ЛЕКЦИЯ 22

Рассмотрим ситуацию, когда среди простых корней характеристического уравнения встречаются комплексные. В этом случае представление общего решения линейной однородной системы в виде

$$\vec{y} = c_1\vec{\gamma}_1 e^{\lambda_1 x} + c_2\vec{\gamma}_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_n\vec{\gamma}_n e^{\lambda_n x}$$

нас не устраивает, ибо среди слагаемых есть комплекснозначные функции. Поэтому фундаментальная система решений нуждается в определенной реконструкции. Допустим, что $\lambda_1 = \alpha + i\beta$. Тогда, в силу действительности коэффициентов характеристического многочлена среди его корней должен присутствовать и комплесно сопряженный корень $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Из уравнений для собственных векторов матрицы **A**

$$\left(\mathbf{A} - \lambda_k\mathbf{E}\right)\vec{\gamma}_k = 0,$$

отвечающих собственным значениям λ_1 и λ_2, имеем:

$$\left[\mathbf{A} - (\alpha + i\beta)\,\mathbf{E}\right]\vec{\gamma}_1 = 0, \qquad (1)$$

$$\left[\mathbf{A} - (\alpha - i\beta)\,\mathbf{E}\right]\vec{\gamma}_2 = 0.$$

Применяя комплексное сопряжение к первому из уравнений (1)

$$\left[\mathbf{A} - (\alpha - i\beta)\,\mathbf{E}\right]\vec{\gamma}_1^{\,*} = 0$$

и сопоставляя его с уравнением для собственного вектора $\vec{\gamma}_2$, заключаем, что $\vec{\gamma}_2$ можно выбрать равным $\vec{\gamma}_1^{\,*}$: $\vec{\gamma}_2 = \vec{\gamma}_1^{\,*}$. Отсюда следует, что два линейно независимых комплекснозначных решения $\vec{\varphi}_1(x) = \vec{\gamma}_1 e^{(\alpha+i\beta)x}$ и $\vec{\varphi}_2(x) = \vec{\gamma}_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$ линейной однородной системы также являются комплексно сопряженными: $\vec{\varphi}_2(x) = \vec{\varphi}_1^{\,*}(x)$. Из этих комплекснозначных решений можно путем линейного невырожденного преобразования получить два действительных линейно независимых решения $\vec{\psi}_1(x)$ и $\vec{\psi}_2(x)$. В самом деле, их можно построить следующим образом:

$$\vec{\psi}_1(x) = \frac{\vec{\varphi}_1(x) + \vec{\varphi}_2(x)}{2} = \mathrm{Re}\left[\vec{\varphi}_1(x)\right] = e^{\alpha x}\,\mathrm{Re}\left[\vec{\gamma}_1 e^{i\beta x}\right] = e^{\alpha x}\left(\vec{a}_1\cos\beta x - \vec{b}_1\sin\beta x\right),$$

$$\vec{\psi}_2(x) = \frac{\vec{\varphi}_1(x) - \vec{\varphi}_2(x)}{2i} = \mathrm{Im}\left[\vec{\varphi}_1(x)\right] = e^{\alpha x}\,\mathrm{Im}\left[\vec{\gamma}_1 e^{i\beta x}\right] = e^{\alpha x}\left(\vec{a}_1\sin\beta x + \vec{b}_1\cos\beta x\right),$$

где $\vec{\gamma}_1 = \vec{a}_1 + i\vec{b}_1$. Определитель матрицы преобразования

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2i & -1/2i \end{vmatrix} = \frac{i}{2} \neq 0.$$

Таким образом, в случае простых комплексных корней линейно независимыми действительными решениями являются действительные и мнимые части комплекснозначных решений.

Пример. Решим следующую однородную систему уравнений для двух неизвестных функций $y(x)$ и $z(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = -7y + z,$$

$$\frac{dz}{dx} = -2y - 5z.$$

Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -7-\lambda & 1 \\ -2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0$$

и определяем корни характеристического многочлена: $\lambda_{1,2} = -6 \pm i$. Запишем уравнения для компонент γ_{11} и γ_{21} собственного вектора $\vec{\gamma}_1$, отвечающего собственному значению $\lambda_1 = -6 + i$.

$$(-1-i)\,\gamma_{11} + = 0,$$

$$-2\gamma_{11} + (1-i)\,\gamma_{21} = 0.$$

Эти уравнения идентичны, в чем легко убедиться, домножив первое из уравнений на $(1-i)$. Берем для простоты $\gamma_{11} = 1$, тогда $\gamma_{21} = 1 + i$. В результате для корня λ_1 получаем комплекснозначное решение

$$\vec{\varphi}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{-6x} e^{ix} = e^{-6x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} (\cos x + i \sin x)\,.$$

Возьмем от полученного решения действительную и мнимую части

$$\vec{\psi}_1(x) = \mathrm{Re}\left[\vec{\varphi}_1(x)\right] = e^{-6x} \begin{pmatrix} \cos x \\ \cos x - \sin x \end{pmatrix},$$

$$\vec{\psi}_2(x) = \mathrm{Im}\left[\vec{\varphi}_1(x)\right] = e^{-6x} \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x + \sin x \end{pmatrix}.$$

Строим теперь общее решение исследуемой системы по формуле

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \vec{\psi}_1(x) + c_2 \vec{\psi}_2(x)\,,$$

т.е.

$$y(x) = e^{-6x}\left(c_1 \cos x + c_2 \sin x\right),$$

$$z(x) = e^{-6x}\left[(c_1 + c_2)\cos x + (c_2 - c_1)\sin x\right].$$

Как и должно быть, в общее решение системы второго порядка входят две произвольные константы.

2. Случай кратных корней характеристического уравнения.

Пусть среди корней характеристического уравнения есть кратные. Предположим, например, что корень λ_1 имеет кратность m. В этой ситуации характеристический многочлен $\Delta(\lambda)$ представим в виде

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^m \Delta_1(\lambda), \tag{2}$$

причем $\Delta_1(\lambda_1) \neq 0$. Из равенства (2) следует, что

$$\Delta'(\lambda_1) = 0, \quad \Delta''(\lambda_1) = 0, \quad \dots, \quad \Delta^{(m-1)}(\lambda_1) = 0, \quad \Delta^{(m)}(\lambda_1) \neq 0.$$

Как было показано ранее, $\Delta'(\lambda_1)$ является суммой главных миноров $(n-1)$-го порядка матрицы $\mathbf{M}(\lambda_1)$. Аналогично $\Delta''(\lambda_1)$ есть сумма миноров $(n-2)$-го порядка той же матрицы и т.д. Выражение для $\Delta^{(m)}(\lambda_1)$ представляет собой сумму главных миноров матрицы $\mathbf{M}(\lambda_1)$ порядка . Эта сумма отлична от нуля, поэтому хотя бы один из миноров $(n-m)$-го порядка также не равен нулю. Следовательно, ранг матрицы $\mathbf{M}(\lambda_1)$: $r \geq n - m$. Ранг достигает минимального значения $r = n - m$, когда все главные миноры матрицы $\mathbf{M}(\lambda_1)$ порядка $(n - m + 1)$ обращаются в нуль. В общем случае границы изменения ранга матрицы таковы: $n - m \leq r \leq n - 1$.

Таким образом, система уравнений для определения собственного вектора $\vec{\gamma}_1$, отвечающего собственному значению λ_1,

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E})\,\vec{\gamma}_1 = 0$$

имеет r независимых уравнений, а остальные $(n-r)$ уравнений являются их следствиями. Это означает, что $(n-r)$ компонент собственного вектора $\vec{\gamma}_1$ могут быть произвольными, а остальные r компонент являются их линейными комбинациями.

Положим $\gamma_{11} = c_1, \gamma_{21} = c_2, \dots, \gamma_{n-r,1} = c_{n-r}$, где c_i - произвольные постоянные, а

$$\gamma_{k1} = \sum_{i=1}^{n-r} \sigma_{ki} c_i, \qquad k = n-r+1, n-r+2, \dots, n.$$

В результате придем к системе решений

$$y_1 = c_1, \quad y_2 = c_2 e^{\lambda_1 x}, \quad \dots, \; y_{n-r} = c_{n-r} e^{\lambda_1 x},$$

$$y_{n-r+1} = \sum_{i=1}^{n-r} c_i e^{\lambda_1 x}, \quad \dots, \; y_n = \sum_{i=1}^{n-r} \sigma_{ni} c_i e^{\lambda_1 x}.$$

Из этих решений можно получить $(n-r)$ линейно независимых. Положим $,c_2 = \ldots = c_{n-r} = 0$. Тогда,

$$\begin{aligned}
&y_{11} = e^{\lambda_1 x},\\
&y_{21} = 0,\\
&\ldots\\
&y_{n-r,1} = 0,\\
&y_{n-r+1,1} = \sigma_{n-r+1,1} e^{\lambda_1 x},\\
&\ldots\\
&y_{n1} = \sigma_{n1} e^{\lambda_1 x}.
\end{aligned}$$

Выберая теперь , находим второе решение:

$$\begin{aligned}
&y_{12} = 0,\\
&y_{22} = e^{\lambda_1 x},\\
&\ldots\\
&y_{n-r,2} = 0,\\
&y_{n-r+1,2} = \sigma_{n-r+1,2} e^{\lambda_1 x},\\
&\ldots\\
&y_{n2} = \sigma_{n2} e^{\lambda_1 x}.
\end{aligned}$$

И т.д. Последнее решение получаем при подстановке $c_1 = \ldots c_{n-r-1} = 0, c_{n-r} = 1$

$$\begin{aligned}
&y_{1,n-r} = 0,\\
&y_{2,n-r} = 0,\\
&\ldots\\
&y_{n-r,n-r} = e^{\lambda_1 x},\\
&y_{n-r+1,n-r} = \sigma_{n-r+1,n-r} e^{\lambda_1 x},\\
&\ldots\\
&y_{n,n-r} = \sigma_{n,n-r} e^{\lambda_1 x}.
\end{aligned}$$

Для того, чтобы убедиться в линейной независимости решений выпишем матрицу коэффициентов:

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 1 & \cdots & 0\\
\ldots & \ldots & \cdots & \ldots\\
0 & 0 & \cdots & 1\\
\sigma_{n-r+1,1} & \sigma_{n-r+1,2} & \cdots & \sigma_{n-r+1,n-r}\\
\ldots & \ldots & \cdots & \ldots\\
\sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{n,n-r}
\end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы, имеющей размер $n \times (n-r)$, равен $n-r$, поскольку есть минор $(n-r)$-го порядка, отличный от нуля. Отсюда и следует линейная независимость $(n-r)$ построенных решений.

Если ранг матрицы имеет наименьшее значение $r = n-m$, то число линейно независимых решений равно $n-r = m$ - кратности корня λ_1. А это нам и нужно для построения фундаментальной системы решений.

Если же ранг матрицы $\mathbf{M}(\lambda_1)$: $r > n - m$, то число построенных линейно независимых решений $n - r < m$. В этом случае решение системы ищут в виде:

$$y_i = P_i(x)\, e^{\lambda_1 x}, \tag{3}$$

где $P_i(x)$ - многочлен степени $m - (n - r)$. Заметим, что если ранг матрицы $\mathbf{M}(\lambda_1)$ достигает своего максимального значения $r = n - 1$, то входящий в (3) многочлен имеет степень $m - 1$.

Задача для самостоятельной работы. Показать, что если записать нормальную систему, эквивалентную одному линейному дифференциальному уравнению n-го порядка, то для полученной системы ранг матрицы $\mathbf{M}(\lambda)$ всегда равен $n - 1$.

3. Метод исключения для линейных систем с постоянными коэффициентами произвольного вида.

Рассмотрим систему вида:

$$\begin{array}{l}
M_{11}(D)\, y_1 + M_{12}(D)\, y_2 + \ldots + M_{1n}(D)\, y_n = f_1(x)\,, \\
M_{21}(D)\, y_1 + M_{22}(D)\, y_2 + \ldots + M_{2n}(D)\, y_n = f_2(x)\,, \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
M_{n1}(D)\, y_1 + M_{n2}(D)\, y_2 + \ldots + M_{nn}(D)\, y_n = f_n(x)\,,
\end{array} \tag{4}$$

где $M_{ik}(D)$ - операторные многочлены некоторой степени, $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ - достаточное число раз дифференцируемые функции. Попытаемся получить дифференциальное уравнение для одной из неизвестных, например, y_1. Подействуем на первое уравнение слева оператором $N_{11}(D)$ - алгебраическим дополнением для элемента $M_{11}(D)$ следующего операторного определителя

$$\Delta(D) = \begin{vmatrix} M_{11}(D) & \cdots & M_{1n}(D) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ M_{n1}(D) & \cdots & M_{nn}(D) \end{vmatrix}. \tag{5}$$

На второе уравнение системы (4) подействуем слева оператором $N_{21}(D)$ - алгебраическим дополнением для элемента $M_{21}(D)$ определителя $\Delta(D)$. И т.д. На последнее уравнение действуем слева оператором $N_{n1}(D)$ - алгебраическим дополнением для элемента $M_{n1}(D)$ определителя (5). Затем, складывая получившиеся уравнения, получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{i1}(D)\, N_{i1}(D)\, y_1 + \sum_{i=1}^{n} M_{i2}(D)\, N_{i1}(D)\, y_2 + \ldots + \sum_{i=1}^{n} M_{in}(D)\, N_{i1}(D)\, y_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} N_{i1}(D)\, f_i(x)$$

или

$$\Delta(D)\, y_1 = \sum_{i=1}^{n} N_{i1}(D)\, f_i(x)\,. \tag{6}$$

Уравнение (6) - линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами. Аналогичным образом получаются уравнения для определения неизвестных $y_2, \dots, y_n$:

$$\begin{aligned} &\Delta(D)\, y_2 = \sum_{i=1}^{n} N_{i2}(D)\, f_i(x)\,, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ &\Delta(D)\, y_n = \sum_{i=1}^{n} N_{in}(D)\, f_i(x)\,. \end{aligned} \tag{7}$$

При выводе системы (6)-(7) мы предполагали дифференцируемость решений. Этот факт можно доказать. Может оказаться также, что $\Delta(D) = 0$. Тогда предложенный метод решения ничего не дает. Этот случай мы не будем рассматривать.

Пусть $\Delta(D) \neq 0$. Тогда определитель представляет собой операторный многочлен относительно D некоторой степени m. Степень многочлена m и называется *порядком системы* (4). Общее решение первого уравнения системы (6)-(7) будет содержать m произвольных постоянных, второго - также m постоянных. И т.д. Таким образом, общее число произвольных постоянных окажется равным $m \cdot n$. В соответствии с порядком системы (4) независимыми являются только m произвольных постоянных. Для того, чтобы установить зависимость между произвольными постоянными, следует найденные общие решения системы (6)-(7) подставить в исходную систему (4) и потребовать выполнения тождеств для любых x. В результате этой процедуры должно остаться m произвольных постоянных, через которые выражаются все остальные.

Пример.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений для двух неизвестных функций

$$\begin{aligned} &y' + y + z' = 0, \\ &y'' - y + z'' + z = x. \end{aligned}$$

Представим ее в операторной форме

$$\begin{aligned} &(D+1)\, y + Dz = 0, \\ &(D^2-1)\, y + (D^2+1)\, z = x. \end{aligned}$$

Домножим первое уравнение на (D^2+1), второе на D и вычтем второе из первого. В результате получим:

$$\left[(D+1)\left(D^2+1\right) - D\left(D^2-1\right)\right] y = -1 \Longrightarrow \left(D^2+2D+1\right) y = -1.$$

Составляем характеристическое уравнение

$$(\lambda+1)^2 = 0$$

и находим его корни: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Общее решение однородного уравнения таково

$$y = e^{-x}\left(c_1 + c_2 x\right).$$

Легко видеть, что частным решением неоднородного уравнения является, например, $y = -1$. Таким образом, окончательно

$$y = e^{-x}\left(c_1 + c_2 x\right) - 1.$$

Теперь домножим первое уравнение на $(D-1)$ и вычтем из него второе. Тогда придем к уравнению первого порядка

$$\left[D\left(D-1\right) - \left(D^2+1\right)\right] z = -x \Longrightarrow \left(D+1\right) z = x,$$

общее решение которого легко находится

$$z = c_3 e^{-x} + x - 1.$$

Определитель системы

$$\Delta\left(D\right) = \left[\left(D+1\right)\left(D^2+1\right) - D\left(D^2-1\right)\right] = \left(D+1\right)^2,$$

поэтому ее порядок равен 2. Следовательно, решения системы должны содержать лишь две независимые постоянные. Для отыскания связи постоянных c_1, c_2, c_3 подставим найденные решения в первое уравнение системы. Тогда,

$$-e^{-x}\left(c_1 + c_2 x\right) + c_2 e^{-x} + e^{-x}\left(c_1 + c_2 x\right) - 1 - c_3 e^{-x} + 1 = 0 \Longrightarrow c_3 = c_2.$$

Окончательный вид решения системы таков

$$\begin{aligned} y &= e^{-x}\left(c_1 + c_2 x\right) - 1, \\ z &= c_2 e^{-x} + x - 1. \end{aligned}$$