ЛЕКЦИЯ 12

Теорема 3. О линейно независимых решениях однородного дифференциального уравнения.

Пусть $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ - линейно независимые решения однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0. \qquad (1)$$

Тогда определитель Вронского $W(x)$ не обращается в нуль ни в одной из точек отрезка $[a, b]$.

Доказательство: *"от противного"*

Предположим, что при некотором $x = x_0 \in [a, b]: \quad W(x) = 0$. Значит,

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} & \cdots & y_{n0} \\ y'_{10} & y'_{20} & \cdots & y'_{n0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{10}^{(n-1)} & y_{20}^{(n-1)} & \cdots & y_{n0}^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0,$$

где $y_{k0}^{(s)} = y_k^{(s)}(x_0)$. Составим систему

$$\begin{cases} c_1 y_{10} + c_2 y_{20} + \ldots + c_n y_{n0} = 0, \\ c_1 y'_{10} + c_2 y'_{20} + \ldots + c_n y'_{n0} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1 y_{10}^{(n-1)} + c_2 y_{20}^{(n-1)} + \ldots + c_n y_{n0}^{(n-1)} = 0. \end{cases}$$

- это система однородных уравнений с неизвестными $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Система имеет ненулевое решение, поскольку ее определитель $W(x_0) = 0$. Обозначим через $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_n$ нетривиальное решение системы и составим функцию

$$y(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2 y_2(x) + \ldots + \bar{c}_n y_n(x).$$

В силу доказанной теоремы 1 эта функция является решением однородного уравнения (1). В то же время, согласно первому уравнению системы $y(x_0) = 0$, согласно второму - $y'(x_0) = 0$, и т.д., наконец, в силу последнего из уравнений - $y^{(n-1)}(x_0) = 0$. Таким образом, построенное решение удовлетворяет нулевым начальным условиям $(x_0, 0, \ldots, 0)$. Значит, по теореме единственности $y(x) \equiv 0$.

Отсюда

$$\bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2 y_2(x) + \ldots + \bar{c}_n y_n(x) \equiv 0,$$

причем не все $\bar{c}_i$ равны нулю. В результате получили линейную зависимость решений, что противоречит условиям теоремы. Значит, определитель Вронского $W(x) \neq 0$ ни в одной точке из $[a, b]$. $\boxtimes$

Следствия теорем 2 **и** 3. Поскольку система n решений линейного дифференциального уравнения (1) может быть линейно зависимой, либо линейно независимой, то определитель Вронского, соответственно, либо тождественно равен нулю, либо не обращается в нуль ни в одной точке.

Таким образом, если $W(x)$ для системы n решений равен нулю в одной точке, то он тождественно равен нулю, и решения линейно зависимы.

Определение. Система n линейно независимых решений однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка называется *фундаментальной.*

Теорема 4. О существовании фундаментальной системы решений.

Линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка всегда имеет фундаментальную систему решений.

Доказательство: выберем n^2 действительных чисел a_{ik} таким образом, чтобы $\det\{a_{ik}\} \neq 0$. Построим систему решений линейного однородного уравнения (1) следующим образом.

Первое решение определим так, чтобы при $x = x_0 : y_1(x_0) = a_{11}, y_1'(x_0) = a_{21}, \ldots, y_1^{(n-1)}(x_0) = a_{n1}$. По теореме существования такое решение единственно. Определим второе решение $y_2(x)$ так, чтобы для него начальными условиями были $(x_0, a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2})$. И т.д. Аналогично для $y_n(x)$ за начальные условия берем $(x_0, a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn})$. По построению, для этой системы решений $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)\ |_{x=x_0} \neq 0$. Следовательно, данная система решений линейно независима, т.е. фундаментальна. ⊠

Теорема 5. О линейном преобразовании фндаментальной системы решений.

Если фундаментальную систему решений подвергнуть линейному невырожденному преобразованию, то получится снова фундаментальная система решений.

Доказательство: рассмотрим новую систему функций $\vec{z} = (z_1 \quad z_2 \quad \ldots \quad z_n)$, которая получается линейным невырожденным преобразованием из фундаментальной системы $\vec{y} = (y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_n)$:

$$\vec{z} = \vec{y}\mathbf{A}^T \text{ или } z_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k,$$

причем $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T \neq 0$.

Поскольку y_k - решения однородного дифференциального уравнения (1), то их линейные комбинации z_i также являются решениями (см.теорему 1). Докажем фундаментальность системы решений $\vec{z}$. Составим матрицу

$$\begin{pmatrix} \vec{z} \\ \vec{z}' \\ \ldots \\ \vec{z}^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{y}\mathbf{A}^T \\ \vec{y}'\mathbf{A}^T \\ \ldots \\ \vec{y}^{(n-1)}\mathbf{A}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{y} \\ \vec{y}' \\ \ldots \\ \vec{y}^{(n-1)} \end{pmatrix} \mathbf{A}^T.$$

Отсюда

$$W(z_1, z_2, \ldots, z_n) = W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \cdot \det \mathbf{A}.$$

В силу фундаментальности исходной системы $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ определитель Вронского $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$ (см.теорему 3), а поскольку линейное преобразование невырождено - и $\det \mathbf{A} \neq 0$. Поэтому, при любых x определитель Вронского $W(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ системы решений $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ отличен от нуля. Значит, в соответствии со следствием к теоремам 2, 3 новая система решений однородного дифференциального уравнения также фундаментальна. ⊠

Следствие. Существует бесчисленное множество фундаментальных систем решений однородного дифференциального уравнения (1).

Теорема 6. О структуре общего решения однородного дифференциального уравнения.

Пусть $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ - фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения (1). Тогда его общее решение имеет вид

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x). \tag{2}$$

Доказательство: функция, определенная равенством (2), является решением однородного дифференциального уравнения (1) по теореме 1. Докажем, что $y(x)$ - общее решение, т.е. что при любых начальных условиях можно подобрать постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_n$ так, чтобы получилось частное решение, удовлетворяющее взятым начальным условиям.

Пусть функции $a_i(x), \quad i = \overline{1, n}$, входящие в уравнение (1), непрерывны на $[a, b]$. Возьмем значение $x_0 \quad (a < x_0 < b)$ и зададим начальные условия $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$. Обозначим $y_k(x_0) = y_{k0}, y_k^{(i)}(x_0) = y_{k0}^{(i)} \quad \left(i = \overline{1, n-1}\right)$. Составим систему уравнений, используя (2) и начальные условия,

$$\begin{cases} c_1 y_{10} + c_2 y_{20} + \ldots + c_n y_{n0} = y_0, \\ c_1 y'_{10} + c_2 y'_{20} + \ldots + c_n y'_{n0} = y'_0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1 y_{10}^{(n-1)} + c_2 y_{20}^{(n-1)} + \ldots + c_n y_{n0}^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

Полученная система является неоднородной алгебраической системой уравнений относительно неизвестных $c_1, c_2, \ldots, c_n$ с определителем $W(x_0)$. Поскольку по условиям теоремы система решений $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ - фундаментальна, определитель Вронского $W(x)$ в любой точке отличен от нуля (см. теорему 3), в частности, и $W(x_0) \neq 0$. Следовательно, линейная алгебраическая система уравнений имеет единственное решение $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_n$. В результате нам удалось построить на основе (2) единственное частное решение

$$y(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2 y_2(x) + \ldots + \bar{c}_n y_n(x),$$

удовлетворяющее заданным начальным условиям. ⊛

Теорема 7. О количестве линейно независимых решений.

Максимальное число линейно независимых решений однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка равно порядку уравнения.

Доказательство: нам достаточно показать, что любые $(n+1)$ решений дифференциального уравнения (1) всегда линейно зависимы. Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}$ - любые решений уравнения (1). Рассмотрим два случая: а) первые n решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ - линейно зависимы, т.е. $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \Re \quad (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 \neq 0)$ такие, что

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0.$$

Тогда система $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}$ также линейно зависима, поскольку

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n + 0 \cdot y_{n+1} = 0;$$

б) пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ - линейно независимая система решений. Тогда она является фундаментальной, и по теореме 6 любое другое решение может быть представлено в виде линейной комбинации решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$, в частности, и y_{n+1}. Таким образом, всегда найдутся постоянные $\beta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$, для которых

$$y_{n+1} = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_n y_n.$$

Это и означает, что система решений $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}$ линейно зависима. ⊠

Замечание. Все доказанные теоремы можно подытожить так: множество решений однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка образует линейное n-мерное векторное пространство, базисом которого является фундаментальная система решений.

Теорема 8. О тождественности линейных однородных дифференциальных уравнений.

Если два линейных однородных дифференциальных уравнения с коэффициентами при старшей производной, равными единице, имеют одну и ту же фундаментальную систему решений, то они тождественны.

Доказательство: предположим, что имеются два линейных однородных дифференциальных уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0,$$

$$y^{(n)} + b_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}(x)\, y' + b_n(x)\, y = 0,$$

имеющие одну и ту же фундаментальную систему решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Вычитая одно уравнение из другого, получим:

$$[a_1(x) - b_1(x)]\, y^{(n-1)} + \ldots + [a_n(x) - b_n(x)]\, y = 0. \tag{3}$$

Функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ обращают это уравнение в тождество, поскольку они являются решениями как уравнения с коэффициентами $a_i(x)$ так и уравнения с коэффициентами $b_i(x)$. Допустим, что $\exists i$ такое, что в точке $x = x_0$: $a_i(x_0) \neq b_i(x_0)$. Тогда, в силу непрерывности функций $a_i(x)$ и $b_i(x)$ неравенство имеет место и в некоторой окрестности точки x_0, т.е. $a_i(x) - b_i(x) \neq 0$. Поделим уравнение (3) на первую отличную от нуля разность $[a_k(x) - b_k(x)]$. Тогда получим дифференциальное уравнение порядка не выше $(n-1)$ с коэффициентом при старшей производной, равном единице. Более того, коэффициенты этого уравнения будут непрерывными функциями в некотором интервале. Данное уравнение имеет фундаментальную систему решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$, однако, по теореме 7 максимальное число линейно независимых решений такого уравнения не превосходит его порядка, т.е. $(n-1)$. Пришли к противоречию. Значит, для $\forall i, x$: $a_i(x) \equiv b_i(x)$. ⊠