ЛЕКЦИЯ 13

Следствие. Фундаментальная система решений однозначно определяет линейное однородное дифференциальное уравнение.

Указанное следствие позволяет сформулировать следующую задачу.

Задача. Задана фундаментальная система решений некоторого линейного однородного дифференциального уравнения. Построить дифференциальное уравнение, которое имеет эту фундаментальную систему решений.

Решение.

Пусть $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ - система линейно независимых n раз дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$. Составим определитель

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' & y' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Данное равенство представляет собой однородное линейное дифференциальное уравнение n-го порядка для неизвестной функции $y(x)$. Подстановка вместо $y(x)$ любой функции $y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ обращает уравнение в тождество (возникают два одинаковых столбца в определителе). Это означает, что функции $y_i(x)$ являются линейно независимыми решениями построенного уравнения, т.е. его фундаментальной системой решений. Коэффициентом при старшей производной $y^{(n)}$, входящей в уравнение, является определитель Вронского $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Для фундаментальной системы решений $W(x) \neq 0$ ни в одной точке отрезка $[a, b]$, и поэтому на него можно поделить обе части уравнения. Раскладывая определитель по последнему столбцу и деля обе части равенства на $W(x)$, придем к однородному линейному дифференциальному уравнению вида:

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0, \tag{1}$$

где

$$a_i(x) = (-1)^i \frac{\Delta_i(x)}{W(x)},$$

$$\Delta_i(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-i-1)} & y_2^{(n-i-1)} & \cdots & y_n^{(n-i-1)} \\ y_1^{(n-i+1)} & y_2^{(n-i+1)} & \cdots & y_n^{(n-i+1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

В частности,

$$a_1(x) = -\frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Таким образом, искомое уравнение построено.

Формула Лиувилля.

Выведем сначала формулу дифференцирования функционального определителя. Рассмотрим производную

$$\frac{d\Delta(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

Воспользуемся формулой для определителя

$$\Delta(x) = \sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)} (-1)^r a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n},$$

где сумма содержит $n!$ слагаемых, соответствующих различным упорядоченным множествам $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, получаемым r попарными перестановками (транспозициями) элементов из множества $(1, 2, \ldots, n)$. Тогда,

$$\frac{d\Delta(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)} (-1)^r a_{1k_1}(x) a_{2k_2}(x) \ldots a_{nk_n}(x)\right] = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i(x),$$

где

$$\Delta_i(x) = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1}(x) & a'_{i2}(x) & \cdots & a'_{in}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

Применяя найденную формулу, подсчитаем производную определителя Вронского $W'(x)$.

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Поскольку все определители, кроме последнего, зануляются (содержат одинаковые строки), то в соответствии с формулой (2)

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = -a_1(x)\, W(x).$$

Решая полученное дифференциальное уравнение первого порядка, находим:

$$W(x) = c \exp\left(-\int a_1(x)\, dx\right)$$

или

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(t)\, dt\right). \tag{3}$$

Формула (3) и называется *формулой Лиувилля.* Из нее отчетливо видно, что если $W(x) = 0$ в одной точке, то он тождественно равен нулю.

На практике выведенную формулу Лиувилля можно с успехом применять для отыскания взаимосвязи фундаментальных решений линейного однородного дифференциального уравнения. Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка общего вида

$$y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = 0.$$

Пусть известно частное решение $y_1(x)$ этого уравнения. Построим систему фундаментальных решений, взяв в качестве одного из них $y_1(x)$, а второе определив из формулы Лиувилля. В самом деле, согласно (3)

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = c \exp\left(-\int a_1(x)\, dx\right).$$

Отсюда,

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = c \exp\left(-\int a_1(x)\, dx\right)$$

или

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{c}{y_1^2} \exp\left(-\int a_1(x)\, dx\right).$$

Проводя интегрирование, получаем формулу связи фундаментальных решений в виде двух квадратур

$$y_2(x) = y_1(x) \int \exp\left(-\int a_1(x)\, dx\right) \frac{dx}{y_1^2(x)}. \tag{4}$$

(константа c отнесена в множитель функции $y_1(x)$).

<u>Пример</u>. Допустим, нам известно одно из фундаментальных решений уравнения второго порядка: $y_1(x) = \cos x$. Выведенная формула (4) позволяет найти второе фундаментальное решение при заданном коэффициенте $a_1(x)$ при y', а затем построить само дифференциальное уравнение и записать его общее решение. Положим для простоты $a_1(x) = 0$. Тогда,

$$y_2(x) = \cos x \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \cos x \cdot \tan x = \sin x.$$

Построим теперь по известной фундаментальной системе $\{\cos x, \sin x\}$ линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Составим определитель

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x & y \\ -\sin x & \cos x & y' \\ -\cos x & -\sin x & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Складывая первую и третью строки и разлагая определитель по третьей строке, придем к известному уравнению математического маятника

$$y'' + y = 0,$$

общее решение которого имеет вид:

$$y\left(x\right) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Пример. Найдем общее решение дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Поскольку коэффициенты уравнения являются полиномами, частное решение можно поискать также в виде полинома некоторой степени k

$$y\left(x\right) = x^k + b_1 x^{k-1} + \ldots b_{k-1} x + b_k.$$

Подставим это выражение в уравнение.

$$k\left(k-1\right) x^{k-2} + \ldots - 2x\left[k x^{k-1} + \left(k-1\right) b_1 x^{k-2} \ldots\right] + 2x^k + 2b_1 x^{k-1} + \ldots = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при старшей степени x, определяем степень полинома: $k = 1$. Следовательно, частное решение следует искать в виде линейной функции $y = x + b_1$. Подставляя ее в уравнение, найдем:

$$-2x + 2x + 2b_1 = 0 \Longrightarrow b_1 = 0.$$

Таким образом, частное решение рассматриваемого уравнения имеет вид: $y_1\left(x\right) = x$.

По формуле (4) определяем второе линейно независимое решение

$$y_2\left(x\right) = x \int \exp\left\{\int 2x dx\right\} \frac{dx}{x^2} = x \int e^{x^2} \frac{dx}{x^2} = x\left(-\frac{e^{x^2}}{x} + 2\int e^{x^2} dx\right) =$$

$$= 2x \int e^{x^2} dx - e^{x^2}.$$

Заметим, что второе решение не выражается через элементарные функции, но быстро нарастает при $|x| \to \infty$. Общее решение уравнения таково

$$y = c_1 x + c_2 \left(2x \int e^{x^2} dx - e^{x^2}\right).$$

Понижение порядка однородного линейного дифференциального уравнения.

Как понизить порядок однородного линейного дифференциального уравнения ? Один прием мы рассматривали ранее - замену функции

$$y = \exp\left\{\int z dx\right\}.$$

При этом уравнение для новой функции $z(x)$ оказывается уже нелинейным. Оказывается, если известно какое-либо частное решение $y_1(x)$, то порядок уравнения можно понизить, сохранив его линейность.

Введем новую функцию $z(x)$ соотношением $y = y_1 z$. Тогда,

$$y' = y_1' z + y_1 z'; \quad y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z''; \ldots;$$

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(k)} z^{(n-k)} = y_1^{(n)} z + n y_1^{(n-1)} z' + \ldots + y_1 z^{(n)}.$$

Подставляя все в однородное дифференциальное уравнение (1), придем к

$$z\hat{L}y_1(x) + b_{n-1}(x) z' + \ldots + b_1(x) z^{(n-1)} + y_1(x) z^{(n)} = 0,$$

где оператор $\hat{L}$, по-прежнему,

$$\hat{L} = \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + a_n(x).$$

Поскольку $y_1(x)$ - решение дифференциального уравнения, $\hat{L}y_1(x) = 0$, и в результате получаем линейное однородное уравнение, не содержащее явно функции z. Вводя еще одну функцию $u = z'$ и деля обе части уравнения на функцию $y_1(x)$, приходим к

$$u^{(n-1)} + d_1(x) u^{(n-2)} + \ldots + d_{n-1}(x) u = 0,$$

где $d_i = b_i/y_1$. Полученное уравнение $(n-1)$-го порядка имеет фундаментальную систему решений $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$. Вспоминая замены: $u = (y/y_1)'$, для исходного дифференциального уравнения находим систему решений:

$$y_1, y_1\int u_1 dx, y_1\int u_2 dx, \ldots, y_1\int u_{n-1} dx.$$

Докажите самостоятельно, что если система $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ - *фундаментальная, то полученная система решений также фундаментальна.*

5.Линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка.

Поговорим теперь о свойствах решений неоднородного уравнения

$$\hat{L}y = y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = f(x). \quad (5)$$

Теорема 1. О структуре общего решения неоднородного уравнения.

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения является суперпозицией частного решения неоднородного уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Доказательство: пусть $Y(x)$ - частное решение уравнения (5), т.е. $\hat{L}Y = f(x)$. Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ - фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения, т.е. $\hat{L}y_k = 0, k = \overline{1,n}$. Докажем, что функция

$$y = Y + c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n \tag{6}$$

является общим решением дифференциального уравнения (5).

Покажем вначале, что это просто решение. В самом деле, в силу линейных свойств оператора $\hat{L}$

$$\hat{L}(Y + c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n) = \hat{L}Y + c_1 \hat{L}y_1 + \ldots + c_n \hat{L}y_n \equiv f(x).$$

Докажем теперь общность решения. Зададим произвольные начальные условия $\left(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}\right)$. Подставляя функцию (6) в начальные условия и вводя обозначения $Y^{(k)}(x_0) \equiv Y_0^{(k)}, y_i^{(k)}(x_0) \equiv y_{i0}^{(k)}$, придем к системе уравнений

$$\begin{cases} Y_0 + c_1 y_{10} + \ldots + c_n y_{n0} = y_0, \\ Y_0' + c_1 y_{10}' + \ldots + c_n y_{n0}' = y_0', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_0^{(n-1)} + c_1 y_{10}^{(n-1)} + \ldots + c_n y_{n0}^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

Это - неоднородная система алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_n$ с определителем $W(x_0) \neq 0$. Такая система имеет единственное решение: $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_n$. Следовательно, функция

$$y = Y + \bar{c}_1 y_1 + \ldots + \bar{c}_n y_n$$

определяет частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. ⊠

Теорема 2. Принцип суперпозиции.

Пусть правая часть неоднородного уравнения (5)

$$f(x) = \sum_i \alpha_i f_i(x)$$

и $Y_i(x)$ - частные решения дифференциальных уравнений: $\hat{L}Y_i = f_i(x) \quad \left(i = \overline{1,n}\right)$. Тогда суперпозиция

$$Y = \sum_i \alpha_i Y_i$$

является частным решением дифференциального уравнения (5).

Доказательство: проверим, что функция

$$Y = \sum_i \alpha_i Y_i$$

удовлетворяет неоднородному уравнению. В самом деле:

$$\hat{L}\left(\sum_i \alpha_i Y_i\right) = \sum_i \alpha_i \hat{L} Y_i = \sum_i \alpha_i f_i = f\left(x\right). \qquad \boxed{*}$$