ЛЕКЦИЯ 15

Решение линейного уравнения в случае кратных корней.

Пусть характеристический многочлен

$$M(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

имеет кратные корни: корень λ_1 кратности m_1, корень λ_2 кратности m_2, ..., корень λ_k кратности m_k, причем $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$. В этом случае операторный многочлен $M(D)$ может быть разложен на следующие множители:

$$M(D) = (D - \lambda_1)^{m_1}(D - \lambda_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (D - \lambda_k)^{m_k},$$

а дифференциальное уравнение

$$(D - \lambda_1)^{m_1}(D - \lambda_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (D - \lambda_k)^{m_k} y = 0$$

распадается на k уравнений

$$(D - \lambda_s)^{m_s} y = 0; \qquad s = 1, 2, \ldots, k. \tag{1}$$

Мы уже знаем, что решением этого уравнения является функция $y = e^{\lambda_s x}$, $\quad s = \overline{1,k}$. Но всего таких решений $k < n$. Нам не хватает $(n - k)$ решений для построения фундаментальной системы. Как найти дополнительные решения ?

Выведем сначала вспомогательное операторное соотношение, называемое *формулой смещения*

$$M(D)\, e^{\lambda x} f(x) = e^{\lambda x} M(D + \lambda) f(x). \tag{2}$$

Подставим в левую часть выражение операторного многочлена

$$M(D) = \sum_{l=0}^{n} a_{n-l} D^l \qquad (a_0 = 1).$$

Тогда,

$$M(D)\, e^{\lambda x} f(x) = \sum_{l=0}^{n} a_{n-l} D^l e^{\lambda x} f(x) = \sum_{l=0}^{n} a_{n-l} \left[e^{\lambda x} f(x)\right]^{(l)} =$$

применим формулу Лейбница для производной от произведения функций

$$= \sum_{l=0}^{n} a_{n-l} \sum_{j=0}^{l} C_l^j \left(e^{\lambda x}\right)^{(j)} f^{(l-j)}(x) = \sum_{l=0}^{n} a_{n-l} \sum_{j=0}^{l} C_l^j \lambda^j e^{\lambda x} f^{(l-j)}(x) =$$

$$= e^{\lambda x} \left[\sum_{l=0}^{n} a_{n-l} \sum_{j=0}^{l} C_l^j \lambda^j D^{l-j}\right] f(x) = e^{\lambda x} \left[\sum_{l=0}^{n} a_{n-l} (D + \lambda)^l\right] f(x) =$$

$$= e^{\lambda x} M \left(D + \lambda \right) f\left(x \right). \qquad \boxed{*}$$

Вернемся к уравнению (1). Будем искать его решение в виде $y = e^{\lambda_s x} P\left(x \right)$. Тогда,

$$\left(D - \lambda_s \right)^{m_s} e^{\lambda_s x} P\left(x \right) = 0,$$

и применяя формулу смещения, имеем:

$$D^{m_s} P\left(x \right) = 0$$

или

$$\frac{d^{m_s}}{dx^{m_s}} P\left(x \right) = 0.$$

Решением получившегося уравнения является произвольный полином степени $\left(m_s - 1 \right)$, т.е.

$$P\left(x \right) = c_0 x^{m_s - 1} + c_1 x^{m_s - 2} + \ldots + c_{m_s - 2} x + c_{m_s - 1}.$$

Окончательный вид решения уравнения (1) таков

$$y = e^{\lambda_s x} \left(c_0 x^{m_s - 1} + c_1 x^{m_s - 2} + \ldots + c_{m_s - 2} x + c_{m_s - 1} \right).$$

Как получить отсюда линейно независимые решения ?

Будем полагать поочередно: $c_{m_s - 1} = 1$, остальные - нули; $c_{m_s - 2} = 1$, остальные - нули;...; $c_0 = 1$, остальные - нули. В результате получим m_s решений вида

$$e^{\lambda_s x}, \quad x e^{\lambda_s x}, \ldots, \quad x^{m_s - 1} e^{\lambda_s x}, \tag{3}$$

соответствующих кратности корня λ_s характеристического многочлена. Серии решений вида (3) получаются для всех остальных корней, так что общее число построенных решений равно $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$.

Покажем, что построенная система решений фундаментальна. Предположим *противное*, т.е. что система решений линейно зависима. Это означает, что существует набор действительных постоянных α_{ij} (не все из которых нули), для которого

$$\alpha_{11} e^{\lambda_1 x} + \alpha_{12} x e^{\lambda_1 x} + \ldots + \alpha_{1 m_1} x^{m_1 - 1} e^{\lambda_1 x} + \ldots + \alpha_{k1} e^{\lambda_k x} + \alpha_{k2} x e^{\lambda_k x} +$$

$$+ \ldots + \alpha_{k m_k} x^{m_k - 1} e^{\lambda_k x} \equiv 0$$

или

$$P_{m_1 - 1}\left(x \right) e^{\lambda_1 x} + Q_{m_2 - 1}\left(x \right) e^{\lambda_2 x} + \ldots + R_{m_k - 1}\left(x \right) e^{\lambda_k x} \equiv 0 \qquad \text{для } \forall x. \tag{4}$$

Покажем, что отсюда вытекает равенство нулю всех многочленов $P_{m_1 - 1}\left(x \right), Q_{m_2 - 1}\left(x \right)$, $\ldots, R_{m_k - 1}\left(x \right)$.

Снова применим прием от противного. Пусть хотя бы у одного из многочленов не все коэффициенты α_{ij} являются нулями, например у $P_{m_1-1}(x)$ отличен от нуля коэффициент при старшей степени α_{1m_1}. Разделим тождество (4) на $e^{\lambda_k x}$:

$$P_{m_1-1}(x)\, e^{(\lambda_1-\lambda_k)x} + Q_{m_2-1}(x)\, e^{(\lambda_2-\lambda_k)x} + \ldots + R_{m_k-1}(x) \equiv 0$$

и продифференцируем его m_k раз для того, чтобы исчез многочлен $R_{m_k-1}(x)$. Поскольку,

$$\left[P_{m_1-1}(x)\, e^{(\lambda_1-\lambda_k)x}\right]' = \left[(\lambda_1-\lambda_k)\, P_{m_1-1}(x) + P'_{m_1-1}(x)\right] e^{(\lambda_1-\lambda_k)x},$$

то в силу условий $\lambda_1 \neq \lambda_k$ и $P_{m_1-1}(x) \neq 0$ в квадратных скобках получается многочлен той же степени, что и $P_{m_1-1}(x)$. В результате, после дифференцирования m_k раз придем к:

$$\tilde{P}_{m_1-1}(x)\, e^{(\lambda_1-\lambda_k)x} + \tilde{Q}_{m_2-1}(x)\, e^{(\lambda_2-\lambda_k)x} + \ldots + \tilde{T}_{m_{k-1}-1}(x)\, e^{(\lambda_{k-1}-\lambda_k)x} \equiv 0.$$

Многочленов стало на один меньше. Разделим теперь тождество на $e^{(\lambda_{k-1}-\lambda_k)x}$ и продифференцируем его m_{k-1} раз для того, чтобы исчез многочлен $\tilde{T}_{m_{k-1}-1}(x)$. В результате получим $(k-2)$ слагаемых. И т.д. В конце этой процедуры придем к тождеству вида

$$\bar{P}_{m_1-1}(x)\, e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} \equiv 0.$$

Из него следует, что $\bar{P}_{m_1-1}(x) \equiv 0$ при $\forall x$, а значит все коффициенты многочлена $\bar{P}_{m_1-1}(x)$ обращаются в нуль. В том числе и коэффициент при старшей степени, который совпадает с аналогичным коэффициентом α_{1m_1} исходного полинома $P_{m_1-1}(x)$. Мы пришли к противоречию, поскольку полагали этот коэффициент отличным от нуля.

Таким образом все полиномы в тождестве (4) равны нулю. Следовательно, обращаются в нуль и все коэффициенты α_{ij}: $\alpha_{ij} \equiv 0$. Получили еще одно противоречие, которое и доказывает фундаментальность построенной системы решений (3).

Итак, в случае кратных корней фундаментальная система решений имеет вид:

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x}; \ldots; e^{\lambda_k x}, xe^{\lambda_k x}, \ldots, x^{m_k-1}e^{\lambda_k x}.$$

Общее решение линейного однородного уравнения является линейной суперпозицией этих решений.

Остановимся и здесь на способе выделения действительных решений в случае комплексности корней λ_k. Пусть комплексный корень $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ имеет кратность m. Тогда, как мы знаем, существует комплексно-сопряженный корень $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ той же кратности. Корню λ_1 соответствуют решения вида:

$$e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x), xe^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x), \ldots, x^{m-1}e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x).$$

Корню λ_2 соответствуют решения

$$e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x), xe^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x), \ldots, x^{m-1}e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Всего таких решений $2m$. Из них почленным сложением и вычитанием, т.е. невырожденным преобразованием, можно получить следующие $2m$ линейно независимых действительных решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}x\cos\beta x, \dots , e^{\alpha x}x^{m-1}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x, e^{\alpha x}x\sin\beta x, \dots , e^{\alpha x}x^{m-1}\sin\beta x.$$

Понятие квазиполинома.

Функция вида $P\left(x\right)e^{\lambda x}$, где $P\left(x\right)$ - полином, а λ - некоторая, вообще говоря, комплексная постоянная, носит название *квазиполинома.* Отметим основные свойства квазиполиномов.

1. Сумма двух квазиполиномов с одинаковыми показательными функциями есть снова квазиполином:

$$P\left(x\right)e^{\lambda x}+Q\left(x\right)e^{\lambda x}=R\left(x\right)e^{\lambda x}.$$

2. Произведение двух квазиполиномов дает снова квазиполином:

$$P\left(x\right)e^{\lambda x}\cdot Q\left(x\right)e^{\mu x}=R\left(x\right)e^{(\lambda+\mu)x}.$$

3. Производная от квазиполинома дает снова квазиполином:

$$\left[P\left(x\right)e^{\lambda x}\right]'=\left[\lambda P\left(x\right)+P'\left(x\right)\right]e^{\lambda x}=Q\left(x\right)e^{\lambda x}.$$

4. После действия операторного многочлена на квазиполином получается снова квазиполином:

$$M\left(D\right)P\left(x\right)e^{\lambda x}=e^{\lambda x}M\left(D+\lambda\right)P\left(x\right)=R\left(x\right)e^{\lambda x}.$$

Исследуем, как действует операторный многочлен $M\left(D\right)$ на показательную и тригонометрические функции.

$$M\left(D\right)e^{\lambda x}=\sum_{l=0}^{n}a_{n-l}D^{l}e^{\lambda x}=\sum_{l=0}^{n}a_{n-l}\lambda^{l}e^{\lambda x}=e^{\lambda x}\sum_{l=0}^{n}a_{n-l}\lambda^{l}=e^{\lambda x}M\left(\lambda\right).$$

Итак,

$$M\left(D\right)e^{\lambda x}=M\left(\lambda\right)e^{\lambda x}. \tag{5}$$

Далее.

$$M\left(D^{2}\right)\sin\beta x=\sum_{l=0}^{n}a_{n-l}D^{2l}\sin\beta x=\sum_{l=0}^{n}a_{n-l}D^{2l-2}\left(-\beta^{2}\right)\sin\beta x=$$

$$=\sin\beta x\sum_{l=0}^{n}a_{n-l}\left(-\beta^{2}\right)^{l}=M\left(-\beta^{2}\right)\sin\beta x.$$

В итоге, получили еще одну формулу

$$M\left(D^{2}\right)\sin\beta x=M\left(-\beta^{2}\right)\sin\beta x. \tag{6}$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$M\left(D^{2}\right)\cos\beta x=M\left(-\beta^{2}\right)\cos\beta x. \tag{7}$$