ЛЕКЦИЯ 7

Замечание. Доказанная теорема носит локальный характер. Показано, что решение $y = \varphi(x)$ существует при $|x - x_0| \le h$, где: $h \le a, \quad h \le b/M, \quad h < 1/N$ (N - постоянная Липшица). Как получить решение во всей области, где выполняется условие Липшица ? Применяется метод продолжения решения.

Берем т.$A(x_0 + h, \varphi(x_0 + h))$ и с центром в ней строим прямоугольник D_1, целиком лежащий в G. Для него находим $a_1, \quad b_1, M_1, N_1$ и по теореме существования определяем h_1. В данном прямоугольнике D_1 найдем решение $y = \psi(x)$, определенное при $|x - (x_0 + h)| \le h_1$, т.е. при $x_0 + h - h_1 \le x \le x_0 + h + h_1$. Решения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ совпадают на некотором участке. По теореме единственности они совпадают всюду, где определены. Построенная функция $\psi(x)$ будет продолжением решения $\varphi(x)$.

Определение. Пусть имеются два решения дифференциального уравнения $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям: $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$. Пусть также $\varphi(x)$ определено при $r_1 < x < r_2$, а $\psi(x)$ при $s_1 < x < s_2$, причем $(r_1, r_2) \subset (s_1, s_2)$. Тогда решение $y = \psi(x)$ называется *продолжением* решения $y = \varphi(x)$.

Непродолжаемым называется такое решение, которое является продолжением любого другого решения.

Рассмотрим множество всех решений, удовлетворяющих одним и тем же начальным условиям (x_0, y_0). Каждое решение имеет свой интервал определения. Пусть R_1 - множество левых концов этих интервалов, а R_2 - множество правых концов, причем $m_2 = \sup R_2$; $m_1 = \inf R_1$ (может быть $m_2 = +\infty$; $m_1 = -\infty$). Необходимо построить решение $y = \varphi(x)$, определенное в интервале (m_1, m_2) и удовлетворяющее начальному условию $\varphi(x_0) = y_0$.

Пусть $x_0 < x^* < m_2$. Согласно определению m_2, $\exists$ решение $\psi(x)$, которое определено при $x = x^*$. Вычислим $\psi(x^*)$ и положим $\varphi(x^*) = \psi(x^*)$. В силу теоремы единственности выбранное значение $\varphi(x^*)$ не зависит от выбора функции $\psi(x)$. Аналогично можно определить $\varphi(x)$ для аргументов x^* таких, что $m_1 < x^* < x_0$. Тем самым, построенная $\varphi(x)$ определена при $m_1 < x < m_2$. К тому же она является решением, т.к. в каждой точке ее значение совпадает с одним из решений. В силу определения m_1 и m_2 данное решение не продолжаемо. В силу теоремы единственности оно единственно.

Теорема.

Непродолжаемое решение примыкает к границе области.

Доказательство.

Предположим, что в области G правая часть дифференциального уравнения - $f(x, y)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по y. Выбрана т.(x_0, y_0) и определено непродолжаемое решение $\varphi(x)$, $m_1 < x < m_2$. Покажем, что каково бы ни было замкнутое множество $F \subset G$, $\exists$ числа r_1, r_2 $(m_1 < r_1 < r_2 < m_2)$ такие, что для $\forall x \notin [r_1, r_2]$ точка $(x, \varphi(x)) \notin F$.

Определение. *Расстоянием между точечными множествами* A и B называется величина

$$d = \inf_{M \in A, P \in B} \rho(M, P),$$

где $\rho(M, P)$ - расстояние между точками M и P.

Обозначим через ρ расстояние между множествами $E_2\backslash G$ и F (E_2 - евклидова плоскость). Определим замкнутое множество F^* как множество точек, расстояние которых от множества F не превышает $\rho/2$. Тогда, $F^* \subset G$. В силу непрерывности функции $f(x,y)$, стоящей в правой части дифференциального уравнения: $\exists M > 0 : |f(x,y)| \leq M$ для $\forall (x,y) \in F^*$. Выберем постоянную Липшица N так, чтобы неравенство

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| \leq N|y_2 - y_1|$$

выполнялось для $\forall (x,y_1), (x,y_2) \in F^*$. Выберем a и b таким образом, чтобы $a^2+b^2 \leq \rho^2/4$. Далее, как обычно, выберем параметр h из условий: $h \leq a, \quad h \leq b/M, \quad h < 1/N$. Это h будет одно и то же для всех точек множеств F^* и $F \subset F^*$. Покажем, что т.$(x, \varphi(x))$ при $\forall x > m_2 - h$ выходит за пределы множества F. *"От противного"*. Предположим, что $\exists \bar{x} > m_2 - h$ такое, что т.$(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) \in F$. Тогда эту точку можно принять за начальную и определить решение при всех $x : |x - \bar{x}| \leq h$, т.е. при $\bar{x} - h \leq x \leq \bar{x} + h$. Но $\bar{x} + h > m_2$, следовательно, наше решение $\varphi(x)$ определено при $x > m_2$. Но m_2 - точная верхняя грань правых концов интервалов, где существует решение. Пришли к противоречию. ⊛

8. Непрерывная зависимость решения дифференциального уравнения от начальных условий и от параметров.

До сих пор мы исследовали решение дифференциального уравнения, когда фиксируется некоторая начальная точка (x_0, y_0), через которую должно проходить это решение. Если изменить точку и взять $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$, то изменится и решение. Поэтому непродолжаемое решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \tag{1}$$

определенное при $m_1 < x < m_2$, будет зависеть еще и от координат начальной точки: $y = \varphi(x, x_0, y_0)$. Вообще говоря, и значения m_1, m_2 также зависят от (x_0, y_0), т.е. $m_1 = m_1(x_0, y_0), m_2 = m_2(x_0, y_0)$. Таким образом, формула

$$y = \varphi(x, x_0, y_0) \tag{2}$$

исчерпывает все возможные непродолжаемые решения уравнения (1), т.е. дает общее решение дифференциального уравнения. В свете вышесказанного, возникает важный для практических приложений вопрос: как будет меняться решение (2) при изменении начальных условий ? Дело в том, что в физике значение y_0 находится обычно путем экспериментального измерения. Поэтому возникают незначительные погрешности с заданием начальных условий, и если они приведут к сильному изменению решения дифференциального уравнения, то это неприемлемо - придется менять математическую модель явления.

На поставленный нами вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема.

Множество точек (x, x_0, y_0), в котором определено общее решение (2) уравнения (1), является открытым, и решение (2) представляет собой непрерывную функцию по совокупности аргументов на этом множестве.

Без доказательства.

Укажем на одно следствие сформулированной теоремы. При $\forall x_1, x_2 : m_1(x_0, y_0) < x_1 < x_2 < m_2(x_0, y_0)$ и $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \bar{x}_0, \bar{y}_0 : |x_0 - \bar{x}_0| < \delta, |y_0 - \bar{y}_0| < \delta :$

$$|\varphi(x, x_0, y_0) - \varphi(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0)| < \varepsilon$$

для $\forall x \in [x_1, x_2]$.

Сформулированная теорема доказывается с помощью еще более мощной теоремы. Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu), \tag{3}$$

где μ - некоторый параметр, а функция $f(x, y, \mu)$ определена в трехмерной области S. Предположим, что $f(x, y, \mu)$ непрерывно-дифференцируема по совокупности аргументов в S и удовлетворяет условию Липшица

$$|f(x, y_2, \mu) - f(x, y_1, \mu)| \leq N |y_2 - y_1| \tag{4}$$

равномерно относительно x и μ (N не зависит от x, μ) для $\forall (x, y_1, \mu), (x, y_2, \mu) \in S$.

Зададимся фиксированным начальным условием (x_0, y_0). Пусть при $x = x_0, \quad y = y_0$ параметр μ изменяется от μ_1 до μ_2 в области $S : \mu \in (\mu_1, \mu_2)$. Совершенно ясно, что решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения (3), удовлетворяющее начальному условию $y_0 = \varphi(x_0)$, будет зависеть от параметра μ. Если зададим $\mu = \mu^*$, то решение $y = \varphi(x, \mu^*)$ будет представлять кривую в плоскости σ. Непродолжаемое решение определено при $m_1 < x < m_2$. Ясно, что границы m_1 и m_2 зависят от μ. Спрашивается: каково множество, в котором определено решение $\varphi(x, \mu)$? Оказывается, это множество открытое !

Теорема.

Если правая часть дифференциального уравнения (3) непрерывна в области S и удовлетворяет условию Липшица (4), то решение $y = \varphi(x, \mu)$, удовлетворяющее фиксированным начальным условиям (x_0, y_0), определено в открытой области T и непрерывно в этой области по своим аргументам.

Без доказательства.

На математическом языке сформулированная теорема означает, что если $(x^*, \mu^*) \in T$, то все достаточно близкие точки (x, μ) также принадлежат области T и $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (x, \mu) \in T, |x - x^*| < \delta, |\mu - \mu^*| < \delta :$

$$|\varphi(x, \mu) - \varphi(x^*, \mu^*)| < \varepsilon.$$

Заметим, что доказанная теорема будет справедлива, если в уравнение (3) будет входить несколько параметров.