ЛЕКЦИЯ 18

7. Уравнение Эйлера.

Существует целый класс линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, которые сводятся к линейным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами. Рассмотрим неоднородное линейное уравнение n-го порядка следующего вида:

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x). \qquad (1)$$

В уравнении (1), называемом *уравнением Эйлера*, числа $a_1, \ldots, a_n$ - действительные постоянные. Точка $x = 0$ является особой точкой уравнения Эйлера.

Проанализируем сначала однородное уравнение

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0. \qquad (2)$$

Сделаем замену аргумента $x = e^t$. Тогда,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} e^{-t};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt} e^{-t}\right)\frac{dt}{dx} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) e^{-2t} \qquad \text{и т.д.}$$

$$\frac{d^ky}{dx^k} = \left(\frac{d^ky}{dt^k} + \alpha_1 \frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}} + \ldots + \alpha_{k-1}\frac{dy}{dt}\right) e^{-kt},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ - некоторые действительные постоянные. Отсюда следует, что

$$x^k y^{(k)} = e^{kt} y^{(k)} = \frac{d^ky}{dt^k} + \alpha_1 \frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}} + \ldots + \alpha_{k-1}\frac{dy}{dt}. \qquad (3)$$

Подставляя выражения (3) в уравнение (2), придем к линейному однородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^ny}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + b_{n-1}\frac{dy}{dt} + b_n y = 0. \qquad (4)$$

Методы решения уравнения (4) хорошо известны. Его решение ищут в виде $y = ce^{\lambda t}$. Это означает, при решении однородного уравнения (2) нет никакой необходимости проводить замену переменного, а следует сразу искать его решение в виде $y = ce^{\lambda t} = c\left(e^t\right)^{\lambda} = cx^{\lambda}$. Подставляя $y = cx^{\lambda}$ в (2), имеем:

$$cx^n \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)x^{\lambda-n} + ca_1 x^{n-1}\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+2)x^{\lambda-n+1} +$$

$$+ \ldots + ca_{n-1} x \lambda x^{\lambda-1} + ca_n x^{\lambda} = 0.$$

Сокращая обе части уравнения на cx^λ, получаем характеристическое уравнение для определения параметра λ:

$$\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)+a_1\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+2)+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0. \qquad (5)$$

Рассмотрим различные ситуации для корней уравнения (5).

1. Если корни характеристического уравнения (5) действительные и простые, то тогда им соответствует фундаментальная система решений вида

$$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t} \qquad \text{или} \qquad x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \ldots, x^{\lambda_n}.$$

2. Если среди простых корней есть комплексно-сопряженные: $\lambda_1=\alpha+i\beta$, $\lambda_2=\alpha-i\beta$, то этим корням, как известно, соответствуют действительные решения

$$e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t \qquad \text{или} \qquad x^\alpha\cos(\beta\ln x), x^\alpha\sin(\beta\ln x).$$

3. Пусть все корни действительны, но среди них есть кратные. Если, например, корень λ имеет кратность m, то ему соответствуют m решений вида

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \ldots, t^{m-1}e^{\lambda t} \qquad \text{или} \qquad x^\lambda, x^\lambda\ln x, \ldots, x^\lambda(\ln x)^{m-1}.$$

4. Наконец, если среди корней есть комплексно-сопряженные кратные корни: $\lambda_1=\alpha+i\beta$ кратности m и $\lambda_2=\alpha-i\beta$ той же кратности m, то этой паре соответствует серия $2m$ действительных решений

$$e^{\alpha t}\cos\beta t, te^{\alpha t}\cos\beta t, \ldots, t^{m-1}e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t, te^{\alpha t}\sin\beta t, \ldots, t^{m-1}e^{\alpha t}\sin\beta t$$

или

$$x^\alpha\cos(\beta\ln x), x^\alpha(\ln x)\cos(\beta\ln x), \ldots, x^\alpha(\ln x)^{m-1}\cos(\beta\ln x),$$

$$x^\alpha\sin(\beta\ln x), x^\alpha(\ln x)\sin(\beta\ln x), \ldots, x^\alpha(\ln x)^{m-1}\sin(\beta\ln x).$$

Способ нахождения общего решения уравнения Эйлера продемонстрируем на примере.

Пример.

Найдем общее решение следующего уравнения Эйлера

$$x^2y''+2xy'-6y=18x^2\ln x.$$

Составим характеристическое уравнение для λ, подставив решение в виде $y=x^\lambda$.

$$\lambda(\lambda-1)+2\lambda-6=0 \Longrightarrow \lambda^2+\lambda-6=0.$$

Отсюда определяем корни: $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-3$. Следовательно, общее решение однородного уравнения таково:

$$y_{00}=c_1x^2+c_2x^{-3}.$$

По виду получившегося характеристического уравнения: $\lambda^2+\lambda-6=0$ легко восстановить дифференциальное уравнение для функции $y=y(t)$, получающегося после замены $x=e^t$. Достаточно заменить все λ^k на $y_{t^k}^{(k)}$ и подставить $x=e^t$ в правую часть исходного уравнения. В результате найдем:

$$y''_{tt}+y'_t-6y=18te^{2t}.$$

Далее находим частное решение этого уравнения операторным методом.

$$y=\frac{1}{D^2+D-6}18te^{2t}=18\frac{1}{D-2}\cdot\frac{1}{D+3}e^{2t}t=18e^{2t}\frac{1}{D}\cdot\frac{1}{D+5}t=$$

$$=\frac{18}{5}e^{2t}\frac{1}{D}\cdot\frac{1}{1+D/5}t=\frac{18}{5}e^{2t}\frac{1}{D}\left(1-\frac{D}{5}\right)t=\frac{18}{5}e^{2t}\frac{1}{D}\left(t-\frac{1}{5}\right)=$$

$$=\frac{18}{5}e^{2t}\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t}{5}\right)=\frac{9}{5}te^{2t}\left(t-\frac{2}{5}\right).$$

Подставляя в это решение $t=\ln x$ и складывая с полученным ранее общим решением, окончательно получаем:

$$y=c_1x^2+c_2\frac{1}{x^3}+\frac{9}{5}x^2\left(\ln x-\frac{2}{5}\right)\ln x.$$

Заметим, что к уравнению Эйлера приводятся и уравнения вида

$$(\beta x+\gamma)^n y^{(n)}+a_1(\beta x+\gamma)^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(\beta x+\gamma)y'+a_ny=f(x),$$

если применить замену $\beta x+\gamma=e^t$.

8. Интегрирование однородных линейных дифференциальных уравнений с помощью рядов.

В физике очень часто приходится решать линейные дифференциальные уравнения второго порядка, которые не подпадают ни под один из рассмотренных случаев. Пусть имеется уравнение вида

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0, \qquad (6)$$

где функции $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ либо многочлены, либо степенные ряды. Существуют две теоремы о виде фундаментальных решений уравнения (6).

Теорема 1. Если в какой-либо точке $a_0(x_0)\neq 0$, то уравнение (6) имеет два линейно независимых решения в форме степенного ряда:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(x-x_0)^n. \qquad (7)$$

Без доказательства.

Теорема 2. Если x_0 является нулем функции $a_0(x_0)$ порядка s: $a_0(x_0) = 0$, функция $a_1(x)$ имеет в точке x_0 нуль порядка ни ниже $(s-1)$ и функция $a_2(x)$ имеет в точке x_0 нуль порядка ни ниже $(s-2)$, то уравнение (6) имеет, по крайней мере, одно решение в виде *обобщенного степенного ряда*:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x - x_0)^{r+n}, \tag{8}$$

где r - некоторое действительное число (не обязательно целое).

Без доказательства.

Примеры.

1. **Уравнение Эйри.**

Рассмотрим уравнение

$$y'' - xy = 0, \tag{9}$$

которое называется *уравнением Эйри* и встречается в целом ряде задач оптики, акустики, квантовой механики. Поскольку $a_0(x) = 1$, то можно применить первую теорему, т.е. искать решение в виде степенного ряда с центром в точке $x = 0$:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (9), находим:

$$\sum_{k=2}^{\infty} A_k k (k-1) x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{k+1} = 0.$$

Выделим в первой сумме слагаемое с $k = 2$, а второй произведем замену индекса суммирования $k + 1 = m - 2$ или $k = m - 3$. В результате получим

$$2A_2 + \sum_{k=3}^{\infty} A_k k (k-1) x^{k-2} - \sum_{m=3}^{\infty} A_{m-3} x^{m-2} = 0$$

или

$$2A_2 + \sum_{k=3}^{\infty} \left[A_k k (k-1) - A_{k-3}\right] x^{k-2} = 0.$$

Поскольку данное равенство справедливо для любых x, приравняем нулю коэффициенты степенного ряда, стоящие при различных степенях x:

$$A_2 = 0, \qquad A_k k (k-1) - A_{k-3} = 0, \quad k = 3, 4, \ldots$$

Отсюда находим рекуррентное соотношение для коэффициентов A_k

$$A_k = \frac{A_{k-3}}{k\,(k-1)}.$$

Полагая в нем $k = 5, 8, 11, \ldots$, получаем:

$$A_5 = \frac{A_2}{5 \cdot 4} = 0, \quad A_8 = \frac{A_5}{8 \cdot 7} = 0, \quad A_{11} = \frac{A_8}{11 \cdot 10} = 0, \ldots, \quad A_{3n-1} = 0.$$

Далее,

$$A_3 = \frac{A_0}{3 \cdot 2}; \quad A_6 = \frac{A_3}{6 \cdot 5} = \frac{A_0}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}; \quad A_9 = \frac{A_0}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}; \ldots;$$

$$A_{3n} = \frac{A_0}{3n\,(3n-1)\,(3n-3)\,(3n-4)\ldots 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}.$$

Аналогично

$$A_4 = \frac{A_1}{4 \cdot 3}; \quad A_7 = \frac{A_4}{7 \cdot 6} = \frac{A_1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}; \quad A_{10} = \frac{A_1}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}; \ldots;$$

$$A_{3n+1} = \frac{A_1}{(3n+1)\,3n\,(3n-2)\,(3n-3)\ldots 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}.$$

Подставляя эти выражения в (10) и производя перегруппировку членов ряда, придем окончательно к

$$y = A_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{3n\,(3n-1)\,(3n-3)\,(3n-4)\ldots 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} \right] +$$

$$+ A_1 \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)\,3n\,(3n-2)\,(3n-3)\ldots 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} \right]. \tag{11}$$

В формуле (11) A_0 и A_1 - две произвольные постоянные. Значит, мы построили общее решение уравнения (10), где в квадратных скобках записаны два фундаментальных решения уравнения Эйри. Докажем, что полученные ряды абсолютно сходятся на всей числовой оси (**самостоятельно докажите линейную независимость решений !**).

По признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{3(n+1)} \cdot 3n\,(3n-1)\ldots 3 \cdot 2}{(3n+3)\,(3n+2)\,3n\,(3n-1)\ldots 3 \cdot 2 \cdot |x|^{3n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^3}{(3n+3)\,(3n+2)} = 0 < 1 \qquad \text{для } \forall x \in \Re.$$

Аналогично доказывается сходимость второго ряда.

2. **Уравнение Бесселя.**

При исследовании объектов с круговой симметрией в механике, электродинамике, оптике встречается линейное дифференциальное уравнение вида

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right)y = 0 \qquad (\nu \in \Re), \tag{12}$$

называемое *уравнением Бесселя.* Точка $x = 0$ является особой точкой этого уравнения. Поскольку функции $a_0(x) = x^2$, $a_1(x) = x$, $a_2(x) = x^2 - \nu^2$, то указанная точка является нулем второго порядка функции $a_0(x)$, нулем первого порядка функции $a_1(x)$, вообще не является нулем функции $a_2(x)$ при $\nu \neq 0$ и нулем второго порядка при $\nu = 0$. Воспользуемся теперь второй теоремой и будем искать решение уравнения (12) в виде обобщенного степенного ряда

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{r+k}, \qquad r \in \Re. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12), находим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k(r+k)(r+k-1)x^{r+k} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k(r+k)x^{r+k} - \nu^2\sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{r+k} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{r+k+2} = 0$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(r+k)^2 - \nu^2\right]A_k x^{r+k} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{r+k+2} = 0.$$

Выделим в первой сумме слагаемые с x^r и с x^{r+1}, не содержащиеся во второй сумме, и приравняем к нулю коэффициенты при степенях x. Слагаемое с $k = 0$ дает равенство:

$$\left[r^2 - \nu^2\right]A_0 = 0.$$

Поскольку $A_0 \neq 0$ (в противном случае надо было бы переобозначить r), то:

$$r = \pm\nu. \tag{14}$$

Приравнивание к нулю члена с $k = 1$ приводит к

$$\left[(r+1)^2 - \nu^2\right]A_1 = 0.$$

Отсюда с учетом (14) получаем:

$$(1 \pm 2\nu)A_1 = 0.$$

Далее есть две возможности: либо $A_1 = 0$, либо $\nu = \pm 1/2$.

Остановимся на более общем случае $A_1 = 0$, положив $r = \nu$. Тогда,

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left[(\nu + k)^2 - \nu^2 \right] A_k x^{\nu+k} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{\nu+k+2} = 0.$$

Заменяя индекс суммирования в первой сумме $k = m + 2$, имеем:

$$\sum_{m=2}^{\infty} \left\{ \left[(\nu + m + 2)^2 - \nu^2 \right] A_{m+2} + A_m \right\} x^{\nu+m+2} = 0.$$

Отсюда,

$$A_{m+2} = -\frac{A_m}{2\nu (m+2) + (m+2)^2} = -\frac{A_m}{(m+2)(m+2+2\nu)}.$$

Поскольку $A_1 = 0$, то все нечетные коэффициенты $A_{2n+1} = 0$. С другой стороны,

$$A_2 = -\frac{A_0}{2^2 (\nu + 1)}; \quad A_4 = -\frac{A_2}{2^2 \cdot 2 (\nu + 2)} = \frac{A_0}{2^4 \cdot 2 (\nu + 1)(\nu + 2)};$$

$$A_6 = -\frac{A_0}{2^6 \cdot 2 \cdot 3 (\nu + 1)(\nu + 2)(\nu + 3)}; \ldots ;$$

$$A_{2n} = (-1)^n \frac{A_0}{2^{2n} n! \cdot (\nu + 1)(\nu + 2) \ldots (\nu + n)}.$$

Используем одну из специальных функций - *гамма-функцию*, определяемую как:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

и обладающую свойствами:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \qquad \Gamma(n+1) = n! \text{ ; где } n \text{ - натуральное число.}$$

Гамма-функцию можно трактовать в качестве обобщения факториала на случай не целых x.

Выберем постоянную

$$A_0 = \frac{1}{2^{\nu} \cdot \Gamma(\nu)}.$$

Тогда,

$$A_{2n} = (-1)^n \frac{1}{2^{2n+\nu} n! \cdot \Gamma(\nu + n + 1)},$$

и из (13) получаем:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} \frac{1}{n! \cdot \Gamma(\nu + n + 1)}. \tag{15}$$

Функция (15) называется функцией Бесселя первого рода n-го порядка и обозначается как $J_\nu(x)$.

Если взять $r = -\nu$, то получим второе решение

$$y_2 = J_{-\nu}(x).$$

Таким образом, общее решение уравнения Бесселя (12) записывается в виде:

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x).$$

В случае целого ν $(\nu = m)$ из (15) имеем:

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m} \frac{1}{n!\,(m+n)!}.$$

Функции $J_m(x)$ и $J_{-m}(x)$ оказываются уже линейно зависимыми:

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x). \tag{16}$$

Здесь вторым линейно независимым решением является функция Бесселя 2-го рода

$$Y_m(x) = \lim_{\nu \to m} \frac{J_\nu(x) \cos \pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu}.$$

Из формулы Лиувилля для уравнения второго порядка можно получить другое представление этой функции:

$$Y_m(x) = J_m(x) \int \frac{dx}{x J_m^2(x)}.$$

На самостоятельную работу: доказать соотношение (16) и разобрать случай $\nu = \pm 1/2$.