ЛЕКЦИЯ 19

IV. СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

1. Эквивалентность системы дифференциальных уравнений одному уравнению n-го порядка.

Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1\left(x, y_1, \ldots, y_n\right),$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \tag{1}$$

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n\left(x, y_1, \ldots, y_n\right).$$

Предположим, что функции $f_1, \ldots, f_n$ дифференцируемы неограниченное число раз. Общим методом решения системы (1) является *метод исключения.* Докажем теорему.

Теорема. Об эквивалентности нормальной системы одному дифференциальному уравнению.

Нормальная система n дифференциальных уравнений эквивалентна одному дифференциальному уравнению n-го порядка при условии дифференцируемости правых частей $f_1, \ldots, f_n$.

Доказательство: будем исключать переменные $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и строить дифференциальное уравнение относительно функции y_1. Как известно, решением системы (1) является система функций: $y_1 = \varphi_1\left(x\right), \ldots, y_n = \varphi_n\left(x\right)$. Подставляя ее в (1), получаем тождества:

$$\frac{d\varphi_1\left(x\right)}{dx} \equiv f_1\left(x, \varphi_1\left(x\right), \ldots, \varphi_n\left(x\right)\right) = \tilde{f}_1,$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \tag{2}$$

$$\frac{d\varphi_n\left(x\right)}{dx} \equiv f_n\left(x, \varphi_1\left(x\right), \ldots, \varphi_n\left(x\right)\right) = \tilde{f}_n.$$

Продифференцируем по x первое тождество системы (2)

$$\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} = \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y_k} \cdot \frac{d\varphi_k}{dx} = \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y_k} \cdot \tilde{f}_k \equiv F_2\left(x, \varphi_1\left(x\right), \ldots, \varphi_n\left(x\right)\right) = \tilde{F}_2.$$

Далее находим еще одну производную

$$\frac{d^3\varphi_1}{dx^3} = \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial y_k} \cdot \tilde{f}_k \equiv F_3\left(x, \varphi_1\left(x\right), \ldots, \varphi_n\left(x\right)\right) = \tilde{F}_3.$$

И т.д. Наконец,

$$\frac{d^n\varphi_1}{dx^n} = \frac{\partial \tilde{F}_{n-1}}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \tilde{F}_{n-1}}{\partial y_k} \cdot \tilde{f}_k \equiv F_n\left(x, \varphi_1\left(x\right), \ldots, \varphi_n\left(x\right)\right) = \tilde{F}_n.$$

В итоге мы получили новую систему тождеств. По образцу этих тождеств составим следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered} \frac{dy_1}{dx} = f_1\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right), \\ \frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} = F_{n-1}\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right). \end{gathered} \tag{3}$$

Добавим к системе (3) отдельное уравнение:

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right). \tag{4}$$

Будем рассматривать переменные $y_2, y_3, \ldots, y_n$ системы (3) в качестве неизвестных. Тогда систему (3) можно разрешить относительно этих переменных, если якобиан

$$\frac{D\left(f_1, F_2, \ldots, F_{n-1}\right)}{D\left(y_2, y_3, \ldots, y_n\right)} \neq 0. \tag{5}$$

Если условие (5) выполняется, то получим:

$$\begin{gathered} y_2 = \psi_2\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_n = \psi_n\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right). \end{gathered} \tag{6}$$

Учитывая, что функции $\psi_2, \ldots, \psi_n$ являются решениями системы (3), и ранее установленные тождества (2), имеем:

$$\psi_2\left(x, \varphi_1(x), \varphi_1'(x), \ldots, \varphi_1^{(n-1)}(x)\right) \equiv \varphi_2(x),$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \tag{7}$$

$$\psi_n\left(x, \varphi_1(x), \varphi_1'(x), \ldots, \varphi_1^{(n-1)}(x)\right) \equiv \varphi_n(x).$$

Подставляя выражения (6) в уравнение (4), придем окончательно к

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) = \Phi\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right). \tag{8}$$

Составленное уравнение (8) и будет искомым уравнением. Проверим, что функция $\varphi_1(x)$ является решением уравнения (8). Подстановка $\varphi_1(x)$ в левую и правую части уравнения (8) с учетом тождеств (7) дает:

$$\frac{d^n \varphi_1}{dx^n} = F_n(x, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = \tilde{F}_n,$$

что совпадает с последним из ранее полученных тождеств.

Проведем теперь доказательство в обратную сторону. Покажем, что если известно какое-либо решение уравнения (8), то можно без дополнительного интегрирования получить решение нормальной системы (1).

Пусть $y_1 = \psi_1(x)$ - решение дифференциального уравнения (8). Для того, чтобы построить решение системы необходимо найти функции $y_2, y_3, \ldots, y_n$. Составим систему

$$\frac{d\psi_1}{dx} = f_1(x, \psi_1, y_2, \ldots, y_n),$$

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} = F_2(x, \psi_1, y_2, \ldots, y_n), \tag{9}$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\frac{d^{n-1}\psi_1}{dx^{n-1}} = F_{n-1}(x, \psi_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Эта алгебраическая система система уравнений с неизвестными $y_2, \ldots, y_n$ очень похожа на (3). В силу условия (5) эта система разрешима относительно $y_2, \ldots, y_n$, и решением ее будут функции $y_2 = \psi_2(x), \ldots, y_n = \psi_n(x)$. Однако неизвестно, является ли найденная система функций вместе с $\psi_1(x)$ решением нормальной системы (1) ?

Если $\psi_2, \dots, \psi_n$ подставить в (9), то получим тождества:

$$\frac{d\psi_1}{dx} \equiv f_1(x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n),$$

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} \equiv F_2(x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n), \tag{10}$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\frac{d^{n-1}\psi_1}{dx^{n-1}} \equiv F_{n-1}(x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n).$$

В то же время, поскольку функция $\psi_1(x)$ является решением уравнения (8), имеет место тождество:

$$\frac{d^n\psi_1}{dx^n} \equiv F_n(x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n). \tag{11}$$

Продифференцируем по x обе части первого из тождеств (10):

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} \equiv \frac{\partial f_1}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \cdot \frac{d\psi_k}{dx}. \tag{12}$$

Записывая второе из тождеств (10) в развернутой форме, находим:

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} \equiv \frac{\partial f_1}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \cdot f_k. \tag{13}$$

Вычитая почленно (13) из (12), имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \left(\frac{d\psi_k}{dx} - f_k \right) \equiv 0.$$

В соответствии с первым из тождеств (10): $d\psi_1/dx = f_1$. Поэтому,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \left(\frac{d\psi_k}{dx} - f_k \right) \equiv 0. \tag{14}$$

Продифференцируем далее по x второе из тождеств (10)

$$\frac{d^3\psi_1}{dx^3} \equiv \frac{\partial F_2}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial y_k} \cdot \frac{d\psi_k}{dx}$$

и запишем третье тождество в развернутом виде:

$$\frac{d^3\psi_1}{dx^3} \equiv \frac{\partial F_2}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial y_k} \cdot f_k.$$

Почленное вычитание и учет того, что $d\psi_1/dx = f_1$, дает:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial y_k} \left(\frac{d\psi_k}{dx} - f_k \right) \equiv 0. \tag{15}$$

Аналогичным образом поступаем до $(n-1)$-го тождества. Дифференцирование последнего из тождеств (10) и вычитание из него тождества (11), записанного в развернутой форме, приводит к:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_k} \left(\frac{d\psi_k}{dx} - f_k \right) \equiv 0. \tag{16}$$

В итоге, мы получили систему тождеств (14)-(16), где неизвестными являются разности $(d\psi_k/dx - f_k)$. Определителем этой однородной системы является якобиан (5), отличный от нуля при любом значении x. Следовательно, система (14)-(16) при всех x имеет только нулевое решение, т.е.

$$\frac{d\psi_k}{dx} \equiv f_k, \qquad k = 2, 3, \ldots, n.$$

К тому же $d\psi_1/dx \equiv f_1$. Значит, найденная система функций является решением нормальной системы (1). $\boxed{*}$

Замечание.

В процессе доказательства теоремы использовано условие отличности от нуля якобиана (5). Если якобиан везде равен нулю, то можно попытаться построить уравнение для переменной y_2. И т.д. Может, однако, оказаться, что все якобианы типа (5) относительно $y_1, y_2, \ldots, y_n$ обращаются в нуль. Значит, методом исключения нельзя построить одно дифференциальное уравнение n-го порядка. В этом случае нормальная система (1) распадается на несколько подсистем. Например,

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2), \\ \frac{dy_3}{dx} &= f_3(x, y_3, y_4), \\ \frac{dy_4}{dx} &= f_4(x, y_3, y_4). \end{aligned}$$

Каждую из таких подсистем можно анализировать отдельно, т.е. строить для нее дифференциальное уравнение соответствующего порядка.

2. Линейные системы дифференциальных уравнений.

Линейной системой дифференциальных уравнений называется система уравнений вида:

$$\frac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)\, y_1 + \ldots + a_{1n}(x)\, y_n + f_1(x)\,,$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \tag{17}$$

$$\frac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)\, y_1 + \ldots + a_{nn}(x)\, y_n + f_n(x)\,.$$

Входящие в (17) функции $a_{ik}(x)$ и $f_i(x)$ предполагаются непрерывными на отрезке $[a, b]$. Это обеспечивает, как мы видели ранее, выполнение условий теоремы существования и единственности решения в области $a \le x \le b, -\infty < y_1 < \infty, \ldots, -\infty < y_n < \infty$. Таким образом, система (17) имеет единственное решение при любом начальном условии $(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0})$, где $a < x_0 < b, -\infty < y_{10} < \infty, \ldots, -\infty < y_{n0} < \infty$.

Очень часто систему (17) записывают в векторной форме. Если ввести матричную функцию

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

и вектор-функции

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}; \qquad \vec{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \cdots \\ f_n(x) \end{pmatrix},$$

то систему (17) можно переписать как

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\, \vec{y} + \vec{f}(x)\,. \tag{18}$$

Решением системы (18) будет вектор-функция $\vec{y} = \vec{\varphi}(x)$, которая обращает (17) в тождество:

$$\frac{d\vec{\varphi}}{dx} \equiv \mathbf{A}(x)\, \vec{\varphi} + \vec{f}(x)\,. \tag{19}$$

Система (18) называется *однородной*, если $\vec{f} = 0$, т.е. когда она имеет вид:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\, \vec{y}, \tag{20}$$

и *неоднородной*, если $\vec{f} \neq 0$.