ЛЕКЦИЯ 17

Действие обратного оператора на простейшие функции.

1. Действие обратного оператора на показательную функцию

$$\frac{1}{M(D)}e^{\lambda x} = \frac{e^{\lambda x}}{M(\lambda)}, \qquad \text{если } M(\lambda) \neq 0.$$

В самом деле.

$$e^{\lambda x} = \frac{1}{M(D)}M(D)\,e^{\lambda x} = \frac{1}{M(D)}e^{\lambda x}M(\lambda).$$

И если $M(\lambda) \neq 0$, то

$$\frac{e^{\lambda x}}{M(\lambda)} = \frac{1}{M(D)}e^{\lambda x}.$$

2. Действие обратного оператора на тригонометрические функции

$$\frac{1}{M(D^2)}\sin\beta x = \frac{\sin\beta x}{M\left(-\beta^2\right)}, \qquad \text{если } M\left(-\beta^2\right) \neq 0.$$

$$\frac{1}{M(D^2)}\cos\beta x = \frac{\cos\beta x}{M\left(-\beta^2\right)}, \qquad \text{если } M\left(-\beta^2\right) \neq 0.$$

Формулы доказываются аналогично.

3. Действие обратного оператора на полином

$$\frac{1}{M(D)}P_r(x) =?$$

Здесь $P_r(x)$ - многочлен степени r:

$$P_r(x) = b_0x^r + b_1x^{r-1} + \ldots + b_{r-1}x + b_r.$$

Разделим уголком 1 на операторный многочлен $M(D) = a_n + a_{n-1}D + \ldots + a_1D^{n-1} + D^n$, причем деление продолжаем до тех пор, пока в частном не получится многочлен по D степени r:

$$Q_r(D) = c_0 + c_1D + \ldots + c_{r-1}D^{r-1} + c_rD^r.$$

В остатке имеем некоторый операторный многочлен

$$R(D) = c_{r+1}D^{r+1} + \ldots + c_{r+n}D^{r+n}.$$

В результате,

$$\frac{1}{M(D)} = Q_r(D) + \frac{R(D)}{M(D)} \Longrightarrow 1 = Q_r(D)\,M(D) + R(D).$$

Это означает, что

$$\left[Q_r(D)\,M(D) + R(D)\right] P_r(x) = P_r(x)\,.$$

Если продифференцировать полином $P_r(x)$ более r раз, то получим нуль. Следовательно, $R(D)\,P_r(x) \equiv 0$, и тогда

$$Q_r(D)\,M(D)\,P_r(x) = P_r(x) \Longrightarrow M(D)\,Q_r(D)\,P_r(x) = P_r(x)\,.$$

Отсюда окончательно

$$\frac{1}{M(D)} P_r(x) = Q_r(D)\,P_r(x)\,.$$

Таким образом, действие обратного оператора на полином эквивалентно действию некоторого прямого оператора.

4. Формула смещения для обратного оператора.

Докажем справедливость для обратного оператора той же формулы смещения, что и для прямого оператора, т.е.

$$\frac{1}{M(D)} e^{\lambda x} f(x) = e^{\lambda x} \frac{1}{M(D+\lambda)} f(x)\,. \tag{1}$$

Введем обозначение

$$y = e^{\lambda x} \frac{1}{M(D+\lambda)} f(x)\,.$$

Тогда,

$$M(D)\,y = M(D)\,e^{\lambda x} \frac{1}{M(D+\lambda)} f(x) = e^{\lambda x} M(D+\lambda)\,\frac{1}{M(D+\lambda)} f(x) = e^{\lambda x} f(x)\,.$$

Отсюда,

$$y = \frac{1}{M(D)} e^{\lambda x} f(x)\,,$$

и формула смещения для обратного оператора доказана.

Полученные формулы позволяют легко находить частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с квазиполиномом в правой части операторным методом.

Примеры отыскания частного решения линейного неоднородного уравнения с квазиполиномом в правой части с помощью обратного оператора.

1. Рассмотрим уравнение второго порядка

$$y'' + 4y = e^x.$$

Вводя оператор дифференцирования, находим:

$$y = \frac{1}{D^2+4}e^x = \frac{1}{1^2+4} = \frac{1}{5}e^x.$$

2. Определим частное решение уравнения четвертого порядка

$$y^{IV} + y = 2\cos 3x.$$

Аналогичным образом

$$y = \frac{1}{D^4+1}2\cos 3x = 2\cos 3x\frac{1}{\left(-3^2\right)^2+1} = \frac{1}{41}\cos 3x.$$

3. Пусть теперь в правой части уравнения второго порядка стоит квазиполином

$$y'' - 4y' + 4y = x^2e^{2x}.$$

Тогда,

$$y = \frac{1}{D^2-4D+4}x^2e^{2x} = \frac{1}{\left(D-2\right)^2}x^2e^{2x} = e^{2x}\frac{1}{D^2}x^2 = \frac{x^4}{12}e^{2x}.$$

4. Рассмотрим уравнение третьего порядка с тригонометрической функцией в правой части

$$y''' - y = \sin x.$$

Запишем y через обратный оператор

$$y = \frac{1}{D^3-1}\sin x$$

и применим вспомогательный прием. Домножим и числитель и знаменатель на операторный многочлен, так чтобы обратный оператор стал четным по D.

$$y = \left(D^3+1\right)\frac{1}{D^6-1}\sin x = \left(D^3+1\right)\sin x\frac{1}{\left(-1^2\right)^3-1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\cos x + \sin x\right) = \frac{1}{2}\left(\cos x - \sin x\right).$$

5. Пусть в правой части уравнения стоит только полином

$$y'' + y = x^2 - x + 2.$$

Тогда,

$$y = \frac{1}{D^2+1}\left(x^2 - x + 2\right).$$

Используя известное разложение

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots\,,$$

находим:

$$y = \left(1 - D^2 + D^4 - D^6 + \dots\right)\left(x^2 - x + 2\right) = x^2 - x + 2 - D^2\left(x^2 - x + 2\right) = x^2 - x.$$

6. Рассмотрим, наконец, пример на применение формулы смещения для обратного оператора

$$y'' + y = x\cos x.$$

Будем решать вспомогательное дифференциальное уравнение

$$\tilde{y}'' + \tilde{y} = xe^{ix}.$$

Решение данного уравнения является комплексным, причем $y = \operatorname{Re}\tilde{y}$. Для вспомогательного уравнения имеем:

$$\tilde{y} = \frac{1}{D^2+1}xe^{ix} = e^{ix}\frac{1}{(D+i)^2+1}x = e^{ix}\frac{1}{D^2+2Di}x = e^{ix}\frac{1}{D}\cdot\frac{1}{D+2i}x =$$

$$= e^{ix}\frac{1}{D}\cdot\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{1+D/2i}x = e^{ix}\frac{1}{D}\left[\frac{1}{2i} - \frac{D}{(2i)^2}\right]x = e^{ix}\frac{1}{D}\left(\frac{x}{2i} + \frac{1}{4}\right) = e^{ix}\left(\frac{x^2}{4i} + \frac{x}{4}\right) =$$

$$= (\cos x + i\sin x)\left(\frac{x^2}{4i} + \frac{x}{4}\right) = \left(\frac{x^2}{4}\sin x + \frac{x}{4}\cos x\right) + i\left(\frac{x}{4}\sin x - \frac{x^2}{4}\cos x\right).$$

Отделяя действительную часть, получаем искомое решение

$$y = \frac{x}{4}\left(\cos x + x\sin x\right).$$

Формула для частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения с произвольной правой частью. Функция Грина.

Возникает вопрос: можно ли найти частное решение линейного неоднородного уравнения с произвольной правой частью с помощью обратного оператора ? Оказывается, это можно сделать, если воспользоваться разложением обратного оператора на простейшие дроби

$$\frac{1}{M(D)} = \sum_{s=1}^{k}\sum_{r=1}^{m_s}\frac{A_{sr}}{(D-\lambda_s)^r}$$

и формулой смещения (1). Подставим данное разложение в формулу для частного решения линейного неоднородного уравнения с произвольной правой частью:

$$y = \frac{1}{M\left(D\right)} f\left(x\right) = \sum_{s=1}^{k} \sum_{r=1}^{m_s} \frac{A_{sr}}{\left(D-\lambda_s\right)^r} f\left(x\right). \tag{2}$$

Попытаемся свести действие простейшей операторной дроби на функцию $f\left(x\right)$

$$\frac{1}{\left(D-\lambda\right)^r} f\left(x\right)$$

к интегрированию, добавив специальные множители и применив формулу смещения. В самом деле,

$$\frac{1}{\left(D-\lambda\right)^r} f\left(x\right) = \frac{1}{\left(D-\lambda\right)^r} e^{\lambda x} f\left(x\right) e^{-\lambda x} = e^{\lambda x} \frac{1}{D^r} e^{-\lambda x} f\left(x\right) =$$

$$= e^{\lambda x} \underbrace{\int dx \int dx \ldots \int dx}_{r} \cdot e^{-\lambda x} f\left(x\right).$$

Поскольку мы ищем любое частное решение линейного неоднородного уравнения, расставим пределы у повторных интегралов так, как нам удобно. А именно, по убыванию аргументов

$$\frac{1}{\left(D-\lambda\right)^r} f\left(x\right) = e^{\lambda x} \int\limits_0^x dx_1 \int\limits_0^{x_1} dx_2 \ldots \int\limits_0^{x_{r-1}} e^{-\lambda x_r} f\left(x_r\right) dx_r.$$

Изменяя порядок интегрирования на обратный (по возрастанию аргументов) и вычисляя $(r-1)$ интегралов, придем к

$$\frac{1}{\left(D-\lambda\right)^r} f\left(x\right) = e^{\lambda x} \int\limits_0^x e^{-\lambda x_r} f\left(x_r\right) dx_r \int\limits_{x_r}^x dx_{r-1} \ldots \int\limits_{x_2}^x dx_1 =$$

$$= e^{\lambda x} \int\limits_0^x e^{-\lambda x_r} f\left(x_r\right) \frac{\left(x-x_r\right)^{r-1}}{(r-1)!} dx_r.$$

Итак, окончательно имеем:

$$\frac{1}{\left(D-\lambda\right)^r} f\left(x\right) = \int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)} \frac{\left(x-t\right)^{r-1}}{(r-1)!} f\left(t\right) dt. \tag{3}$$

Подставляя выражение (3) в (2), получаем:

$$y = \sum_{s=1}^{k} \sum_{r=1}^{m_s} A_{sr} \int\limits_{0}^{x} e^{\lambda_s (x-t)} \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} f(t)\, dt = \int\limits_{0}^{x} \left[\sum_{s=1}^{k} \sum_{r=1}^{m_s} A_{sr} e^{\lambda_s (x-t)} \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} \right] f(t)\, dt.$$

Отсюда видно, что частное решение линейного неоднородного уравнения с произвольной правой частью представимо в виде квадратуры

$$y = \int\limits_{0}^{x} G(x-t)\, f(t)\, dt, \tag{4}$$

где функция

$$G(x) = \sum_{s=1}^{k} \sum_{r=1}^{m_s} A_{sr} e^{\lambda_s x} \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} \tag{5}$$

носит название *функции Грина.*