ЛЕКЦИЯ 21

Формула Лиувилля.

Вычислим производную определителя Вронского, составленного для фундаментальной системы решений $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ линейной однородной системы

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\,\vec{y}. \tag{1}$$

В соответствии с ранее установленным правилом

$$\frac{d}{dx}W(x) = \sum_{k=1}^{n} W_k(x), \tag{2}$$

где

$$W_k(x) = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi'_{k1} & \cdots & \varphi'_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Поскольку вектор-функции $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ являются решениями однородной системы (1), справедлива система тождеств

$$\frac{d\varphi_{km}}{dx} \equiv \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\varphi_{jm}, \qquad m = 1, 2, \ldots, n.$$

Подставляя эти равенства в (3), имеем:

$$W_k(x) = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}\varphi_{j1} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}\varphi_{j} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1\cdots} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{j1} & \cdots & \varphi_{j} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix}.$$

У определителей в правой части при $j \neq k$ есть совпадающие строки, поэтому отличным от нуля будет лишь определитель с $j = k$, который является определителем Вронского. Поэтому

$$W_k(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} W(x)\,\delta_{jk} = a_{kk} W(x),$$

и согласно (2)

$$\frac{dW}{dx} = W(x) \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = W(x) \cdot \mathrm{Spur}\ \mathbf{A}. \tag{4}$$

Здесь введено традиционное обозначение суммы диагональных элементов матрицы

$$\mathrm{Spur}\ \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} a_{kk},$$

называемое ее *следом.* В частности, для единичной матрицы $\mathbf{E}$ размера $(n \times n)$ Spur $\mathbf{E} = n$.

Решая дифференциальное уравнение первого порядка (4) для $W(x)$, находим:

$$W(x) = W(x_0) \exp \left\{ \int_{x_0}^{x} \mathrm{Spur}\ \mathbf{A}(t)\, dt \right\}. \tag{5}$$

Формула (5) и есть искомая *формула Лиувилля.*

Линейные неоднородные системы.

Рассмотрим теперь неоднородную систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\, \vec{y} + \vec{f}(x). \tag{6}$$

Теорема. *О структуре общего решения линейной неоднородной системы.*

Пусть $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ - фундаментальная система решений однородной системы (1), а $\vec{\psi}(x)$ - частное решение неоднородной системы (6). Тогда общее решение неоднородной системы записывается в виде

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{\varphi}_i(x) + \vec{\psi}(x). \tag{7}$$

Доказательство: сначала проверим: является ли вектор-функция (7) решением неоднородной системы (6) ? Для этого подставим (7) в левую часть (6)

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \vec{\varphi}_i(x) + \vec{\psi}(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{d}{dx}\vec{\varphi}_i(x) + \frac{d}{dx}\vec{\psi}(x).$$

Поскольку вектор-функции $\vec{\varphi}_i(x)$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$ удовлетворяют однородному уравнению (1), а вектор-функция $\vec{\psi}(x)$ неоднородному, то справедливы тождества

$$\frac{d}{dx}\vec{\varphi}_i(x) \equiv \mathbf{A}(x)\, \vec{\varphi}_i(x), \qquad \frac{d}{dx}\vec{\psi}(x) \equiv \mathbf{A}(x)\, \vec{\psi}(x) + \vec{f}(x),$$

и поэтому

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \vec{\varphi}_i(x) + \vec{\psi}(x)\right) \equiv \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{A}(x)\, \vec{\varphi}_i(x) + \mathbf{A}(x)\, \vec{\psi}(x) + \vec{f}(x) \equiv$$

$$\equiv \mathbf{A}(x)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \vec{\varphi}_i(x) + \vec{\psi}(x)\right) + \vec{f}(x).$$

Полученное тождество доказывает, что (7) является решением неоднородной системы.

Перейдем к доказательству общности решения. Покажем, что из (7) можно получить любое частное решение неоднородной системы. Зададим произвольное начальное условие: $\vec{y}(x_0) = \vec{b}$. Разложим постоянный вектор $\vec{b} - \vec{\psi}(x_0)$ по системе линейно независимых векторов (базису) $\vec{\varphi}_1(x_0), \ldots, \vec{\varphi}_n(x_0)$

$$\vec{b} - \vec{\psi}(x_0) = c_1^* \vec{\varphi}_1(x_0) + \ldots + c_n^* \vec{\varphi}_n(x_0).$$

Если теперь в (7) заменить c_i на c_i^*, то полученное частное решение будет удовлетворять выбранному начальному условию. $\boxed{*}$

Метод вариации произвольных постоянных при отыскании частного решения неоднородной системы.

Существует прием отыскания частного решения линейной неоднородной системы с произвольной правой частью $\vec{f}(x)$ по известной фундаментальной системе решений $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ однородной системы. Будем искать частное решение системы (6) в виде

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, \vec{\varphi}_i(x), \tag{8}$$

где $c_i(x)$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$ - неизвестные функции. Потребуем, чтобы при подстановке (8) в (6) получалось тождество. Тогда,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, \vec{\varphi}_i(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, \vec{\varphi}_i'(x) = \mathbf{A}(x) \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{\varphi}_i(x) + \vec{f}(x)$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, \vec{\varphi}_i(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x) \left[\vec{\varphi}_i'(x) - \mathbf{A}(x)\, \vec{\varphi}_i(x)\right] = \vec{f}(x).$$

Учитывая, что $\vec{\varphi}_i(x)$ - решения однородной системы, придем к

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, \vec{\varphi}_i(x) = \vec{f}(x). \tag{9}$$

В результате пришли к линейной алгебраической системе уравнений для неизвестных $c_1'(x), \ldots, c_n'(x)$. Определитель неоднородной системы (9) является определителем Вронского

$$\Delta = \begin{vmatrix} \vec{\varphi}_1(x) & \vec{\varphi}_2(x) & \cdots & \vec{\varphi}_n(x) \end{vmatrix} = W(x).$$

Для системы линейно независимых функций $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ определитель $W(x) \neq 0$ при всех x. Следовательно, неоднородная линейная алгебраическая система (9) имеет единственное решение, которое можно записать как

$$c_1'(x) = \psi_1(x), \ldots, c_n'(x) = \psi_n(x).$$

Вычисляя n неопределенных интегралов без произвольных постоянных и подставляя их в (8), получаем искомое частное решение.

3. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим подробнее линейную однородную систему уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \mathbf{A}\vec{y}, \tag{10}$$

где $\mathbf{A}$ - $(n \times n)$ матрица постоянных коэффициентов

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Система (10) удовлетворяет теореме существования во всем пространстве $\mathbf{E}_{n+1}$. Приемом, который был рассмотрен ранее, данную систему можно свести к линейному однородному уравнению n-го порядка для одной из переменных y_k, решение которого, как известно, ищется в виде $y_k = \gamma_k e^{\lambda x}$. Исходя из этих соображений, будем искать нетривиальное решение однородной системы (10) в форме следующей вектор-функции

$$\vec{y}(x) = \vec{\gamma} e^{\lambda x}, \tag{11}$$

где $\vec{\gamma}$ - неизвестный постоянный вектор, λ - неизвестная константа.

Подставляя (11) в (10), придем к

$$\lambda \vec{\gamma} e^{\lambda x} = \mathbf{A} \vec{\gamma} e^{\lambda x}$$

или

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \vec{\gamma} = 0, \tag{12}$$

где $\mathbf{E} = \{\delta_{ij}\}$ - единичная матрица. Однородная система (12) имеет ненулевое решение, когда

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$$

или

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

Соотношение (13) представляет собой *характеристическое уравнение* для определения λ (в полной аналогии с уравнением n-го порядка). Если раскрыть определитель, то левая часть (13) окажется многочленом n-ой степени по λ, который называют *характеристическим.*

Вернемся к соотношению (12), которое можно переписать в виде

$$\mathbf{A}\vec{\gamma} = \lambda\vec{\gamma}. \tag{14}$$

Уравнение (14) - известное из курса "Аналитическая геометрия и высшая алгебра" уравнение на определение собственных значений λ и собственных векторов $\vec{\gamma}$ матрицы $\mathbf{A}$. Заметим, что в зависимости от собственных значений матрицы $\mathbf{A}$ вид решений системы (10) может быть весьма различным.

1. Случай простых корней характеристического уравнения.

Пусть все корни характеристического уравнения (13) простые: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. В этом случае характеристический многочлен $\Delta(\lambda)$ допускает представление в виде

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_k)\,\Delta_1(\lambda), \tag{15}$$

причем $\Delta_1(\lambda_k) \neq 0$. Из (15) следует. что

$$\Delta'(\lambda) = \Delta_1(\lambda) + (\lambda - \lambda_k)\,\Delta_1'(\lambda),$$

и поэтому $\Delta'(\lambda_k) = \Delta_1(\lambda_k) \neq 0$. С другой стороны, по правилам дифференцирования функционального определителя

$$\Delta'(\lambda) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left\{ \begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & \cdots & a_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \right\}.$$

Поскольку сумма диагональных миноров $(n-1)$ порядка матрицы

$$\mathbf{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

при $\lambda = \lambda_k$ не обращается в нуль, то найдется по крайней мере один из диагональных миноров, отличный от нуля. Это означает, что матрица $\mathbf{M}(\lambda_k)$ имеет $\operatorname{rang}\mathbf{M}(\lambda_k) = r = n-1$.

Для определения векторов $\vec{\gamma}$ будем последовательно подставлять в уравнения (12) $\lambda = \lambda_1, \lambda = \lambda_2, \ldots, \lambda = \lambda_n$. В результате придем к уравнениям вида

$$(\mathbf{A} - \lambda_k\mathbf{E})\,\vec{\gamma}_k = 0$$

или

$$\mathbf{M}\left(\lambda_k\right)\vec{\gamma}_k = 0. \tag{16}$$

Всего таких систем уравнений будет n, поскольку индекс k пробегает значения от 1 до n. Поскольку, как мы установили, ранг матрицы $\mathbf{M}\left(\lambda_k\right)$: $r = n-1$, то компоненты собственных векторов $\vec{\gamma}_k$ определяются с точностью до произвольного множителя.

В качестве ненулевого решения системы уравнений (16) можно взять алгебраические дополнения элементов той строки матрицы $\mathbf{M}\left(\lambda_k\right)$, которые не обращаются в нуль. Такие миноры существуют, ибо $r = n - 1$. В результате найдем n решений однородной системы (10):

$$\vec{\varphi}_k\left(x\right) = \vec{\gamma}_k e^{\lambda_k x}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{17}$$

Теперь необходимо доказать их линейную независимость.

Доказательство проведем методом "от противного". Пусть найденная система решений линейно зависима, т.е. найдутся ненулевые действительные постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 \neq 0)$ такие, что

$$\alpha_1\vec{\gamma}_1 e^{\lambda_1 x} + \alpha_2\vec{\gamma}_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + \alpha_n\vec{\gamma}_n e^{\lambda_n x} = 0 \qquad\qquad \text{при } \forall x.$$

Однако ранее было доказано, что функции $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ линейно независимы при $\lambda_i \neq \lambda_j$. Поэтому данное равенство имеет место лишь при

$$\alpha_1\vec{\gamma}_1 = 0, \quad \alpha_2\vec{\gamma}_2 = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_n\vec{\gamma}_n = 0.$$

Так как не все из α_k равны нулю, то найдется вектор $\vec{\gamma}_i = 0$, но это не соответствует определению собственных векторов матрицы. Пришли к противоречию. Следовательно, полученная система решений (17) фундаментальна, и общее решение однородной системы (10) представляется в виде

$$\vec{y} = c_1\vec{\gamma}_1 e^{\lambda_1 x} + c_2\vec{\gamma}_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_n\vec{\gamma}_n e^{\lambda_n x}.$$