ЛЕКЦИЯ 10

Поговорим об особых решениях уравнения

$$F\left(x, y, y'\right) = 0.$$

Как следует из доказанной теоремы, особые решения могут быть, если:

1) $\partial F/\partial y$ - не ограничена;

2) $\partial F/\partial y' = 0$.

Первый случай на практике встречается редко. Поэтому остановимся подробнее на второй ситуации. Уравнения

$$\left\{ \begin{array}{l} F\left(x, y, y'\right) = 0, \\ F'_{y'}\left(x, y, y'\right) = 0 \end{array} \right.$$

определяют на плоскости кривую (y' - параметр), которая носит название *p-дискриминантной кривой.* Особое решение уравнения может входить в состав данной кривой.

Пример.

Рассмотрим уравнение Лагранжа

$$x - y = \frac{4}{9}\left(y'\right)^2 - \frac{8}{27}\left(y'\right)^3.$$

Составим уравнения p-дискриминантной кривой ($y' = p$):

$$x - y = \frac{4}{9}p^2 - \frac{8}{27}p^3; \qquad 0 = \frac{8}{9}p - \frac{8}{9}p^2.$$

Отсюда,

$$p\left(1 - p\right) = 0.$$

Возможны два варианта:

а) $p = 0 \Longrightarrow y = x$;

б) $p = 1 \Longrightarrow y = x - 4/27$.

Таким образом, p-дискриминантная кривая состоит из двух прямых. Являются ли они интегральными ? Проверим, подставив в исходное уравнение. В результате обнаруживаем, что $y = x$ не является решением, а $y = x - 4/27$ является решением уравнения. Найдем теперь общее решение уравнения.

$$y = x - \frac{4}{9}p^2 + \frac{8}{27}p^3 \Longrightarrow dy = dx - \frac{8}{9}pdp + \frac{8}{9}p^2 dp =$$

$$= dx + \frac{8}{9}p\left(p - 1\right)dp = y'dx = pdx.$$

В результате, с учетом того, что ($p \neq 1$), имеем

$$dx = \frac{8}{9}pdp \Longrightarrow x - c = \frac{4}{9}p^2, \quad y = c + \frac{8}{27}p^3.$$

Исключая параметр, находим:

$$(y-c)^2 = (x-c)^3$$

или

$$y = c \pm (x-c)^{3/2}\,.$$

Отсюда видно, что решение существует лишь при $x > c$, а точки (c, c) являются точками возврата. Эти точки лежат на биссектрисе $y = x$ главного координатного угла. В то же время,

$$y' = \pm\frac{3}{2}\,(x-c)^{1/2}\,.$$

Следовательно, верхние ветви полукубических парабол касаются прямой $y = x - 4/27$ в точках

$$\frac{3}{2}\,(x-c) = 1 \Longrightarrow x = c + \frac{4}{9}.$$

Таким образом, прямая $y = x - 4/27$ - огибающая семейства парабол и особое решение.

Теорема.

Огибающая семейства интегральных кривых всегда является особым решением дифференциального уравнения.

Доказательство:

каждая точка огибающей является одновременно и точкой интегральной кривой, поскольку в каждой своей точке она касается одной из интегральных кривых. Это означает, что в каждой своей точке огибающая имеет направление поля. Значит, она также является интегральной линией дифференциального уравнения, т.е. его решением. Но поскольку через каждую точку проходят два решения (в заданном направлении) - она сама и другая интегральная кривая, то огибающая является особым решением. ⊛

III. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.

1.Дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной.

Как мы уже отмечали, дифференциальным уравнением n-го порядка называется соотношение вида:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{1}$$

Допустим, что уравнение (1) разрешено относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right). \tag{2}$$

Далее удобно уравнение (2) свести к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Сделаем замены, вводя новые функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$y = y_1, y' = y_2, y'' = y_3, \ldots, y^{(n-1)} = y_n. \tag{3}$$

Тогда дифференциальное уравнение (2) будет эквивалентно следующей системе:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_3, \\ \cdots & \quad \cdots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} &= y_n, \\ \frac{dy_n}{dx} &= f\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Подобная система дифференциальных уравнений называется *нормальной*. Общий вид нормальной системы дифференциальных уравнений таков:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right), \\ \cdots & \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Вводя векторные обозначения: $\vec{y} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, $\vec{f} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, получаем сокращенную форму записи (5)

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}\left(x, \vec{y}\right).$$

Теорема существования и единственности решения нормальной системы дифференциальных уравнений.

Пусть:

1. Правые части системы (5) являются непрерывными функциями по совокупности аргументов $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ в некоторой области G $(n+1)$-мерного пространства, содержащей начальную точку $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$.

2. Существуют ограниченные производные:

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_k}\right| \leq N, \quad i = \overline{1, n}; k = \overline{1, n}.$$

Тогда система (5) имеет единственное решение:

$$y_1 = \varphi_1\left(x\right), y_2 = \varphi_2\left(x\right), \ldots, y_n = \varphi_n\left(x\right),$$

удовлетворяющее начальному условию:

$$\varphi_1\left(x_0\right) = y_1^0, \varphi_2\left(x_0\right) = y_2^0, \ldots, \varphi_n\left(x_0\right) = y_n^0$$

и определенное в некоторой окрестности начальной точки: $|x - x_0| \leq h$.

Без доказательства.

Заметим, что в векторной форме решение системы (5) записывается в виде $\vec{y} = \vec{\varphi}(x)$, причем $\vec{\varphi}(x_0) = \vec{y}_0$. Доказательство теоремы очень похоже на доказательство теоремы о существовании решения одного дифференциального уравнения первого порядка, поэтому здесь не приводится. Аналогичным образом доказывается возможность продолжения решения, непрерывная зависимость от начальных условий и т.д.

Поговорим о геометрической интерпретации решения системы дифференциальных уравнений. Общее решение системы представляет собой семейство интегральных кривых в $(n+1)$-мерном пространстве и зависит от n параметров (при фиксированном x_0 - параметры $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$). Отсюда следует вывод, что общее решение системы дифференциальных уравнений (5) зависит от n произвольных постоянных.

Частное решение $\vec{y} = \vec{\varphi}(x)$ можно интерпретировать как параметрически заданную (x - параметр) кривую в n-мерном пространстве $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, которую часто называют *траекторией движения* системы (5).

На основе сформулированной общей теоремы докажем теорему для уравнения (2).

Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной.

Пусть в уравнении (2) функция $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ непрерывна по совокупности переменных в некоторой области G $(n+1)$-мерного пространства и существуют ограниченные производные

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}\right| \le N, \quad k = \overline{0,1}$$

во всей области G. Начальная точка $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in G$.

Тогда, существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения (2), удовлетворяющее начальному условию $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$, т.е. $\varphi(x_0) = y_0, \varphi'(x_0) = y_0', \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, определенное в окрестности точки x_0: $|x - x_0| \le h$.

Доказательство.

Поскольку нормальная система (4), соответствующая уравнению (2), является частным случаем системы (5), то можно проверить условия теоремы для системы (5). Первые $(n-1)$ правых частей системы (4) удовлетворяют условиям теоремы существования: $f_k = y_{k+1}$ - непрерывны и

$$\frac{\partial f_k}{\partial y_i} = \delta_{i,k+1} = \begin{cases} 1, & i = k+1 \\ 0, & i \ne k+1 \end{cases} \quad \text{- символ Кронекера,}$$

т.е. они и ограничены. Остается рассмотреть правую часть последнего уравнения системы (4): $f_n = f$. Непрерывность функции f_n по совокупности переменных вытекает из условий теоремы и замен (3). Ограниченность $\partial f_k/\partial y_i$ следует из условий ограниченности $\partial f/\partial y^{(i)}$ и замен (3). Следовательно, все условия общей теоремы выполняются и в окрестности точки x_0: $|x - x_0| \le h$ существует единственное решение $y = \varphi(x)$. Каковы начальные условия для него ? Для общей системы это $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$, а на нашем языке - $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$, поскольку $y_1 = \varphi(x), y_2 = \varphi'(x), \ldots, y_n = \varphi^{(n-1)}(x)$ согласно (3). ⊠