ЛЕКЦИЯ 6

Доказательство:

Сузим класс функций $\varphi(x)$ так, чтобы функции $\hat{A}\varphi$ принадлежали тому же классу. Дело в том, что функция $\psi(x) = \hat{A}\varphi(x)$ будет непрерывна, дифференцируема, но условие $|\psi(x) - y_0| \le b$ может не выполняться. Уменьшим интервал изменения $|x - x_0|$ так, чтобы $|\psi(x) - y_0| \le b$. Новый прямоугольник $\{|x - x_0| \le h, |y - y_0| \le b\}$ обозначим через D_h.

Выберем число h таким образом, чтобы выполнялись условия:

а) $\left|\hat{A}\varphi - y_0\right| \le b$ для $\forall x : |x - x_0| \le h$;

б) для $\forall \varphi(x), \psi(x)$ класса $\mathbf{C}_h$ (определенных и непрерывных на отрезке $|x - x_0| \le h$)

$$\left\|\hat{A}\varphi - \hat{A}\psi\right\| \le K\|\varphi - \psi\|, \tag{1}$$

где K - некоторое число $(0 < K < 1)$. Оператор, удовлетворяющий условию (1), называется *сжимающим*.

Оценим величину в левой части неравенства а). В силу непрерывности $f(x,y)$ на D_h - $\exists M > 0 : \forall (x,y) \in D_h : |f(x,y)| \le M$, и мы имеем следующую цепочку неравенств:

$$\left|\hat{A}\varphi - y_0\right| = \left|y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))\,dx - y_0\right| \le \left|\int\limits_{x_0}^{x} |f(x,\varphi(x))|\,dx\right| \le M|x - x_0| \le Mh \le b.$$

Отсюда, $h \le b/M$ и должно выполняться $h \le a$.

Из условия б) имеем:

$$\left|\hat{A}\varphi - \hat{A}\psi\right| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))\,dx - \int\limits_{x_0}^{x} f(x,\psi(x))\,dx\right| \le$$

$$\le \left|\int\limits_{x_0}^{x} |f(x,\varphi(x)) - f(x,\psi(x))|\,dx\right| \le$$

по условию Липшица

$$\le N\left|\int\limits_{x_0}^{x} |\varphi(x) - \psi(x)|\,dx\right| \le N\|\varphi - \psi\|\,|x - x_0| \le Nh\|\varphi - \psi\|.$$

Поскольку это неравенство справедливо для $\forall x : |x - x_0| \le h$, то и

$$\left\|\hat{A}\varphi - \hat{A}\psi\right\| \le Nh\|\varphi - \psi\|.$$

Выберем h из условия $Nh < 1$, т.е. $h < 1/N$.

Итак, будем считать в дальнейшем, что h удовлетворяет одновременно трем условиям:

$$h \le \frac{b}{M}, \quad h \le a, \quad h < \frac{1}{N}. \tag{2}$$

Теперь можно взять число K такое, что $Nh < K < 1$.

Применим далее для доказательства *метод последовательных приближений*. Будем строить последовательные приближения к решению как

$$\varphi_0 = y_0; \quad \varphi_1 = \hat{A}\varphi_0; \quad \varphi_2 = \hat{A}\varphi_1; \ldots; \quad \varphi_n = \hat{A}\varphi_{n-1}; \ldots,$$

где

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, \varphi_{n-1}(x))\, dx.$$

Докажем, что построенная нами *функциональная последовательность* $\{\varphi_n(x)\}$ равномерно сходится на отрезке $|x - x_0| \le h$.

Определение. Функциональная последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ называется *равномерно сходящейся* к функции $\varphi(x)$ на отрезке $|x - x_0| \le h$, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N, \forall x : |x - x_0| \le h : |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

Заменим вопрос равномерной сходимости функциональной последовательности вопросом равномерной сходимости эквивалентного ей *функционального ряда*:

$$\varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + (\varphi_2 - \varphi_1) + \ldots + (\varphi_n - \varphi_{n-1}) + \ldots =$$

$$= \varphi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n - \varphi_{n-1}). \tag{3}$$

В самом деле. Сумма первых n членов построенного ряда (n-я частичная сумма) равна:

$$S_n(x) = \varphi_n(x).$$

Поэтому вопрос существования предела $S_n(x)$ при $n \to \infty$ (сходимости ряда) эквивалентен сходимости последовательности $\{\varphi_n(x)\}$. В то же время, для проверки равномерной сходимости ряда существует эффективно применяемый на практике достаточный признак Вейерштрасса.

Признак Вейерштрасса.

Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на отрезке $|x - x_0| \le h$, если $|u_n(x)| \le a_n$ для $\forall n \in \mathbf{N}$ и $\forall x : |x - x_0| \le h$, и при этом числовой (мажорирующий) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Оценим по норме члены нашего функционального ряда.

$$\|\varphi_2 - \varphi_1\| = \left\|\hat{A}\varphi_1 - \hat{A}\varphi_0\right\| \le K\, \|\varphi_1 - \varphi_0\| = K \left\|\hat{A}\varphi_0 - y_0\right\| \le Kb;$$

$$\|\varphi_3 - \varphi_2\| = \left\|\hat{A}\varphi_2 - \hat{A}\varphi_1\right\| \le K\,\|\varphi_2 - \varphi_1\| \le K^2 b; \ldots; \|\varphi_{n+1} - \varphi_n\| \le K^n b.$$

Поскольку

$$|\varphi_{n+1} - \varphi_n| \le \|\varphi_{n+1} - \varphi_n\| \le K^n b,$$

то члены функционального ряда (3) не превосходят членов числового ряда

$$b + bK + bK^2 + \ldots + bK^n + \ldots = b\sum_{n=0}^{\infty} K^n. \qquad (4)$$

Числовой ряд (4) сходится, поскольку он представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $K < 1$. Тогда по признаку Вейерштрасса функциональный ряд (3) сходится равномерно.

Воспользуемся теперь свойством равномерно сходящегося функционального ряда: сумма этого ряда является непрерывной функцией на отрезке равномерной сходимости: $|x - x_0| \le h$. Таким образом, и ряд (3) и последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ сходятся к одной и той же непрерывной на отрезке $|x - x_0| \le h$ функции $\varphi(x)$.

Поскольку $|\varphi_n - y_0| \le b$, то, переходя в этом неравенстве к пределу $n \to \infty$, имеем: $|\varphi(x) - y_0| \le b$, т.е. $\varphi(x) \in \mathbf{C}_h$. Теперь надо доказать, что полученная функция $\varphi(x)$ является решением интегрального уравнения

$$y = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx.$$

Оценим $\left\|\hat{A}\varphi - \hat{A}\varphi_n\right\|$.

$$\left\|\hat{A}\varphi - \hat{A}\varphi_n\right\| \le K\,\|\varphi - \varphi_n\| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \hat{A}\varphi_n = \hat{A}\varphi.$$

Переходя в соотношении $\varphi_n = \hat{A}\varphi_{n-1}$ к пределу при $n \to \infty$, имеем

$$\varphi = \hat{A}\varphi.$$

Таким образом, функция $\varphi(x)$ является решением интегрального уравнения на отрезке $|x - x_0| \le h$, т.е. решением исходного дифференциального уравнения. Существование решения доказано.

Докажем теперь единственность решения. Предположим, что существуют два решения дифференциального уравнения $y = \varphi(x), \quad r_1 < x < r_2$ и $y = \psi(x), \quad s_1 < x < s_2$, удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям: $\varphi(x_0) = y_0, \psi(x_0) = y_0$, причем $\varphi(x) \ne \psi(x)$. Покажем, что в общей части эти решения совпадают.

Докажем, прежде всего, что эти решения совпадают на отрезке $|x - x_0| \le h$, где: $h \le a, \quad h \le b/M, \quad h < 1/N, \quad [x_0 - h, x_0 + h] \subset ((r_1, r_2) \cap (s_1, s_2))$. Поскольку $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - решения интегрального уравнения, то: $\varphi = \hat{A}\varphi, \quad \psi = \hat{A}\psi$. Поэтому,

$$\|\varphi - \psi\| = \left\|\hat{A}\varphi - \hat{A}\psi\right\| \le K\,\|\varphi - \psi\|, \quad (0 < K < 1).$$

Этому неравенству можно удовлетворить лишь при $\|\varphi - \psi\| = 0$. Отсюда $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ при $|x - x_0| \le h$.

Обозначим за x_1 такую точку $x_1 > x_0$, что для всех $x_0 < x \le x_1 : \varphi(x) \equiv \psi(x)$, а для $x > x_1 : \varphi(x) \ne \psi(x)$. Например, $x_1 = x_0 + h$. Тогда точку $(x_1, \varphi(x_1))$ можно принять за начальную, с центром в этой точке построить прямоугольник D_1, для него найти h_1, которое фигурирует в теореме существования. В результате, по доказанному ранее $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ для $|x - x_1| \le h_1$ и т.д. В итоге, в области пересечения интервалов (r_1, r_2) и (s_1, s_2) решения совпадают. Значит, решение единственно. ⊠

Пример. Приведем пример на метод последовательных приближений, примененный при доказательстве теоремы существования и единственности. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = y$$

с начальной точкой $(0, 1)$. Ему эквивалентно интегральное уравнение:

$$y = 1 + \int\limits_0^x y dx.$$

Строим последовательные приближения:

$$\varphi_0 = 1; \quad \varphi_1 = 1 + \int\limits_0^x 1 \cdot dx = 1 + x;$$

$$\varphi_2 = 1 + \int\limits_0^x (1 + x)\, dx = 1 + x + \frac{x^2}{2};$$

$$\varphi_3 = 1 + \int\limits_0^x \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) dx = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}; \ldots;$$

$$\varphi_n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Тогда, предельная функция

$$\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Проверим, что получено решение исходного уравнения.

$$\frac{dy}{y} = dx \Longrightarrow \ln y = x + \ln c \Longrightarrow y = ce^x.$$

Из начального условия: $1 = ce^0 \longrightarrow c = 1$. Таким образом, решение дифференциального уравнения действительно $y = e^x$.