ЛЕКЦИЯ 16

Решение линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами и квазиполиномом в правой части.

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с квазиполиномом в правой части

$$M(D)\,y = e^{\mu x} P_r(x)\,. \tag{1}$$

Здесь μ, вообще говоря, некоторое комплексное число, а коэффициенты многочлена $P_r(x)$ действительны.

$$P_r(x) = b_0x^r + b_1x^{r-1} + \ldots + b_{r-1}x + b_r = b_0x^r + P_{r-1}(x)$$

Теорема. Уравнение (1) имеет частное решение вида

$$y = x^m e^{\mu x} Q_r(x)\,, \tag{2}$$

где $Q_r(x)$ - многочлен той же степени, что и $P_r(x)$:

$$Q_r(x) = c_0x^r + c_1x^{r-1} + \ldots + c_{r-1}x + c_r = c_0x^r + Q_{r-1}(x)\,.$$

Если μ - не корень характеристического многочлена, т.е. $M(\mu) \neq 0$, то $m = 0$; если μ - корень характеристического многочлена, т.е. $M(\mu) = 0$, то m - его кратность.

Доказательство: докажем, что (2) - решение уравнения (1). Рассмотрим равенство

$$M(D)\,x^m e^{\mu x} Q_r(x) = e^{\mu x} P_r(x)\,.$$

Применим в левой части формулу смещения

$$e^{\mu x} M(D+\mu)\,x^m Q_r(x) = e^{\mu x} P_r(x)$$

и сократим на $e^{\mu x}$:

$$M(D+\mu)\,x^m Q_r(x) = P_r(x)\,. \tag{3}$$

Теперь нам осталось показать, что можно всегда подобрать коэффициенты многочлена $Q_r(x)$ $c_0, c_1, \ldots, c_r$ так, чтобы выполнялось равенство(3).

Поскольку μ - m-кратный корень многочлена $M(\lambda)$: $M(\mu) = 0$, операторный многочлен $M(D)$ допускает представление в виде

$$M(D) = (D-\mu)^m\,N(D)\,, \tag{4}$$

где $N(\mu) \neq 0$ ($m = 0$, если μ - не корень $M(\lambda)$). Подставляя (4) в (3), находим:

$$N(D+\mu)\,D^m x^m Q_r(x) = P_r(x)$$

или

$$N(D+\mu)\,D^m x^m\left[c_0 x^r + Q_{r-1}(x)\right] = b_0 x^r + P_{r-1}(x)\,. \tag{5}$$

Представим оператор $N(D+\mu)$ в виде

$$N(D+\mu) = N(\mu) + DN_1(D)\,.$$

Тогда,

$$c_0 N(\mu)\,D^m x^{m+r} + c_0 N_1(D)\,D^{m+1} x^{m+r} + N(D+\mu)\,D^m x^m Q_{r-1}(x) = b_0 x^r + P_{r-1}(x)\,. \tag{6}$$

Определим старший полиномиальный член слева и приравняем его подобному справа в силу произвольности x:

$$c_0 N(\mu)\,D^m x^{m+r} = b_0 x^r.$$

Поскольку $N(\mu) \neq 0$, то коэффициент c_0 находится однозначно

$$c_0 = \frac{b_0 \cdot r!}{N(\mu)\cdot(m+r)!}.$$

В результате уравнение (6) примет вид:

$$N(D+\mu)\,D^m x^m Q_{r-1}(x) = P_{r-1}(x) - \frac{rb_0}{N(\mu)} N_1(D)\,x^{r-1}. \tag{7}$$

Уравнения (5) и (7) имеют одинаковую структуру, но в (7) степень полинома справа стала меньше на единицу. Поэтому, аналогичным образом найдем c_1. И т.д. Аналогично можно однозначно найти остальные коэффициенты $c_2, \ldots, c_r$. Таким образом, решение вида (2) уравнения (1) существует. $\boxed{*}$

Пример. Рассмотрим некоторые примеры.

1. Дано неоднородное уравнение второго порядка:

$$y'' - 2y' + y = xe^x.$$

Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Оно имеет один двукратный корень $\lambda = 1$, т.е. $m = 2$. Из правой части уравнения определяем значение $\mu = 1$. Оно совпадает с корнем характеристического многочлена, поэтому частное решение неоднородного уравнения ищем в виде:

$$y = x^2 e^x (c_0 x + c_1)\,,$$

где коэффициенты c_0, c_1 неизвестны. Для их определения подставим решение в исходное уравнение и применим формулу сдвига:

$$M(D)\,y = (D-1)^2 x^2 (c_0 x + c_1) = e^x D^2 \left(c_0 x^3 + c_1 x^2\right) = e^x (6c_0 x + 2c_1) = xe^x.$$

Отсюда, пользуясь произвольностью x, определяем коэффициенты

$$c_0 = \frac{1}{6}, \qquad c_1 = 0.$$

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения таково:

$$y = \frac{1}{6} x^3 e^x.$$

2. Рассмотрим уравнение математического маятника, находящегося под действием периодической силы:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = A \sin \nu t,$$

где $\ddot{y}$ - вторая производная по времени t. Из характеристического уравнения $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ определяем корни $\lambda_1 = i\omega, \quad \lambda_2 = -i\omega$. Представим $\sin \nu t$ по формуле Эйлера

$$\sin \nu t = \frac{e^{i\nu t} - e^{-i\nu t}}{2i},$$

откуда следует, что $\mu = i\nu$ и $\mu = -i\nu$.

Проанализируем вначале ситуацию, когда $\nu \neq \omega$ (нерезонансный случай). Тогда $\mu \neq \lambda_1, \lambda_2$, и вынужденное решение записывается в виде

$$y = c_0 e^{i\nu t} + c_1 e^{-i\nu t}$$

или в действительной форме

$$y = a \cos \nu t + b \sin \nu t.$$

Подставляя это решение в уравнение маятника, находим:

$$M\left(D^2\right) y = \left(D^2 + \omega^2\right)(a \cos \nu t + b \sin \nu t) = \left(\omega^2 - \nu^2\right)(a \cos \nu t + b \sin \nu t) = A \sin \nu t.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos \nu t$ и $\sin \nu t$, определяем a и b

$$a = 0, \qquad b = \frac{A}{\omega^2 - \nu^2}.$$

Окончательный вид вынужденного решения таков

$$y = \frac{A}{\omega^2 - \nu^2} \sin \nu t.$$

Пусть теперь $\nu = \omega$. Этот случай в физике называют *резонансом*. Тогда оба μ совпадают с простыми корнями характеристического многочлена, и решение следует искать в виде:

$$y = t\,(a \cos \omega t + b \sin \omega t)\,.$$

Для отыскания коэффициентов a и b достаточно рассмотреть действие оператора $(D^2+\omega^2)$ на функцию $te^{i\omega t}$, а затем взять от полученного выражения действительную и мнимую часть.

$$\left(D^2+\omega^2\right)te^{i\omega t}=(D+i\omega)(D-i\omega)e^{i\omega t}t=e^{i\omega t}(D+2i\omega)Dt=2i\omega e^{i\omega t}.$$

В результате,

$$\left(D^2+\omega^2\right)y=\left(D^2+\omega^2\right)(a\cos\omega t+b\sin\omega t)t=-2\omega a\sin\omega t+2\omega b\cos\omega t=A\sin\omega t.$$

Отсюда

$$b=0,\qquad a=-\frac{A}{2\omega}.$$

Окончательно,

$$y=-\frac{At}{2\omega}\cos\omega t.$$

Как видим, с течением времени амплитуда колебаний маятника увеличивается пропорционально t. Говорят, что происходит резонансная раскачка колебаний.

Операторный метод отыскания частного решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами.

Обратный оператор. Запишем исследуемое линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка в операторной форме

$$M(D)\,y=f(x)\,. \tag{8}$$

Если отсюда формально найти y, то получим:

$$y=\frac{1}{M(D)}f(x)\,. \tag{9}$$

Оператор $1/M(D)$, стоящий в (9), называют обратным операторному многочлену $M(D)$ или просто *обратным оператором.* Если мы изучим свойства обратного оператора, то это позволит нам достаточно просто находить частное решение неоднородного уравнения (8).

Свойства $1/M(D)$.

1. Подставляя (9) в (8), мы должны получить тождество, так как (9) - решение уравнения (8). Значит,

$$M(D)\frac{1}{M(D)}f(x)\equiv f(x)\,.$$

Поскольку $f(x)$ может быть любой, имеем:

$$M(D)\frac{1}{M(D)} \equiv 1. \tag{10}$$

2. Рассмотрим уравнение

$$M(D)\,y = M(D)\,f(x)\,. \tag{11}$$

Тогда ясно, что $y = f(x)$ является решением данного уравнения, но не единственным. Функции вида $y = y_{00}(x) + f(x)$, где $y_{00}(x)$ - общее решение однородного уравнения $M(D)\,y_{00} = 0$, также являются решениями. Из (11) находим:

$$y = \frac{1}{M(D)}M(D)\,f(x)\,.$$

Значит равенство

$$f(x) = \frac{1}{M(D)}M(D)\,f(x) \tag{12}$$

справедливо с точностью до решения линейного однородного уравнения. Вывод: обратный оператор (9) находит решение уравнения (8) с точностью до решения линейного однородного уравнения.

Из (12) получаем второе свойство, когда прямой и обратный операторы действуют в другом порядке:

$$\frac{1}{M(D)}M(D) = 1. \tag{13}$$

В соответствии с (10), (13) прямой и обратный операторы можно менять местами и сокращать.

3. Рассмотрим уравнение первого порядка

$$Dy = f(x)\,.$$

Отсюда,

$$y' = f(x) \Longrightarrow y = \int f(x)\,dx.$$

С другой стороны,

$$y = \frac{1}{D}f(x)\,.$$

Сопоставление показывает, что оператор $1/D$ является оператором интегрирования:

$$\frac{1}{D} \equiv \int \ldots dx. \tag{14}$$

4. Определим действие умножения произвольного операторного многочлена на обратный оператор:

$$N\left(D\right)\frac{1}{M\left(D\right)}f\left(x\right) \equiv N\left(D\right)\left[\frac{1}{M\left(D\right)}f\left(x\right)\right].$$

Аналогично наоборот

$$\frac{1}{M\left(D\right)}N\left(D\right)f\left(x\right) \equiv \frac{1}{M\left(D\right)}\left[N\left(D\right)f\left(x\right)\right].$$

Докажем, что эти операции обладают переместительным свойством:

$$N\left(D\right)\frac{1}{M\left(D\right)} = \frac{1}{M\left(D\right)}N\left(D\right). \tag{15}$$

Введем обозначение

$$y \equiv N\left(D\right)\frac{1}{M\left(D\right)}f\left(x\right).$$

Тогда,

$$M\left(D\right)y \equiv M\left(D\right)N\left(D\right)\frac{1}{M\left(D\right)}f\left(x\right) = N\left(D\right)M\left(D\right)\frac{1}{M\left(D\right)}f\left(x\right) = N\left(D\right)f\left(x\right).$$

Отсюда

$$y \equiv \frac{1}{M\left(D\right)}N\left(D\right)f\left(x\right) = N\left(D\right)\frac{1}{M\left(D\right)}f\left(x\right).$$

Что и требовалось доказать.

5. Справедливо еще одно равенство для обратного оператора

$$\frac{1}{M\left(D\right)}\left[f_1\left(x\right)+f_2\left(x\right)\right] = \frac{1}{M\left(D\right)}f_1\left(x\right)+\frac{1}{M\left(D\right)}f_2\left(x\right). \tag{16}$$

Это равенство следует из принципа суперпозиции для линейного неоднородного уравнения: сумма частных решений неоднородного уравнения с $f_1\left(x\right)$ и $f_2\left(x\right)$ в правой части дает частное решение неоднородного уравнения с суммарной правой частью $f_1\left(x\right)+f_2\left(x\right)$.

6. Определение сложения обратных операторов

$$\left[\frac{1}{M\left(D\right)}+\frac{1}{N\left(D\right)}\right]f\left(x\right) = \frac{1}{M\left(D\right)}f\left(x\right)+\frac{1}{N\left(D\right)}f\left(x\right).$$

Они складываются по типу дробей. Умножение для обратных операторов определяют как

$$\left(\frac{1}{M\left(D\right)}\cdot\frac{1}{N\left(D\right)}\right)f\left(x\right) = \frac{1}{M\left(D\right)}\left[\frac{1}{N\left(D\right)}f\left(x\right)\right].$$

Проверим, выполняется ли переместительное свойство для обратных операторов.

$$\frac{1}{M\left(D\right)}\cdot\frac{1}{N\left(D\right)}=\frac{1}{N\left(D\right)}\cdot\frac{1}{M\left(D\right)}\quad ?$$

Введем обозначение

$$y\equiv\frac{1}{M\left(D\right)}\cdot\frac{1}{N\left(D\right)}f\left(x\right).$$

Тогда,

$$M\left(D\right)y\equiv\frac{1}{N\left(D\right)}f\left(x\right)\Longrightarrow N\left(D\right)M\left(D\right)y\equiv f\left(x\right)\Longrightarrow M\left(D\right)N\left(D\right)y\equiv f\left(x\right)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow N\left(D\right)y\equiv\frac{1}{M\left(D\right)}f\left(x\right)\Longrightarrow y\equiv\frac{1}{N\left(D\right)}\cdot\frac{1}{M\left(D\right)}f\left(x\right),$$

и свойство доказано.

Таким образом

$$\frac{1}{M\left(D\right)}\cdot\frac{1}{N\left(D\right)}=\frac{1}{N\left(D\right)}\cdot\frac{1}{M\left(D\right)}. \tag{17}$$

7. В силу доказанных равенств на обратный оператор можно распространить все свойства алгебраических дробей. В частности, операторная дробь как и алгебраическая должна раскладываться на простейшие дроби. Пусть характеристический многочлен $M\left(\lambda\right)$ имеет корни: λ_1 кратности m_1;...; λ_k кратности m_k. Тогда,

$$\frac{1}{M\left(\lambda\right)}=\frac{A_{11}}{\lambda-\lambda_1}+\ldots+\frac{A_{1m_1}}{\left(\lambda-\lambda_1\right)^{m_1}}+\ldots+\frac{A_{k1}}{\lambda-\lambda_k}+\ldots+\frac{A_{km_k}}{\left(\lambda-\lambda_k\right)^{m_k}}.$$

В результате,

$$\frac{1}{M\left(D\right)}=\sum_{s=1}^{k}\sum_{r=1}^{m_s}\frac{A_{sr}}{\left(D-\lambda_s\right)^r}. \tag{18}$$

Важное соотношение (18) позволяет свести действие обратного оператора к сумме действий простейших операторов.