ЛЕКЦИЯ 11

2.Частные случаи общего уравнения n-го порядка, допускающие понижение порядка.

Вернемся к уравнению общего вида

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

1.Предположим, что в уравнении (1) отсутствует функция y и несколько ее первых производных, т.е.

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \quad 1 \le k \le n.$$

Производя замену функции $y^{(k)} = z$, понижаем порядок уравнения до $(n-k)$:

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0.$$

2.Пусть в левой части уравнения (1) аргумент x явно не присутствует:

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Здесь удобно ввести новую независимую переменную y, а за функцию взять $y' = p$. Тогда,

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot p'_y;$$

$$y''' = \frac{d}{dy}(p \cdot p'_y) \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{d}{dy}(p\frac{dp}{dy}); \dots;$$

$$y^{(n)} = (p\frac{d}{dy})^{n-1}p.$$

Подставляя все в уравнение, придем к дифференциальному уравнению $(n-1)$-го порядка:

$$G\left(y, p, \dots, p^{(n-1)}\right) = 0.$$

3.Иногда левая часть уравнения представляет собой полную производную, т.е. уравнение приводится к виду:

$$\frac{d}{dx}\left[R\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)\right] = 0.$$

Тогда,

$$R\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) = c_1$$

и получаем дифференциальное уравнение $(n-1)$-го порядка.

4.Рассмотрим случай, когда левая часть уравнения (1) является однородной функцией относительно y и ее производных:

$$F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n-1)}, ty^{(n)}) = t^m \cdot F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}).$$

Произведем замену функции

$$y = e^{\int z\,dx}.$$

Тогда,

$$y' = z \cdot e^{\int z\,dx}; \quad y'' = \left(z' + z^2\right) e^{\int z\,dx}; \ldots;$$

$$y^{(n)} = e^{\int z\,dx} \cdot P_n\left(z, z', \ldots, z^{(n-1)}\right),$$

где P_n - полином. Подставляя все в уравнение, имеем:

$$F\left(x, e^{\int z\,dx}, z \cdot e^{\int z\,dx}, \ldots, e^{\int z\,dx} \cdot P_n\left(z, z', \ldots, z^{(n-1)}\right)\right) =$$

$$= \left\{t = e^{\int z\,dx}\right\} = e^{m \int z\,dx} F\left(x, 1, z, \ldots, P_n\left(z, z', \ldots, z^{(n-1)}\right)\right) = 0.$$

Отсюда,

$$H\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}\right) = 0 -$$

уравнение $(n-1)$-го порядка.

Иногда функция F является обобщенно-однородной, т.е.

$$F(tx, t^\alpha y, t^{\alpha-1} y', \ldots, t^{\alpha-n} y^{(n)}) = t^m \cdot F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}).$$

Тогда удобно произвести одновременную замену и аргумента и функции: $x = e^\tau, y = ze^{\alpha\tau}$. В результате,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{d\tau}\left(ze^{\alpha\tau}\right)\frac{d\tau}{dx} = e^{(\alpha-1)\tau}\left(\frac{dz}{d\tau} + \alpha z\right); \ldots;$$

$$y^{(k)} = e^{(\alpha-k)\tau} L_k\left(z, z', \ldots, z^{(k)}\right),$$

где L_k - линейная функция переменных. Подставляя все в уравнение, получим:

$$F(e^\tau, ze^{\alpha\tau}, e^{(\alpha-1)\tau} L_1, \ldots, e^{(\alpha-n)\tau} L_n) = \{t = e^\tau\} =$$

$$= e^{m\tau} F(1, z, L_1, \ldots, L_n) = 0.$$

Отсюда

$$F(1, z, L_1, \ldots, L_n) = 0.$$

Данное уравнение уже не содержит независимой переменной и поэтому допускает понижение порядка.

Пример. Закон сохранения энергии. Эволюционная модель Вселенной.

Рассмотрим одномерное уравнение Ньютона для координаты $x(t)$ частицы массы m, движущейся в поле потенциальных сил:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dU(x)}{dx}.$$

Уравнение не содержит независимой переменной - времени t. Производя замену $\dot{x} = v$, где v - скорость частицы, имеем: $\ddot{x} = v'_x \cdot v$. Поэтому,

$$mvv'_x = -\frac{dU}{dx} \Longrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{mv^2}{2} + U\right) = 0 \Longrightarrow \frac{mv^2}{2} + U = C.$$

Получили известный в физике *закон сохранения энергии.*

В 30-х годах двадцатого столетия Фридманом из уравнений *общей теории относительности* было найдено сферически симметричное решение, указавшее возможные сценарии развития Вселенной.

Основную идею этих решений можно понять на простой физической модели. Рассмотрим сферически симметричный рой материальных частиц массы m, заключенных в начальный момент времени $t = 0$ в сферу радиуса R_0. Определим дальнейшую эволюцию этого образования массы M, если начальные скорости частиц, расположенных на оболочке сферы равны v_0.

Запишем уравнение Ньютона для расстояния $R(t)$ от центра сферы до частицы оболочки:

$$m\ddot{R} = -\gamma \frac{mM}{R^2},$$

где γ - гравитационная постоянная. Умножим обе части уравнения на $2\dot{R}$

$$2\dot{R}\ddot{R} = -2\gamma M \frac{\dot{R}}{R^2} \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\dot{R}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{2\gamma M}{R}\right) \Longrightarrow \dot{R}^2 = \frac{2\gamma M}{R} + c.$$

Из начальных условий находим

$$c = v_0^2 - \frac{2\gamma M}{R_0}.$$

Рассмотрим сначала наиболее простой случай: $c = 0$. Тогда,

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} \Longrightarrow \sqrt{R}dR = \sqrt{2\gamma M}dt \Longrightarrow \frac{2}{3}R^{3/2} = \sqrt{2\gamma M}t + c_1.$$

Определяя константу c_1 из начального условия $R(0) = R_0$, приходим окончательно к

$$R = \left(R_0^{3/2} + 3\sqrt{\frac{\gamma M}{2}}t\right)^{2/3}.$$

В асимптотике $t \to \infty$ $\quad R(t) \sim t^{2/3} \to \infty$, т.е. радиус сферы увеличивается неограниченно со временем. Аналогичным образом ведет себя решение при $c > 0 \Longrightarrow v_0^2 > 2\gamma M/R_0$.

Пусть теперь $c < 0$. Тогда, обозначая $c = -w^2$, имеем:

$$R = \frac{2\gamma M}{\dot{R}^2 + w^2}.$$

Введем параметр соотношением $\dot{R} = w\cot(p/2)$. В результате получим

$$R = \frac{2\gamma M \sin^2(p/2)}{w^2} = \frac{\gamma M}{w^2}(1 - \cos p).$$

Наконец,

$$dt = \frac{dR}{\dot{R}} = \frac{\gamma M}{w^2} \cdot \frac{\sin p}{w\cot(p/2)}dp = \frac{2\gamma M}{w^3}\sin^2(p/2)\,dp = \frac{\gamma M}{w^3}(1 - \cos p)\,dp.$$

Отсюда,

$$t = \frac{\gamma M}{w^3} (p - \sin p) + c_1.$$

Параметрические уравнения

$$t = \frac{\gamma M}{w^3} (p - \sin p) + c_1,$$

$$R = \frac{\gamma M}{w^2} (1 - \cos p)$$

определяют циклоиду. Это означает, что за расширением сферы наступает сжатие.

Таким образом, при $v_0^2 \geq 2\gamma M/R_0$ мы имеем модель расширяющейся Вселенной, а при $v_0^2 < 2\gamma M/R_0$ - так называемый *коллапс* Вселенной. Режим сжатия будет иметь место при достаточно большой плотности вещества ρ

$$\rho > \frac{3}{8\pi} \cdot \frac{v_0^2}{\gamma R_0^2}.$$

В настоящее время Вселенная расширяется. Каков дальнейший сценарий - расширение или коллапс зависит от величины ρ, а этот параметр очень сложно оценить.

3.Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка.

Определение. *Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка* называют уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f(x), \tag{2}$$

в которое неизвестная функция и ее производные входят линейно. Будем считать функции $a_1(x), \ldots, a_n(x), f(x)$ непрерывными на отрезке $[a, b]$.

Теорема. Если функции $f(x)$ и $a_i(x), i = \overline{1,n}$ в уравнении (2) непрерывны на $[a, b]$, то в области $G : a < x < b, -\infty < y < \infty, \ldots, -\infty < y^{(n-1)} < \infty$ с начальной точкой $\left(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}\right)$ существует единственное решение линейного уравнения (2) $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее начальным условиям: $\varphi(x_0) = y_0, \varphi'(x_0) = y_0', \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ и определенное в окрестности т.$x_0 : |x - x_0| \leq h$.

Доказательство: перенесем все слагаемые, кроме $y^{(n)}$, в правую часть уравнения (2), приведя его к стандартной форме,

$$y^{(n)} = -a_1(x)\, y^{(n-1)} - \ldots - a_{n-1}(x)\, y' - a_n(x)\, y + f(x).$$

Проверим выполнение условий ранее доказанной теоремы для уравнения n-го порядка с

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = -\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, y^{(n-i)} + f(x).$$

Функция f непрерывна по совокупности переменных в области G в силу линейности по переменным $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ и условий теоремы о непрерывности $a_i(x)$ и $f(x)$. Далее, поскольку

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} = -a_{n-k}(x),$$

правая часть уравнения имеет непрерывные частные производные. Следовательно, на отрезке $[a, b]$ эти производные ограничены. Поэтому все условия общей теоремы выполнены, и существует единственное решение уравнения (2). ⊠

Заметим, что можно доказать существование и единственность решения линейного дифференциального уравнения n-го порядка методом последовательных приближений на всем интервале $a < x < b$ при начальных условиях $\varphi(x_0) = y_0, \varphi'(x_0) = y_0', \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, где значения $\left(y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}\right)$ - любые.

Уравнение (2) с $f(x) \neq 0$ носит название *неоднородного.* Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0 \tag{3}$$

называется *однородным*, соответствующим неоднородному уравнению (2). Уравнение (3) всегда имеет *тривиальное решение* $y = 0$, которое удовлетворяет нулевым начальным условиям $(x_0, 0, 0, \ldots, 0)$. В силу доказанной теоремы такое решение единственно.

Назовем выражение

$$\frac{d^n}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n(x) = \hat{L}$$

дифференциальным оператором. Такой оператор является линейным, поскольку обладает свойством

$$\hat{L}(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 \hat{L} y_1 + c_2 \hat{L} y_2$$

для $\forall c_1, c_2 \in \Re$.

4.Общая теория линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка.

Теорема 1. О линейной комбинации решений однородного дифференциального уравнения.

Если функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_k(x)$ есть решения однородного уравнения (3), т.е. $\hat{L}y_1 = \hat{L}y_2 = \ldots = \hat{L}y_k = 0$, то их линейная комбинация $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_k y_k(x)$ ($c_1, c_2, \ldots, c_k$ - произвольные постоянные) также является решением.

Доказательство: воспользуемся свойством линейности оператора $\hat{L}$. Тогда,

$$\hat{L}\left[\sum_{i=1}^{k} c_i y_i(x)\right] = \sum_{i=1}^{k} c_i \hat{L} y_i(x) = 0.$$

Значит, линейная комбинация - также решение. ⊠

В связи с доказанной теоремой возникает мысль, как построить общее решение дифференциального уравнения (3). Такое решение содержит n констант. Поэтому нужно взять n линейно независимых решений и построить их линейную комбинацию.

Теорема 2. Об определителе Вронского системы линейно зависимых функций.

Если $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ - линейно зависимые, достаточное число раз дифференцируемые функции, то определитель Вронского тождественно равен нулю.

Доказательство: по определению *определителем Вронского* (*вронскианом*) системы функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называется определитель вида

$$W(x) = W(y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Исходим из линейной зависимости функций:

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \Re \qquad \left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 \neq 0\right)$$

такие, что:

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0.$$

Продифференцируем соотношение последовательно $(n-1)$ раз и составим систему

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0, \\ \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + \ldots + \alpha_n y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)} + \alpha_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)} = 0. \end{cases}$$

Полученную систему можно рассматривать как алгебраическую систему уравнений относительно неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, которая при $\forall x$, в соответствии с условием $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 \neq 0$, имеет ненулевое решение. Значит, для $\forall x$ определитель системы, а это $W(x) = 0$. ⊛