ЛЕКЦИЯ 14

Метод вариации произвольных постоянных для отыскания частного решения неоднородного уравнения.

Покажем, что с помощью известной фундаментальной системы решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейного однородного уравнения можно найти частное решение неоднородного дифференциального уравнения

$$\hat{L}y = y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f(x) \tag{1}$$

и, следовательно, построить его общее решение. Воспользуемся тем, что общее решение однородного уравнения представляется в виде суперпозиции

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n. \tag{2}$$

Совершенно ясно, что ни при каких постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_n$ функция (2) не будет решением неоднородного уравнения (1). Попытаемся, считая постоянные функциями $x : c_i = c_i(x)$, подобрать их так, чтобы функция (2) стала решением неоднородного уравнения (1).

Поскольку вместо одной неизвестной функции $y(x)$ мы ввели n функций, то мы имеем право наложить $(n-1)$ условий на $c_i(x)$ так, как нам удобно. Продифференцируем обе части выражения (2)

$$y' = c_1' y_1 + c_2' y_2 + \ldots + c_n' y_n + c_1 y_1' + c_2 y_2' + \ldots + c_n y_n'.$$

Потребуем, чтобы y' имела такое же выражение как и при постоянных c_i, т.е. положим

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 + \ldots + c_n' y_n = 0. \tag{3}$$

Дифференцируя еще раз соотношение для

$$y' = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k',$$

находим:

$$y'' = \sum_{k=1}^{n} c_k' y_k' + \sum_{k=1}^{n} c_k y_k''.$$

Опять потребуем, чтобы выражение для y'' выглядело также как и при постоянных c_i. В результате получаем еще одно условие

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' + \ldots + c_n' y_n' = 0. \tag{4}$$

Поступая далее аналогичным образом, можно придти к выражению для $(n-1)$ производной вида

$$y^{(n-1)} = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k^{(n-1)},$$

наложив $(n-1)$ вспомогательных условий на функции $c_i(x)$. Последнее из этих условий таково:

$$c_1' y_1^{(n-2)} + c_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + c_n' y_n^{(n-2)} = 0. \tag{5}$$

Продифференцируем соотношение для $(n-1)$-ой производной еще раз. В результате придем к

$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} c_k' y_k^{(n-1)} + \sum_{k=1}^{n} c_k y_k^{(n)}.$$

Подстановка выражений для производных в уравнение (1) дает:

$$\hat{L}\left(\sum_{k=1}^{n} c_k y_k\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k' y_k^{(n-1)} + \sum_{k=1}^{n} c_k \hat{L} y_k = f(x).$$

Поскольку функции $y_k(x)$ - решения однородного уравнения: $\hat{L} y_k = 0$, и мы получаем еще одно уравнение для производных функций $c_i(x)$:

$$c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + c_n' y_n^{(n-1)} = f(x). \tag{6}$$

Собирая уравнения (3-6), получаем неоднородную систему алгебраических уравнений для производных неизвестных функций $c_i(x)$:

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 + \ldots + c_n' y_n = 0, \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + \ldots + c_n' y_n' = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1' y_1^{(n-2)} + c_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + c_n' y_n^{(n-2)} = 0, \\ c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + c_n' y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \tag{7}$$

В силу фундаментальности системы решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ определитель неоднородной системы (7), являющийся определителем Вронского, $W(x) \neq 0$ для любых x. Поэтому неоднородная система имеет единственное решение: $c_1' = \varphi_1(x), c_2' = \varphi_2(x), \ldots, c_n' = \varphi_n(x)$. Интегрируя эти соотношения (без произвольных постоянных), находим $c_1(x), c_2(x), \ldots, c_n(x)$. Подставляя эти выражения в (2), определяем частное решение неоднородного уравнения (1). Рассмотренный метод связан с достаточно сложными расчетами (решение линейной системы n-го порядка и последующее взятие n квадратур), но позволяет найти частное решение при любой функции $f(x)$.

6. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Комплекснозначные функции.

Определение. Если каждому числу $x \in E \subset \Re$ по некоторому закону поставлено в соответствие комплексное число w, то говорят, что на множестве E задана *комплекснозначная* функция $w = w(x)$.

Поскольку любое комплексное число представляется в виде $w = u + iv$, где u - его действительная часть, v - мнимая часть; то задание комплекснозначной функции $w = w(x)$ эквивалентно заданию двух функций действительного переменного x :

$u = u(x), v = v(x)$. Если $u(x)$ и $v(x)$ - дифференцируемые функции, то $w'(x) = u'(x) + iv'(x)$.

Если $\lambda = \alpha + i\beta$ - комплексное число, то по определению

$$e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta).$$

При $\alpha = 0$ отсюда имеем

$$e^{i\beta} = \cos\beta + i\sin\beta,$$

что совпадает с известной *формулой Эйлера.* Так определяется функция с комплексным показателем. Заменяя β на $-\beta$, имеем:

$$e^{-i\beta} = \cos\beta - i\sin\beta.$$

Складывая и вычитая левые и правые части последних двух равенств, получаем:

$$\cos\beta = \frac{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}{2}, \quad \sin\beta = \frac{e^{i\beta} - e^{-i\beta}}{2i}.$$

Для функции $y = e^{\lambda x}$, где $\lambda = \alpha + i\beta$, в соответствии с определением имеем:

$$y = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x).$$

Установим правило дифференцирования этой функции. Рассмотрим сначала производную

$$\left(e^{i\beta x}\right)' = (\cos\beta x + i\sin\beta x)' = -\beta\sin\beta x + i\beta\cos\beta x =$$
$$= i\beta(\cos\beta x + i\sin\beta x) = i\beta e^{i\beta x}.$$

В общем случае

$$y' = \left(e^{\lambda x}\right)' = \left(e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x}\right)' = \left(e^{\alpha x}\right)' e^{i\beta x} + e^{\alpha x}\left(e^{i\beta x}\right)' =$$
$$= \alpha e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x} + i\beta e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x} = (\alpha + i\beta)e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}.$$

Это означает, что функция $y = e^{\lambda x}$ $(\lambda = \alpha + i\beta)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y.$$

Его общее решение таково

$$y = ce^{\lambda x}, \text{ где } c = c_1 + ic_2.$$

Утверждение.

Если комплекснозначная функция $y(x) = u(x) + iv(x)$ является решением линейного однородного дифференциального уравнения $\hat{L}y = 0$, то ее действительная часть $u(x)$ и мнимая часть $v(x)$ являются решениями того же уравнения.

Доказательство: в силу линейных свойств дифференциального оператора $\hat{L}$ и определения производных комплекснозначной функции

$$\hat{L}y = \hat{L}(u + iv) = \hat{L}u + i\hat{L}v = 0.$$

Комплексное число равно нулю тогда и только тогда, когда обращаются одновременно в нуль его действительная и мнимая части. Значит, $\hat{L}u = 0, \hat{L}v = 0.$ ⊠

Операторные многочлены и их свойства.

Перейдем к анализу линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{8}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n = const$. Попытаемся найти фундаментальную систему решений уравнения (8). Введем *оператор дифференцирования* $D : y' = Dy$. Тогда $y'' = (y')' = D\,(Dy) = D^2 y, \ldots, y^{(n)} = D^n y$. Уравнение (8) при этом примет вид

$$D^n y + a_1 D^{n-1} y + \ldots + a_{n-1} D y + a_n y = 0$$

или

$$\left(D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n\right) y = 0.$$

Многочлен, стоящий перед функцией y, является многочленом от оператора дифференцирования и носит название *операторного многочлена* $M\,(D)$:

$$M\,(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} D^k \qquad (a_0 = 1)\,.$$

Уравнение (8) принимает компактный вид: $M\,(D)\,y = 0$.

Отметим основные свойства операторных многочленов.

1. Закон сложения (ассоциативность):

$$\left[M\,(D) + N\,(D)\right] y = M\,(D)\,y + N\,(D)\,y.$$

2. Под умножением операторных многочленов понимается их последовательное применение.

$$M\,(D)\left[N\,(D)\,y\right] = \left[M\,(D)\,N\,(D)\right] y.$$

Отсюда,

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} D^k \left[\sum_{s=0}^{m} b_{m-s} D^s y\right] = \sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{m} a_{n-k} b_{m-s} D^{k+s} y = \sum_{s=0}^{m} b_{m-s} D^s \left[\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} D^k y\right].$$

Следовательно, верен переместительный закон:

$$M\,(D)\left[N\,(D)\,y\right] = N\,(D)\left[M\,(D)\,y\right].$$

3. Поскольку $M\,(D)$ - дифференциальный оператор, то

$$M\,(D)\,(y_1 + y_2) = M\,(D)\,y_1 + M\,(D)\,y_2.$$

4. Справедлив дистрибутивный закон

$$M\,(D)\left[N\,(D) + Q\,(D)\right] y = M\,(D)\,N\,(D)\,y + M\,(D)\,Q\,(D)\,y.$$

Свойства 1-4 показывают, что для операторных многочленов справедливы все теоремы алгебры. Отсюда следует еще одно свойство.

5. Операторный многочлен можно разложить на множители. Введем *характеристический многочлен*

$$M(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n. \tag{9}$$

Этот многочлен имеет n корней и представим по теореме алгебры в виде

$$M(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n).$$

Значит,

$$M(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1}D + a_n = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (D - \lambda_n). \tag{10}$$

Решение линейного уравнения в случае простых корней.

Допустим, что характеристический многочлен (9) имеет n различных корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Тогда из (10) имеем:

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (D - \lambda_n)\, y = 0. \tag{11}$$

Поскольку операторы, стоящие в (11) в скобках, обладают переместительным свойством, то любой из них можно сделать последним. Это означает, что уравнение (11) имеет решения:

$$(D - \lambda_i)\, y = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \lambda_i y \Longrightarrow y_i = e^{\lambda_i x}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Здесь постоянные λ_i могут быть и комплексными. В итоге, мы получили n решений. Можно ли по ним построить общее решение ? Если найденные решения линейно независимы, т.е. образуют фундаментальную систему, то можно. Докажем фундаментальность найденной системы решений.

Составим определитель Вронского

$$W(y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \cdots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)x} \prod_{i>k} (\lambda_i - \lambda_k) \neq 0.$$

В наших расчетах встретился *определитель Вандермонда*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>k} (\lambda_i - \lambda_k),$$

равный произведениям всевозможных попарных разностей чисел λ_i.

Поскольку определитель Вронского отличен от нуля, найденная система решений фундаментальна, и общее решение линейного однородного дифференциального уравнения в случае простых корней имеет вид:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_n e^{\lambda_n x}. \tag{12}$$

Таким образом, для построения общего решения (12) достаточно найти корни характеристического многочлена, т.е. решить уравнение $M(\lambda) = 0$. Если среди корней λ_i встречаются комплексные, то выделяют действительное решение. Делается это следующим образом.

Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ - корень характеристического уравнения. Так как коэффициенты многочлена действительны, то имеется сопряженный корень $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$. Таким образом, имеем два комплексных решения

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x),$$

$$y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Комбинируя их, легко получить два действительных решения

$$Y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

$$Y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x = \frac{y_1 - y_2}{2i}.$$

Проверим, что найденные решения линейно независимы. Для этого составим определитель матрицы перехода

$$\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2i & -1/2i \end{vmatrix} = \frac{i}{2} \neq 0.$$

Тогда из линейной независимости решений y_1, y_2 вытекает линейная независимость решений Y_1, Y_2.

В случае, когда имеется несколько комплексных корней, определитель матрицы перехода

$$\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1/2i & -1/2i & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/2i & -1/2i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

В результате мы можем получить только линейно независимые действительные решения.