ЛЕКЦИЯ 20

Общая теория линейных однородных систем дифференциальных уравнений.

Теорема 1. *О тривиальном решении системы.*

Если решение $\vec{y} = \vec{\varphi}(x)$ однородной системы

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\,\vec{y} \tag{1}$$

обращается в нуль в некоторой точке $x = x_0$, т.е. $\vec{\varphi}(x_0) = 0$, то $\vec{\varphi}(x) \equiv 0$.

Доказательство: как видно из (1), однородная система имеет тривиальное решение $\vec{y} = 0$. Это решение удовлетворяет нулевым начальным условиям при $\forall x_0$. Тогда в силу теоремы единственности $\vec{\varphi}(x)$ должно совпадать с тривиальным решением: $\vec{\varphi}(x) \equiv 0$. $\boxed{*}$

Теорема 2. *Принцип суперпозиции.*

Пусть $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_s(x)$ - решения однородной системы (1). Тогда их линейная комбинация

$$\vec{\psi}(x) = \sum_{k=1}^{s} c_k \vec{\varphi}_k(x), \qquad c_k \in \Re$$

также является решением однородной системы.

Доказательство: проверим, что вектор-функция $\vec{\psi}(x)$ является решением системы (1). Для этого подставим выражение для $\vec{\psi}(x)$ в (1) и учтем, что $\vec{\varphi}_k(x)$ - решения однородной системы. Тогда,

$$\frac{d\vec{\psi}}{dx} = \sum_{k=1}^{s} c_k \frac{d\vec{\varphi}_k}{dx} \equiv \sum_{k=1}^{s} c_k \mathbf{A}(x)\,\vec{\varphi}_k = \mathbf{A}(x) \sum_{k=1}^{s} c_k \vec{\varphi}_k = \mathbf{A}(x)\,\vec{\psi}. \qquad \boxed{*}$$

<u>Определение.</u> Если имеются вектор-функции $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_s(x)$, то они называются *линейно независимыми*, если тождество

$$\sum_{k=1}^{s} \alpha_k \vec{\varphi}_k(x) \equiv 0$$

имеет место лишь при $\alpha_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, s$. В противном случае они называются *линейно зависимыми.*

Заметим, что если вектор-функции линейно зависимы, то постоянные векторы $\vec{\varphi}_1(x_0), \ldots, \vec{\varphi}_s(x_0)$ будут также линейно зависимыми. Обратное неверно.

Теорема 3. *О линейной зависимости решений однородной системы.*

Если постоянные векторы $\vec{\varphi}_1(x_0), \ldots, \vec{\varphi}_s(x_0)$ линейно зависимы, то соответствующие им решения $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_s(x)$ однородной системы (1) также линейно зависимы.

Доказательство: в силу зависимости постоянных векторов $\vec{\varphi}_1(x_0), \ldots, \vec{\varphi}_s(x_0)$ существует ненулевая система констант $\{\alpha_i\}$, таких, что

$$\alpha_1 \vec{\varphi}_1(x_0) + \ldots + \alpha_s \vec{\varphi}_s(x_0) = 0.$$

Построим вспомогательную вектор-функцию

$$\vec{\varphi}\,(x) = \alpha_1\vec{\varphi}_1\,(x) + \ldots + \alpha_s\vec{\varphi}_s\,(x)\,,$$

где $\vec{\varphi}_k\,(x)$ - решения системы (1), удовлетворяющие начальным условиям: $(x_0, \vec{\varphi}_k\,(x_0))$. По предыдущей теореме функция $\vec{\varphi}\,(x)$ также является решением однородной системы (1), причем $\vec{\varphi}\,(x_0) = 0$. Тогда в соответствии с теоремой о тривиальном решении $\vec{\varphi}\,(x) \equiv 0$. $\boxed{*}$

Определение. Система n линейно независимых решений $\vec{\varphi}_1\,(x)\,, \ldots\,, \vec{\varphi}_n\,(x)$ однородной системы (1), где n - порядок системы, называется *фундаментальной системой решений.*

Теорема 4. *О существовании фундаментальной системы решений.*

Однородная система дифференциальных уравнений (1) всегда имеет фундаментальную систему решений.

Доказательство: выберем систему постоянных n-мерных векторов $\vec{b}_1, \ldots\,, \vec{b}_n$, линейно независимых между собой. Такие векторы всегда существуют: в качестве них, например, можно взять базис n-мерного пространства. Определим вектор-функцию $\vec{\varphi}_k\,(x)$ как решение однородной системы (1), удовлетворяющее начальному условию $\vec{\varphi}_k\,(x_0) = \vec{b}_k$. В результате получим систему n решений: $\vec{\varphi}_1\,(x)\,, \ldots\,, \vec{\varphi}_n\,(x)$. По соответствующей теореме для линейной системы такие решения существуют и являются единственными.

Докажем их линейную независимость методом "от противного". Пусть система $\vec{\varphi}_1\,(x)\,, \ldots\,, \vec{\varphi}_n\,(x)$ линейно зависима. Это означает, что существует ненулевой набор констант $\alpha_1, \ldots\,, \alpha_n$ таких, что

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\vec{\varphi}_k\,(x) \equiv 0.$$

Но тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\vec{\varphi}_k\,(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\vec{b}_k = 0,$$

а это означает линейную зависимость системы постоянных векторов $\left\{\vec{b}_1, \ldots\,, \vec{b}_n\right\}$, что невозможно по построению. $\boxed{*}$

Теорема 5. *Структура общего решения линейной однородной системы.*

Общее решение линейной однородной системы (1) имеет вид:

$$\vec{y} = \sum_{k=1}^{n} c_k\vec{\varphi}_k\,(x)\,, \tag{2}$$

где c_k - некоторые константы, а $\vec{\varphi}_1\,(x)\,, \ldots\,, \vec{\varphi}_n\,(x)$ - фундаментальная система решений.

Доказательство: из теоремы о суперпозиции следует, что (2) является решением однородной системы (1). Убедимся теперь в его общности, т.е. покажем, что любое решение (1), удовлетворяющее заданным произвольным начальным условиям, может быть получено из (2) при соответствующем выборе коэффициентов $c_1, \dots , c_n$.

Пусть некоторое решение $\vec{\varphi}\,(x)$ системы (1) удовлетворяет начальному условию $\vec{\varphi}\,(x_0) = \vec{b}$. В силу фундаментальности системы решений $\vec{\varphi}_1\,(x)\,, \dots , \vec{\varphi}_n\,(x)$ постоянные векторы $\vec{\varphi}_1\,(x_0)\,, \dots , \vec{\varphi}_n\,(x_0)$ являются линейно независимыми и образуют базис n-мерного пространства. Тогда любой вектор, в частности $\vec{b}$, можно разложить по этому базису:

$$\vec{b} = c_1^*\vec{\varphi}_1\,(x_0) + c_2^*\vec{\varphi}_2\,(x_0) + \ldots + c_n^*\vec{\varphi}_n\,(x_0)\,. \tag{3}$$

Тогда вектор-функция

$$\vec{y}\,(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k^*\vec{\varphi}_k\,(x)$$

будет являться решением системы (1), удовлетворяющим заданному начальному условию $\vec{y}\,(x_0) = \vec{b}$ (см.(3)), а, следовательно, по теореме единственности совпадает с $\vec{\varphi}\,(x)$. $\boxed{*}$

Теорема 6. *О числе линейно независимых решений однородной системы.*

Максимальное число линейно независимых решений однородной системы (1) равно порядку системы.

Доказательство: "от противного".

Допустим, что имеются $(n+1)$ линейно независимых решений однородной системы (1): $\vec{\varphi}_1\,(x)\,, \dots , \vec{\varphi}_n\,(x)\,, \vec{\varphi}_{n+1}\,(x)$. Согласно доказанной теореме о структуре общего решения системы (1) любое ее решение выражается формулой (2). В частности, всегда можно подобрать постоянные $\bar{c}_1, \dots , \bar{c}_n$ таким образом, чтобы решение $\vec{\varphi}_{n+1}\,(x)$ было представлено в форме:

$$\vec{\varphi}_{n+1}\,(x) = \bar{c}_1\vec{\varphi}_1\,(x) + \ldots + \bar{c}_n\vec{\varphi}_n\,(x)\,.$$

Запись данного равенства в виде

$$\bar{c}_1\vec{\varphi}_1\,(x) + \ldots + \bar{c}_n\vec{\varphi}_n\,(x) - \vec{\varphi}_{n+1}\,(x) = 0$$

указывает на линейную зависимость функций $\vec{\varphi}_1\,(x)\,, \dots , \vec{\varphi}_n\,(x)\,, \vec{\varphi}_{n+1}\,(x)$, что противоречит первоначальному предположению. Следовательно, число линейно независимых решений однородной системы (1) не превосходит ее порядка n. $\boxed{*}$

Вывод. Совокупность решений линейной однородной системы образует линейное n-мерное векторное пространство.

Определение. Пусть задана система вектор-функций $\vec{\psi}_1\,(x)\,, \dots , \vec{\psi}_n\,(x)$, где

$$\vec{\psi}_1\,(x) = \begin{pmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{21} \\ \cdots \\ \psi_{n1} \end{pmatrix}, \vec{\psi}_2\,(x) = \begin{pmatrix} \psi_{12} \\ \psi_{22} \\ \cdots \\ \psi_{n2} \end{pmatrix}, \dots , \vec{\psi}_n\,(x) = \begin{pmatrix} \psi_{1n} \\ \psi_{2n} \\ \cdots \\ \psi_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определителем Вронского такой системы называют определитель размера $n \times n$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \vec{\psi}_1(x) & \vec{\psi}_2(x) & \cdots & \vec{\psi}_n(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \cdots & \psi_{1n} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \cdots & \psi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_{n1} & \psi_{n2} & \cdots & \psi_{nn} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Теорема 7. *Об определителе Вронского для системы линейно зависимых функций.*

Для линейно зависимых вектор-функций $\vec{\psi}_1(x), \ldots, \vec{\psi}_n(x)$ определитель Вронского тождественно равен нулю.

Доказательство: пусть $\vec{\psi}_1(x), \ldots, \vec{\psi}_n(x)$ - линейно зависимые вектор-функции, т.е. существует ненулевой набор действительных постоянных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ $(\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 \neq 0)$ таких, что:

$$\alpha_1 \vec{\psi}_1(x) + \ldots + \alpha_n \vec{\psi}_n(x) \equiv 0. \tag{5}$$

Соотношение (5) означает, что между столбцами определителя Вронского (4) существует линейная зависимость. Следовательно, по свойствам определителей $W(x) \equiv 0$. $\boxed{*}$

Теорема 8. *Об определителе Вронского для решений линейной однородной системы.*

Пусть при некотором значении $x = x_0$ определитель Вронского для решений линейной однородной системы (1) обращается в нуль

$$W(x_0) = 0. \tag{6}$$

Тогда для $\forall x \quad W(x) \equiv 0$.

Доказательство: равенство (6) означает, что столбцы определителя $W(x_0)$ линейно зависимы, т.е. линейно зависимы постоянные векторы $\vec{\varphi}_1(x_0), \ldots, \vec{\varphi}_n(x_0)$. Если их принять за начальные условия, то по теореме 3 линейно зависимыми будут и соответствующие решения системы (1) $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$. Следовательно, по ранее доказанной теоремой 7 определитель Вронского тождественно равен нулю при любых x. $\boxed{*}$

Следствие. Если определитель Вронского для решений линейной однородной системы не обращается в нуль хотя бы в одной точке x_0, то он ни при каких x не обращается в нуль, и эта система решений линейно независима, т.е. фундаментальна.

Теорема 9. *О линейном преобразовании фундаментальной системы решений.*

Если фундаментальную систему решений подвергнуть линейному невырожденному преобразованию, то полученная система решений будет также фундаментальной.

Доказательство: Допустим, что $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ - фундаментальная система решений линейной однородной системы (1). Построим новую систему функций

$$\vec{\psi}_j(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \vec{\varphi}_k(x), \qquad j = 1, 2, \ldots, n; \tag{7}$$

где определитель матрицы $\mathbf{A} = \{a_{jk}\}$ отличен от нуля: $\det \mathbf{A} \neq 0$. Совершенно ясно, что суперпозиция (7) решений линейной однородной системы (1) сама является решением этой системы (см. теорему 2). С другой стороны, соотношение (7) можно переписать в матричной форме

$$\left(\begin{array}{cccc} \vec{\psi}_1(x) & \vec{\psi}_2(x) & \cdots & \vec{\psi}_n(x) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc} \vec{\varphi}_1(x) & \vec{\varphi}_2(x) & \cdots & \vec{\varphi}_n(x) \end{array} \right) \mathbf{A}^T. \qquad (8)$$

Из формулы (8) вытекает следующее равенство для определителей

$$\left| \begin{array}{cccc} \vec{\psi}_1(x) & \vec{\psi}_2(x) & \cdots & \vec{\psi}_n(x) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} \vec{\varphi}_1(x) & \vec{\varphi}_2(x) & \cdots & \vec{\varphi}_n(x) \end{array} \right| \det \mathbf{A}^T$$

или

$$W_\psi(x) = \det \mathbf{A} \cdot W_\varphi(x),$$

где $W_\psi(x)$ и $W_\varphi(x)$ - определители Вронского для системы решений $\vec{\psi}_1(x), \ldots, \vec{\psi}_n(x)$ и $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ соответственно. Поскольку исходная система решений фундаментальна, то $W_\varphi(x) \neq 0$ ни при каких x. В силу невырожденности преобразования: $\det \mathbf{A} \neq 0$ и, следовательно, $W_\psi(x)$ также отличен от нуля: $W_\psi(x) \neq 0$. Это означает, что построенная система решений $\vec{\psi}_1(x), \ldots, \vec{\psi}_n(x)$ остается фундаментальной. $\boxed{*}$

Построение линейной однородной системы по фундаментальной системе решений.

Задача. Задана система n линейно независимых вектор-функций: . Требуется построить линейную однородную систему дифференциальных уравнений, для которой вектор-функции $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ являются фундаментальной системой решений.

Решение. Составим n определителей $(n+1)$-го порядка для n неизвестных функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ и положим их равными нулю

$$\begin{vmatrix} y'_k & \varphi'_{k1} & \varphi'_{k2} & \cdots & \varphi'_{kn} \\ y_1 & \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ y_2 & \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n & \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} = 0; \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (9)$$

Каждое из построенных уравнений (9) является линейным дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной. В самом деле, если разложить определитель по первому столбцу, то перед производной $y'_k(x)$ появится определитель Вронского $W(x)$, который для системы линейно независимых функций $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ отличен от нуля для всех x, и на него можно поделить обе части уравнения. В результате придем к

$$\frac{dy_k}{dx} = \frac{1}{W(x)} \left[b_{k1}(x) y_1 + b_{k2}(x) y_2 + \ldots + b_{kn}(x) y_n \right]; \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (10)$$

Уравнения (10) представляют собой однородную нормальную систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Теперь легко проверить, что функции $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ являются решениями системы (10). Например, при подстановке $y_k = \varphi_{k1}$ $\left(k = \overline{1, n}\right)$ в (9) получаем два одинаковых столбца (первый и второй) определителя, и (9) переходит в тождество. Таким образом, система линейно независимых функций $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ является фундаментальной системой решений построенной линейной однородной системы (9).