем множитель в виде $\mu = \mu(x)$. Тогда,

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)/N.$$

Если правая часть зависит только от $x$, то существует интегрирующий множитель, зависящий только от $x$. Аналогично для $\mu = \mu(y)$. Можно искать множитель в виде: $\mu = \mu(x \pm y), \mu = \mu(xy), \mu = \mu(y/x)$ и т.д. Иногда удается разбить уравнение на группы и искать интегрирующий множитель для каждой группы отдельно. Например,

$$(M_1dx + N_1dy) + (M_2dx + N_2dy) = 0.$$

Пусть для первой группы интегрирующий множитель - $\mu_1$ и $U_1$ такая функция, что $dU_1 = \mu_1(M_1dx + N_1dy)$, а для второй группы это соответственно $\mu_2$ и $U_2$. Тогда для первой группы общий вид всех интегрирующих множителей в соответствии с доказанной теоремой таков: $\varphi_1(U_1)\mu_1$, а для второй - $\varphi_2(U_2)\mu_2$. Если удается подобрать $\varphi_1$ и $\varphi_2$ так, чтобы $\varphi_1(U_1)\mu_1 = \varphi_2(U_2)\mu_2 = \mu$, то $\mu$ и есть искомый интегрирующий множитель.

Пример.

Найдем решение следующего уравнения в дифференциалах:

$$\left(\frac{y}{x} + 3x^2\right)dx + \left(1 + \frac{x^3}{y}\right)dy = 0.$$

Разобьем левую часть на две группы

$$\left(\frac{y}{x}dx + dy\right) + \left(3x^2dx + \frac{x^3}{y}dy\right) = 0.$$

Тогда, очевидно, для первой группы: $\mu_1 = x, U_1 = xy$, а общий вид интегрирующего множителя - $x\varphi_1(xy)$, а для второй - $\mu_2 = y, U_2 = x^3y$, а общий вид множителя - $y\varphi_2(x^3y)$. Легко видеть, что при $\varphi_1(U) = U^2, \varphi_2(U) = U$: $x(xy)^2 = y(x^3y)$. Значит, искомый множитель $\mu = x^3y^2$. В результате,

$$(xy)^2 d(xy) + (x^3y)\, d(x^3y) = 0 \Longrightarrow \frac{(xy)^3}{3} + \frac{(x^3y)^2}{2} = c.$$

Пример.

Согласно *первому закону термодинамики* имеет место закон сохранения энергии для тепловых процессов

$$dQ = dU + pdV,$$

где $dQ$ - количество теплоты, пришедшей в систему, $dU$ - приращение внутренней энергии газа, $pdV$ - работа газа.

Поскольку работа газа не является полным дифференциалом, а $dU$ - полный дифференциал, то $dQ$ также не есть полный дифференциал. Оказывается, если ввести новую физическую величину - *энтропию* $S$ как функцию состояния газа через $dS = dQ/T$ при *равновесном процессе*, то первый закон термодинамики перепишется в виде

$$dS = \frac{1}{T}(dU + pdV).$$

Оказывается $dS$ - полный дифференциал, значит $1/T$ - интегрирующий множитель ($T$ - *абсолютная температура* газа).

## 7.Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной.

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{2}$$

Предположим, что $f(x, y)$ непрерывна по обоим аргументам в некоторой односвязной области $G \subset \Re^2$, содержащей начальные значения $(x_0, y_0)$, т.е. точку $M(x_0, y_0)$. Всегда можно выбрать прямоугольник $D$ с центром в т.$M(x_0, y_0)$, целиком лежащий в $G$, с шириной $2a$ и высотой $2b$. Далее всегда будем рассматривать прямоугольник $D : \{|x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}$. Докажем следующую важную теорему.

**Теорема (Коши)**.

Пусть: 1) функция $f(x, y)$ непрерывна по обоим аргументам в прямоугольнике $D : \{|x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}$,

2) удовлетворяет в нем условию Липшица относительно $y$, т.е. $\exists N > 0 : \forall x, y_1, y_2 \in D :$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le N |y_1 - y_2|,$$

причем постоянная $N$ не зависит от $x$.

Тогда существует единственное решение уравнения (2) $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее начальному условию

$$\varphi(x_0) = y_0 \tag{3}$$

и определенное при $|x - x_0| \leq h \quad (h \leq a)$. Постоянная $h$ будет определена в ходе доказательства.

Перед доказательством теоремы дадим некоторые пояснения и сформулируем несколько предложений.

**Определение.** Говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ *условию Липшица*, если $\exists N > 0$, что для $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ :

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq N |x_1 - x_2| .$$

Геометрически это означает, что тангенс угла наклона секущей по модулю не превышает числа $N : |\tan \alpha| \leq N$. Значит, кривая достаточно плавно меняется на отрезке $[a, b]$.

Заметим, что входящее в посылку теоремы условие Липшица можно заменить более сильным. Предположим, что в прямоугольнике $D$ существует ограниченная частная производная функции $f(x, y)$ :

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \leq N.$$

Тогда, по формуле конечных приращений Лагранжа

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = \frac{\partial f(x, y_2 + \theta(y_1 - y_2))}{\partial y} (y_1 - y_2) \quad (0 < \theta < 1),$$

и поэтому

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N |y_1 - y_2| .$$

Сформулированная теорема существования носит локальный характер. Условие непрерывности $f(x, y)$ обеспечивает существование решения (теорема Пеано), условие Липшица обеспечивает не только существование решения, но и его единственность. Заметим, что оба условия являются достаточными, но не необходимыми.

*Предложение I.* Дифференциальное уравнение (2) вместе с начальным условием (3) эквивалентно *интегральному уравнению*

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx. \tag{4}$$

*Доказательство:* $\boxed{\Longrightarrow}$ пусть функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (2)

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)) \tag{5}$$

и начальному условию (3):

$$\varphi(x_0) = y_0.$$

Интегрируя тождество (5) в пределах от $x_0$ до $x$, имеем:

$$\int_{x_0}^{x} \varphi'(x)\,dx \equiv \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\,dx$$

или

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \equiv \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\,dx.$$

Тогда, в силу (3)

$$\varphi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\,dx. \tag{6}$$

Значит, функция $y = \varphi(x)$ есть и решение интегрального уравнения (4). ⊠

$\boxed{\Longleftarrow}$ Обратно, пусть $y = \varphi(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (4). Тогда имеет место тождество (6). Полагая в нем $x = x_0$, получаем $\varphi(x_0) = y_0$ (начальное условие). Дифференцируя (6) по $x$, находим:

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)). \qquad ⊠$$

*Предложение II.* **Определение.** Закон, по которому каждой функции $\varphi$ из некоторого класса ставится в соответствие функция $\psi$ некоторого (другого) класса, называется *оператором* $\hat{A}$

$$\psi = \hat{A}\varphi.$$

Над функцией $\varphi(x)$, определенной и непрерывной на отрезке $|x - x_0| \le a$ с областью изменения $|\varphi(x) - y_0| \le b$, т.е. из класса $\mathbf{C}_a$, проделаем операцию

$$y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\,dx,$$

которая в указанном прямоугольнике $D$ имеет смысл. В результате получим новую функцию

$$\hat{A}\varphi = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\,dx.$$

На языке введенного оператора решением интегрального уравнения (4) будет функция, которая удовлетворяет равенству (см.(6))

$$\varphi = \hat{A}\varphi.$$

В этом случае говорят, что решением дифференциального уравнения (2) является *неподвижная точка* оператора $\hat{A}$.

*Предложение III. Нормой* функции $\varphi(x)$ назовем

$$\|\varphi(x)\| = \max_{|x - x_0| \le a} |\varphi(x)|.$$

Две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из класса $\mathbf{C}_a$ равны, если $\|\varphi(x) - \psi(x)\| = 0$.