ЛЕКЦИЯ 8

9.Простые особые точки. Особые решения.

Что будет, если не выполняются условия теоремы единственности ? Пусть в уравнении

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

в некоторой точке $(\bar{x}, \bar{y}) : f(\bar{x}, \bar{y}) = \infty$. Тогда можно рассмотреть уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}. \tag{2}$$

Если доопределить правую часть уравнения (2) в т.$(\bar{x}, \bar{y})$ нулем, если она будет непрерывна и удовлетворять условию Липшица, то через т.$(\bar{x}, \bar{y})$ будет проходить одна интегральная кривая с вертикальной касательной.

Часто на практике встречаются дифференциальные уравнения вида:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \tag{3}$$

Предположим, что в т.$(\bar{x}, \bar{y})$:

$$P(\bar{x}, \bar{y}) = Q(\bar{x}, \bar{y}) = 0. \tag{4}$$

Такие точки называются особыми точками типа $\frac{0}{0}$. Ограничимся пока примерами.

1.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}.$$

Для этого уравнения $(0, 0)$ - особая точка. Решая уравнение, имеем:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \Longrightarrow y = cx^2.$$

Таким образом, интегральными кривыми являются параболы. Оси координат также являются интегральными кривыми. Через особую точку $(0, 0)$ проходит бесконечное число интегральных кривых. Все интегральные кривые (за исключением $x = 0$) касаются прямой $y = 0$. Кривые с общей касательной образуют особую точку типа *узел*.

2.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Решение уравнения дает:

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0 \Longrightarrow xy = c.$$

Оси координат являются интегральными кривыми уравнения (они соответствуют $c = 0$). Через особую точку $(0, 0)$ здесь проходят две интегральные кривые. Такая особая точка называется *седлом*, а проходящие через нее интегральные кривые - *сепаратрисами.*

3.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Решая данное уравнение с разделяющимися переменными, находим:

$$xdx + ydy = 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 = c^2.$$

В данной ситуации через особую точку $(0, 0)$ не проходит ни одной интегральной кривой. Такую особую точку называют *центром.*

4.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}.$$

Уравнение является однородным, поэтому для его решения применяем замену функции: $y/x = z$. Тогда,

$$z + xz' = \frac{1+z}{1-z} \Longrightarrow xz' = \frac{1+z^2}{1-z} \Longrightarrow$$

$$\frac{(1-z)\,dz}{1+z^2} = \frac{dx}{x} \Longrightarrow \arctan z - \frac{1}{2}\ln\left(1+z^2\right) = \ln x - \ln c \Longrightarrow$$

$$\arctan\frac{y}{x} = \ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{c} \Longrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = c\exp\left\{\arctan\frac{y}{x}\right\}.$$

В полярных координатах решение записывается более просто

$$\rho = ce^{\varphi}.$$

Интегральными кривыми является семейство логарифмических спиралей. Спирали асимптотически приближаются к особой точке $(0, 0)$, однако через начало координат ни одна спираль не проходит. Это особая точка типа *фокус.*

Здесь рассмотрены так называемые *простые* особые точки, их всего четыре типа. Заметим, что бывают еще *сложные* особые точки.

Мы проанализировали случай, когда нарушается условие существования решения (разрыв правой части уравнения). Рассмотрим теперь ситуацию, когда нарушается условие Липшица. Точки, подозрительные на нарушение условия Липшица (нарушение единственности решения), удовлетворяют условию: $\partial f/\partial y \longrightarrow \infty$.

Если кривая, определяемая уравнением

$$\frac{1}{f'_y(x, y)} = 0, \tag{5}$$

является интегральной, и если через каждую ее точку проходят, по крайней мере, две интегральные кривые, то соответствующее данной интегральной кривой решение уравнения (1) называется *особым.* Заметим, что условие $f'_y(x,y)=\infty$ не является необходимым для появления особого решения.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx}=(y-x)^{2/3}+1.$$

Определим производную правой части по y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2}{3}(y-x)^{-1/3}.$$

Геометрическим местом точек, где $f'_y=\infty$, будет прямая $y=x$ (биссектриса главного координатного угла). Проверим, является ли она интегральной кривой. Подставляя $y=x$ в дифференциальное уравнение, приходим к тождеству: $1\equiv 1$.

Теперь решим само уравнение, применив замену переменной: $y-x=z$. Тогда,

$$1+z'=z^{2/3}+1\Longrightarrow z'=z^{2/3}\Longrightarrow \frac{dz}{z^{2/3}}=dx\Longrightarrow$$

$$3z^{1/3}=x-c\Longrightarrow y=x+\frac{(x-c)^3}{27}.$$

Интегральные кривые представляют собой семейство кубических парабол. Точки перегиба парабол, определяемые из условия: $y''=0$, имеют координаты (c,c), т.е. лежат на прямой $y=x$. Таким образом, через любую точку прямой $y=x$ проходят две интегральные кривые - нарушается единственность решения. Интегральная кривая $y=x$ - особое решение рассматриваемого дифференциального уравнения.

10. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной.

Уравнением первого порядка, не разрешенным относительно производной, называют дифференциальное уравнение вида

$$F(x,y,y')=0. \tag{6}$$

Рассмотрим сначала простые частные случаи уравнения (6).

1. Пусть функция F не зависит от x и y:

$$F(y')=0. \tag{7}$$

Предположим, что это уравнение имеет действительные корни $k_1,k_2,\ldots$ Тогда, $y'=k_i;\quad i=1,2,\ldots$ Отсюда, $y=k_ix+c$ - прямые. Поскольку, $k_i=(y-c)/x$, то

$$F\left(\frac{y-c}{x}\right)=0.$$

Это общий интеграл уравнения (7).

2. Пусть функция F не зависит от y:

$$F(x, y') = 0. \tag{8}$$

Не всегда это уравнение легко решается относительно y'. Если его удается разрешить, то $y' = \varphi(x)$ и

$$y = \int \varphi(x)\, dx + c.$$

Иногда удается подобрать две функции $x = \varphi(t), y' = \psi(t)$ такие, что

$$F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0.$$

Тогда уравнение (8) можно проинтегрировать в параметрической форме. В самом деле.

$$\frac{dy}{dx} = y' \Longrightarrow dy = y'dx = \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt.$$

Откуда

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \int \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt + c. \end{cases} \tag{9}$$

Уравнения (9) представляют собой общий интеграл уравнения (8) в параметрической форме. Действительно, если исключить параметр t, то получим общий интеграл.

Возникает вопрос: как находить на практике функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$? Иногда можно дать некоторые рекомендации. Пусть, например, имеем уравнение вида:

$$P(x, y') + Q(x, y') = 0,$$

где P и Q - однородные многочлены относительно x и y' (степени однородности в общем случае разные).

Пример.

$$x^3 + y'^3 - 3xy' = 0.$$

Применим параметризацию $y' = tx$. Заметим, что такую же параметризацию применяют в уравнении декартова листа: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Тогда,

$$x^3 + t^3x^3 - 3xtx = 0 \Longrightarrow x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y' = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$

Отсюда,

$$dy = \frac{9t^2}{1+t^3} \cdot \frac{(1+t^3) - 3t^3}{(1+t^3)^2} dt \Longrightarrow dy = \frac{9t^2}{(1+t^3)^3}\left(1 - 2t^3\right) dt.$$

Производя замену переменной $z = t^3$, вычисляем интеграл

$$y = 3\int \frac{(1-2z)}{(1+z)^3} dz = 3 \cdot (-2) \int \frac{dz}{(1+z)^2} + 9 \int \frac{dz}{(1+z)^3} =$$

$$= \frac{6}{1+z} - \frac{9}{2(1+z)^2} + c = \frac{3}{2} \cdot \frac{1+4z}{(1+z)^2} + c.$$

Окончательно,

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = \frac{3}{2} \cdot \frac{1+4t^3}{\left(1+t^3\right)^2} + c.$$

Предположим теперь, что уравнение (8) разрешается относительно x:

$$x = g\left(y'\right),$$

т.е. $F\left(g\left(y'\right), y'\right) \equiv 0$. В этом случае параметр ввести легко: $y' = h\left(t\right)$ - произвольная дифференцируемая функция. Тогда, $x = g\left(h\left(t\right)\right)$, и далее проводится интегрирование уравнения (8) в параметрической форме.