ЛЕКЦИЯ 9

3. Пусть, наконец, функция F не зависит от аргумента x:

$$F(y, y') = 0. \tag{1}$$

Если уравнение (1) разрешается относительно y', то далее все ясно - приходим к уравнению с разделяющимися переменными.

Надо поискать $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ такие, чтобы $y = \varphi(t)$, $y' = \psi(t)$ и $F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0$. Тогда,

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)}$$

и

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} + c, \\ y = \varphi(t), \end{cases}$$

- общий интеграл уравнения (1). Как найти $\varphi(t)$ и $\psi(t)$? Если уравнение (1) легко решается относительно y: $y = g(y')$ и

$$F(g(y'), y') \equiv 0.$$

Тогда можно взять $y' = h(t)$, $h(t)$ - произвольная дифференцируемая функция. В результате, $y = g(h(t))$ и далее по схеме.

Пример. Уравнение цепной линии.

В 1638 г. Галилей предложил следующий способ построения параболы. Возьмем цепочку, состоящую из мелких звеньев, и подвесим ее за края на одной высоте. При этом расстояние между точками подвеса меньше длины цепочки L. Далее проведем линию по границе провисшей цепочки. Галилей догадывался, что этот способ построения параболы не совсем точен.

Спрашивается, по какой же линии провисает цепочка ? Лишь спустя полвека Якоб Бернулли чисто теоретическим путем нашел точную формулу провисающей цепочки. Он сделал это в 1690 г. и призвал других решить ту же задачу. Правильное решение в 1691 г. опубликовали Гюйгенс, Лейбниц и братья Бернулли. Математический аппарат решения подобных задач возник в конце XVII века и получил название "Вариационного исчисления". Это наиболее красивая область математики, развитие которой позволило сформулировать вариационные принципы физики.

Один из таких принципов гласит: любая физическая система стремится занять в состоянии равновесия такое положение, в котором ее потенциальная энергия минимальна. Поэтому в задаче о провисающей цепочке надо найти потенциальную энергию цепочки и минимизировать ее. Подобная процедура приводит к дифференциальному уравнению 1-го порядка вида:

$$\frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = c.$$

Поскольку $y(0) = y_0, \quad y'(0) = 0$, то $c = y_0$. Полагаем

$$y' = \sinh t \Longrightarrow y = y_0 \cosh t \Longrightarrow dx = \frac{dy}{y'} = y_0 dt.$$

Отсюда,

$$x = y_0 t + c_1.$$

Из условий: $y = y_0$, $x = 0$ при $t = 0$, имеем: $c_1 = 0$. Поэтому окончательно

$$y = y_0 \cosh \frac{x}{y_0}.$$

4. Рассмотрим теперь уравнение общего вида

$$F\left(x, y, y'\right) = 0, \tag{2}$$

где функция F становится однородной относительно всех своих аргументов, если считать аргумент x измерения 1, аргумент y - измерения α, аргумент y' - измерения $(\alpha - 1)$, т.е.

$$F\left(\lambda x, \lambda^{\alpha} y, \lambda^{\alpha-1} y'\right) \equiv \lambda^m F\left(x, y, y'\right), \tag{3}$$

для $\forall x, y, y', \lambda$. Тогда, делая замену функции и аргумента: $x = e^t, y = z e^{\alpha t}$; t - новая независимая переменная, z - новая функция, находим:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}; \quad \frac{dx}{dt} = e^t \Longrightarrow \frac{dt}{dx} = e^{-t}.$$

Отсюда,

$$y' = \left(\frac{dz}{dt} + \alpha z\right) e^{\alpha t} e^{-t}.$$

Подставляя все в (2), (3), придем к:

$$F\left(e^t, z e^{\alpha t}, \left(\frac{dz}{dt} + \alpha z\right) e^{(\alpha-1)t}\right) \equiv e^{mt} F\left(1, z, \frac{dz}{dt} + \alpha z\right) = 0.$$

В этом уравнении отсутствует независимая переменная t, и оно принимает вид (1):

$$G\left(z, \frac{dz}{dt}\right) = 0,$$

которое решается указанным выше способом.

Общий случай введения параметра.

Рассмотрим снова уравнение (2) с функцией F общего вида. Предположим, что каким-то образом удалось представить

$$\begin{cases} x = \varphi\left(u, v\right) \\ y = \psi\left(u, v\right) \\ y' = \chi\left(u, v\right), \end{cases}$$

так что выполняется тождество по (u, v)

$$F\left(\varphi\left(u, v\right), \psi\left(u, v\right), \chi\left(u, v\right)\right) \equiv 0.$$

Покажем, что в этом случае удается перейти к уравнению, разрешенному относительно производной. В самом деле.

$$dy = y'dx \Longrightarrow \frac{\partial \psi}{\partial u}du + \frac{\partial \psi}{\partial v}dv = \chi\left(u, v\right)\left[\frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv\right].$$

Пусть u - новая независимая переменная, а v - новая функция. Тогда,

$$\frac{dv}{du} = \frac{\partial\psi/\partial u - \chi \cdot \partial\varphi/\partial u}{\chi \cdot \partial\varphi/\partial v - \partial\psi/\partial v}. \qquad (4)$$

Допустим, что мы нашли общее решение уравнения (4): $v = \omega\left(u, c\right)$. Тогда решение исходного уравнения (2) получается в виде:

$$\begin{cases} x = \varphi\left(u, \omega\left(u, c\right)\right), \\ y = \psi\left(u, \omega\left(u, c\right)\right). \end{cases}$$

Это общий интеграл уравнения (2) в параметрической форме.

Дифференциальные уравнения, разрешимые относительно x или y. Уравнения Лагранжа и Клеро.

Рассмотрим еще два частных случая, когда параметрическое представление получается просто. Пусть, например, уравнение (2) допускает представление в виде:

$$y = f\left(x, y'\right). \qquad (5)$$

Тогда в качестве вышеупомянутых параметров можно выбрать x и $y' = p$, т.е.

$$\begin{cases} x = x, \\ y = f\left(x, p\right), \\ y' = p. \end{cases}$$

В результате из равенства: $dy = y'dx$ имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp = pdx$$

или

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p - \partial f/\partial x}{\partial f/\partial p}.$$

Решая уравнение, получим: $p = \omega\left(x, c\right)$. Таким образом, общее решение исходного уравнения (5) имеет вид:

$$y = f\left(x, \omega\left(x, c\right)\right).$$

В том случае, когда уравнение (2) допускает запись в виде

$$x = g\left(y, y'\right) \qquad (6)$$

параметрами считаем y и $y' = p$, т.е.

$$\begin{cases} x = g(y, p), \\ y = y, \\ y' = p. \end{cases}$$

Тогда

$$dx = \frac{dy}{y'} \Longrightarrow \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial p} dp = \frac{dy}{p}.$$

Отсюда,

$$\frac{dp}{dy} = \frac{1/p - \partial g/\partial y}{\partial g/\partial p}.$$

Если мы получили решение уравнения в виде $p = \omega(y, c)$, то общее решение уравнения (6) таково

$$x = g(y, \omega(y, c)).$$

Пример.

Проанализируем уравнение вида

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \tag{7}$$

где φ и ψ - дифференцируемые функции. Данное уравнение, в которое переменные x и y входят линейно, носит название *уравнения Лагранжа.* Найдем общее решение данного уравнения. Обозначим $y' = p$. Тогда, $y = x\varphi(p) + \psi(p)$, и поэтому

$$dy = pdx = \varphi(p)\,dx + x\varphi'(p)\,dp + \psi'(p)\,dp. \tag{8}$$

Получилось линейное дифференциальное уравнение, если считать x - функцией, а p - независимой переменной:

$$[p - \varphi(p)]\frac{dx}{dp} - x\varphi'(p) = \psi'(p).$$

Может оказаться, что $p \equiv \varphi(p)$. Этот случай соответствует специальному уравнению Лагранжа, и мы рассмотрим его чуть позже. Предположим, что уравнение $p - \varphi(p) = 0$ имеет решения $p_1, p_2, \ldots$ Тогда при подстановке $p = p_i$ в уравнение (8) оно превращается в тождество. Значит

$$y = x\varphi(p_i) + \psi(p_i) \tag{9}$$

- интегральные прямые уравнения Лагранжа.

При $p \neq p_i$ имеем:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}. \tag{10}$$

Если применить методы решения линейных дифференциальных уравнений, то общее решение уравнения (10) можно записать в виде: $x = c\chi(p) + \omega(p)$. Вместе с выражением $y = x\varphi(p) + \psi(p)$ оно дает параметрическое представление искомого общего решения.

Проанализируем подробнее ситуацию, когда $p \equiv \varphi(p)$. В этом случае уравнение (7) превращается в

$$y = xy' + \psi(y'), \tag{11}$$

и носит название *уравнения Клеро*. Полагая $\varphi(p) = p$ в уравнении (8), придем к

$$[x + \psi'(p)]\, dp = 0.$$

Далее возможны два случая:

а) $dp = 0 \Longrightarrow p = c$, и тогда

$$y = xc + \psi(c) \tag{12}$$

- общее решение уравнения Клеро.

б) $x + \psi'(p) = 0$. Это уравнение определяет p как функцию $x : p = \omega(x)$. Тогда из (11) имеем:

$$y = x\omega(x) + \psi(\omega(x)). \tag{13}$$

Это будет также решение уравнения Клеро, причем особое. В каждой его точке нарушается единственность. В самом деле. Продифференцируем (12) по c. Тогда получим: $0 = x + \psi'(c)$.

В дифференциальной геометрии доказывается, что если имеется уравнение $\Phi(x, y, c) = 0$, то вместе с уравнением $\Phi'_c(x, y, c) = 0$ оно определяет *С-дискриминантную кривую*, и если к тому же

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 \neq 0$$

и $\partial\Phi/\partial x, \partial\Phi/\partial y$ ограничены, то С-дискриминантная кривая определяет огибающую семейства кривых.

Определение. *Огибающей семейства кривых* называется кривая, которая в каждой своей точке касается одной из кривых семейства.

Оказывается, всегда для уравнения Клеро С-дискриминантная кривая является огибающей. В самом деле: $\Phi(x, y, c) = xc + \psi(c) - y$. Тогда,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = c; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -1 \Longrightarrow c^2 + 1 \neq 0.$$

К тому же $\partial\Phi/\partial x, \partial\Phi/\partial y$ ограничены.

Пример.

Рассмотрим уравнение Клеро вида

$$y = xy' - y'^2.$$

Общее решение $y = xc - c^2$ - семейство прямых. Особое решение:

$$0 = x - 2c \Longrightarrow c = \frac{x}{2} \Longrightarrow y = x\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}.$$

Парабола $y = x^2/4$ разделяет плоскость на две области: в одной через каждую точку проходят две интегральные кривые, а в другой - ни одной (y' в одной области имеет два значения, а в другой - ни одного).