

ЛЕКЦИЯ 11

2. Частные случаи общего уравнения n -го порядка, допускающие понижение порядка.

Вернемся к уравнению общего вида

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1)$$

1. Предположим, что в уравнении (1) отсутствует функция y и несколько ее первых производных, т.е.

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Производя замену функции $y^{(k)} = z$, понижаем порядок уравнения до $(n - k)$:

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0.$$

2. Пусть в левой части уравнения (1) аргумент x явно не присутствует:

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Здесь удобно ввести новую независимую переменную y , а за функцию взять $y' = p$. Тогда,

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot p'_y; \\ y''' &= \frac{d}{dy}(p \cdot p'_y) \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{d}{dy}(p \frac{dp}{dy}); \dots; \\ y^{(n)} &= (p \frac{d}{dy})^{n-1} p. \end{aligned}$$

Подставляя все в уравнение, приходим к дифференциальному уравнению $(n - 1)$ -го порядка:

$$G(y, p, \dots, p^{(n-1)}) = 0.$$

3. Иногда левая часть уравнения представляет собой полную производную, т.е. уравнение приводится к виду:

$$\frac{d}{dx} [R(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})] = 0.$$

Тогда,

$$R(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = c_1$$

и получаем дифференциальное уравнение $(n - 1)$ -го порядка.

4. Рассмотрим случай, когда левая часть уравнения (1) является однородной функцией относительно y и ее производных:

$$F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n-1)}, ty^{(n)}) = t^m \cdot F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}).$$

Произведем замену функции

$$y = e^{\int z dx}.$$

Тогда,

$$y' = z \cdot e^{\int z dx}; \quad y'' = (z' + z^2) e^{\int z dx}; \dots;$$

$$y^{(n)} = e^{\int z dx} \cdot P_n(z, z', \dots, z^{(n-1)}),$$

где P_n - полином. Подставляя все в уравнение, имеем:

$$F\left(x, e^{\int z dx}, z \cdot e^{\int z dx}, \dots, e^{\int z dx} \cdot P_n(z, z', \dots, z^{(n-1)})\right) =$$

$$= \left\{ t = e^{\int z dx} \right\} = e^{m \int z dx} F(x, 1, z, \dots, P_n(z, z', \dots, z^{(n-1)})) = 0.$$

Отсюда,

$$H(x, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0 -$$

уравнение $(n - 1)$ -го порядка.

Иногда функция F является обобщенно-однородной, т.е.

$$F(tx, t^\alpha y, t^{\alpha-1} y', \dots, t^{\alpha-n} y^{(n)}) = t^m \cdot F(x, y, y', \dots, y^{(n)}).$$

Тогда удобно произвести одновременную замену и аргумента и функции: $x = e^\tau, y = ze^{\alpha\tau}$. В результате,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{d\tau} (ze^{\alpha\tau}) \frac{d\tau}{dx} = e^{(\alpha-1)\tau} \left(\frac{dz}{d\tau} + \alpha z \right); \dots;$$

$$y^{(k)} = e^{(\alpha-k)\tau} L_k(z, z', \dots, z^{(k)}),$$

где L_k - линейная функция переменных. Подставляя все в уравнение, получим:

$$F(e^\tau, ze^{\alpha\tau}, e^{(\alpha-1)\tau} L_1, \dots, e^{(\alpha-n)\tau} L_n) = \{t = e^\tau\} =$$

$$= e^{m\tau} F(1, z, L_1, \dots, L_n) = 0.$$

Отсюда

$$F(1, z, L_1, \dots, L_n) = 0.$$

Данное уравнение уже не содержит независимой переменной и поэтому допускает понижение порядка.

Пример. Закон сохранения энергии. Эволюционная модель Вселенной.

Рассмотрим одномерное уравнение Ньютона для координаты $x(t)$ частицы массы m , движущейся в поле потенциальных сил:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{dU(x)}{dx}.$$

Уравнение не содержит независимой переменной - времени t . Производя замену $\dot{x} = v$, где v - скорость частицы, имеем: $\ddot{x} = v'_x \cdot v$. Поэтому,

$$m v v'_x = - \frac{dU}{dx} \implies \frac{d}{dx} \left(\frac{m v^2}{2} + U \right) = 0 \implies \frac{m v^2}{2} + U = C.$$

Получили известный в физике закон сохранения энергии.

В 30-х годах двадцатого столетия Фридманом из уравнений *общей теории относительности* было найдено сферически симметричное решение, указавшее возможные сценарии развития Вселенной.

Основную идею этих решений можно понять на простой физической модели. Рассмотрим сферически симметричный рой материальных частиц массы m , заключенных в начальный момент времени $t = 0$ в сферу радиуса R_0 . Определим дальнейшую эволюцию этого образования массы M , если начальные скорости частиц, расположенных на оболочке сферы равны v_0 .

Запишем уравнение Ньютона для расстояния $R(t)$ от центра сферы до частицы оболочки:

$$m\ddot{R} = -\gamma\frac{mM}{R^2},$$

где γ - гравитационная постоянная. Умножим обе части уравнения на $2\dot{R}$

$$2\dot{R}\ddot{R} = -2\gamma M\frac{\dot{R}}{R^2} \implies \frac{d}{dt}(\dot{R}^2) = \frac{d}{dt}\left(\frac{2\gamma M}{R}\right) \implies \dot{R}^2 = \frac{2\gamma M}{R} + c.$$

Из начальных условий находим

$$c = v_0^2 - \frac{2\gamma M}{R_0}.$$

Рассмотрим сначала наиболее простой случай: $c = 0$. Тогда,

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} \implies \sqrt{R}dR = \sqrt{2\gamma M}dt \implies \frac{2}{3}R^{3/2} = \sqrt{2\gamma M}t + c_1.$$

Определяя константу c_1 из начального условия $R(0) = R_0$, приходим окончательно к

$$R = \left(R_0^{3/2} + 3\sqrt{\frac{\gamma M}{2}}t\right)^{2/3}.$$

В асимптотике $t \rightarrow \infty$ $R(t) \sim t^{2/3} \rightarrow \infty$, т.е. радиус сферы увеличивается неограниченно со временем. Аналогичным образом ведет себя решение при $c > 0 \implies v_0^2 > 2\gamma M/R_0$.

Пусть теперь $c < 0$. Тогда, обозначая $c = -w^2$, имеем:

$$R = \frac{2\gamma M}{\dot{R}^2 + w^2}.$$

Введем параметр соотношением $\dot{R} = w \cot(p/2)$. В результате получим

$$R = \frac{2\gamma M \sin^2(p/2)}{w^2} = \frac{\gamma M}{w^2} (1 - \cos p).$$

Наконец,

$$dt = \frac{dR}{\dot{R}} = \frac{\gamma M}{w^2} \cdot \frac{\sin p}{w \cot(p/2)} dp = \frac{2\gamma M}{w^3} \sin^2(p/2) dp = \frac{\gamma M}{w^3} (1 - \cos p) dp.$$

Отсюда,

$$t = \frac{\gamma M}{w^3} (p - \sin p) + c_1.$$

Параметрические уравнения

$$t = \frac{\gamma M}{w^3} (p - \sin p) + c_1,$$

$$R = \frac{\gamma M}{w^2} (1 - \cos p)$$

определяют циклоиду. Это означает, что за расширением сферы наступает сжатие.

Таким образом, при $v_0^2 \geq 2\gamma M/R_0$ мы имеем модель расширяющейся Вселенной, а при $v_0^2 < 2\gamma M/R_0$ - так называемый *коллапс* Вселенной. Режим сжатия будет иметь место при достаточно большой плотности вещества ρ

$$\rho > \frac{3}{8\pi} \cdot \frac{v_0^2}{\gamma R_0^2}.$$

В настоящее время Вселенная расширяется. Каков дальнейший сценарий - расширение или коллапс зависит от величины ρ , а этот параметр очень сложно оценить.

3. Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка.

Определение. *Линейным дифференциальным уравнением n -го порядка* называют уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = f(x), \quad (2)$$

в которое неизвестная функция и ее производные входят линейно. Будем считать функции $a_1(x), \dots, a_n(x), f(x)$ непрерывными на отрезке $[a, b]$.

Теорема. Если функции $f(x)$ и $a_i(x), i = \overline{1, n}$ в уравнении (2) непрерывны на $[a, b]$, то в области $G : a < x < b, -\infty < y < \infty, \dots, -\infty < y^{(n-1)} < \infty$ с начальной точкой $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ существует единственное решение линейного уравнения (2) $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее начальным условиям: $\varphi(x_0) = y_0, \varphi'(x_0) = y'_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ и определенное в окрестности $x_0 : |x - x_0| \leq h$.

Доказательство: перенесем все слагаемые, кроме $y^{(n)}$, в правую часть уравнения (2), приведя его к стандартной форме,

$$y^{(n)} = -a_1(x) y^{(n-1)} - \dots - a_{n-1}(x) y' - a_n(x) y + f(x).$$

Проверим выполнение условий ранее доказанной теоремы для уравнения n -го порядка с

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = - \sum_{i=1}^n a_i(x) y^{(n-i)} + f(x).$$

Функция f непрерывна по совокупности переменных в области G в силу линейности по переменным $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ и условий теоремы о непрерывности $a_i(x)$ и $f(x)$. Далее, поскольку

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} = -a_{n-k}(x),$$

правая часть уравнения имеет непрерывные частные производные. Следовательно, на отрезке $[a, b]$ эти производные ограничены. Поэтому все условия общей теоремы выполнены, и существует единственное решение уравнения (2). \square

Заметим, что можно доказать существование и единственность решения линейного дифференциального уравнения n -го порядка методом последовательных приближений на всем интервале $a < x < b$ при начальных условиях $\varphi(x_0) = y_0, \varphi'(x_0) = y'_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, где значения $(y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ - любые.

Уравнение (2) с $f(x) \neq 0$ носит название *неоднородного*. Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (3)$$

называется *однородным*, соответствующим неоднородному уравнению (2). Уравнение (3) всегда имеет *тривиальное решение* $y = 0$, которое удовлетворяет нулевым начальным условиям $(x_0, 0, 0, \dots, 0)$. В силу доказанной теоремы такое решение единственно.

Назовем выражение

$$\frac{d^n}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) = \hat{L}$$

дифференциальным оператором. Такой оператор является линейным, поскольку обладает свойством

$$\hat{L}(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1\hat{L}y_1 + c_2\hat{L}y_2$$

для $\forall c_1, c_2 \in \mathfrak{R}$.

4. Общая теория линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка.

Теорема 1. О линейной комбинации решений однородного дифференциального уравнения.

Если функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$ есть решения однородного уравнения (3), т.е. $\hat{L}y_1 = \hat{L}y_2 = \dots = \hat{L}y_k = 0$, то их линейная комбинация $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ky_k(x)$ (c_1, c_2, \dots, c_k - произвольные постоянные) также является решением.

Доказательство: воспользуемся свойством линейности оператора \hat{L} . Тогда,

$$\hat{L} \left[\sum_{i=1}^k c_i y_i(x) \right] = \sum_{i=1}^k c_i \hat{L} y_i(x) = 0.$$

Значит, линейная комбинация - также решение. \square

В связи с доказанной теоремой возникает мысль, как построить общее решение дифференциального уравнения (3). Такое решение содержит n констант. Поэтому нужно взять n линейно независимых решений и построить их линейную комбинацию.

Теорема 2. Об определителе Вронского системы линейно зависимых функций.

Если $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ - линейно зависимые, достаточное число раз дифференцируемые функции, то определитель Вронского тождественно равен нулю.

Таким образом, если $W(x)$ для системы n решений равен нулю в одной точке, то он тождественно равен нулю, и решения линейно зависимы.

Определение. Система n линейно независимых решений однородного линейного дифференциального уравнения n -го порядка называется *фундаментальной*.

Теорема 4. О существовании фундаментальной системы решений.

Линейное однородное дифференциальное уравнение n -го порядка всегда имеет фундаментальную систему решений.

Доказательство: выберем n^2 действительных чисел a_{ik} таким образом, чтобы $\det \{a_{ik}\} \neq 0$. Построим систему решений линейного однородного уравнения (1) следующим образом.

Первое решение определим так, чтобы при $x = x_0$: $y_1(x_0) = a_{11}, y_1'(x_0) = a_{21}, \dots, y_1^{(n-1)}(x_0) = a_{n1}$. По теореме существования такое решение единственно. Определим второе решение $y_2(x)$ так, чтобы для него начальными условиями были $(x_0, a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2})$. И т.д. Аналогично для $y_n(x)$ за начальные условия берем $(x_0, a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{nn})$. По построению, для этой системы решений $W(y_1, y_2, \dots, y_n) |_{x=x_0} \neq 0$. Следовательно, данная система решений линейно независима, т.е. фундаментальна. \square

Теорема 5. О линейном преобразовании фундаментальной системы решений.

Если фундаментальную систему решений подвергнуть линейному невырожденному преобразованию, то получится снова фундаментальная система решений.

Доказательство: рассмотрим новую систему функций $\vec{z} = (z_1 \ z_2 \ \dots \ z_n)$, которая получается линейным невырожденным преобразованием из фундаментальной системы $\vec{y} = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)$:

$$\vec{z} = \vec{y} \mathbf{A}^T \text{ или } z_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} y_k,$$

причем $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T \neq 0$.

Поскольку y_k - решения однородного дифференциального уравнения (1), то их линейные комбинации z_i также являются решениями (см.теорему 1). Докажем фундаментальность системы решений \vec{z} . Составим матрицу

$$\begin{pmatrix} \vec{z} \\ \vec{z}' \\ \dots \\ \vec{z}^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{y} \mathbf{A}^T \\ \vec{y}' \mathbf{A}^T \\ \dots \\ \vec{y}^{(n-1)} \mathbf{A}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{y} \\ \vec{y}' \\ \dots \\ \vec{y}^{(n-1)} \end{pmatrix} \mathbf{A}^T.$$

Отсюда

$$W(z_1, z_2, \dots, z_n) = W(y_1, y_2, \dots, y_n) \cdot \det \mathbf{A}.$$

В силу фундаментальности исходной системы $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ определитель Вронского $W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$ (см.теорему 3), а поскольку линейное преобразование невырождено - и $\det \mathbf{A} \neq 0$. Поэтому, при любых x определитель Вронского $W(z_1, z_2, \dots, z_n)$ системы решений $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ отличен от нуля. Значит, в соответствии со следствием к теоремам 2, 3 новая система решений однородного дифференциального уравнения также фундаментальна. \square

б) пусть y_1, y_2, \dots, y_n - линейно независимая система решений. Тогда она является фундаментальной, и по теореме 6 любое другое решение может быть представлено в виде линейной комбинации решений y_1, y_2, \dots, y_n , в частности, и y_{n+1} . Таким образом, всегда найдутся постоянные β_i ($i = 1, 2, \dots, n$), для которых

$$y_{n+1} = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \dots + \beta_n y_n.$$

Это и означает, что система решений $y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}$ линейно зависима. \square

Замечание. Все доказанные теоремы можно подытожить так: множество решений однородного линейного дифференциального уравнения n -го порядка образует линейное n -мерное векторное пространство, базисом которого является фундаментальная система решений.

Теорема 8. О тождественности линейных однородных дифференциальных уравнений.

Если два линейных однородных дифференциальных уравнения с коэффициентами при старшей производной, равными единице, имеют одну и ту же фундаментальную систему решений, то они тождественны.

Доказательство: предположим, что имеются два линейных однородных дифференциальных уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0,$$

$$y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}(x)y' + b_n(x)y = 0,$$

имеющие одну и ту же фундаментальную систему решений y_1, y_2, \dots, y_n . Вычитая одно уравнение из другого, получим:

$$[a_1(x) - b_1(x)]y^{(n-1)} + \dots + [a_n(x) - b_n(x)]y = 0. \quad (3)$$

Функции y_1, y_2, \dots, y_n обращают это уравнение в тождество, поскольку они являются решениями как уравнения с коэффициентами $a_i(x)$ так и уравнения с коэффициентами $b_i(x)$. Допустим, что $\exists i$ такое, что в точке $x = x_0$: $a_i(x_0) \neq b_i(x_0)$. Тогда, в силу непрерывности функций $a_i(x)$ и $b_i(x)$ неравенство имеет место и в некоторой окрестности точки x_0 , т.е. $a_i(x) - b_i(x) \neq 0$. Поделим уравнение (3) на первую отличную от нуля разность $[a_k(x) - b_k(x)]$. Тогда получим дифференциальное уравнение порядка не выше $(n - 1)$ с коэффициентом при старшей производной, равном единице. Более того, коэффициенты этого уравнения будут непрерывными функциями в некотором интервале. Данное уравнение имеет фундаментальную систему решений y_1, y_2, \dots, y_n , однако, по теореме 7 максимальное число линейно независимых решений такого уравнения не превосходит его порядка, т.е. $(n - 1)$. Пришли к противоречию. Значит, для $\forall i, x$: $a_i(x) \equiv b_i(x)$. \square

ЛЕКЦИЯ 13

Следствие. Фундаментальная система решений однозначно определяет линейное однородное дифференциальное уравнение.

Указанное следствие позволяет сформулировать следующую задачу.

Задача. Задана фундаментальная система решений некоторого линейного однородного дифференциального уравнения. Построить дифференциальное уравнение, которое имеет эту фундаментальную систему решений.

Решение.

Пусть $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ - система линейно независимых n раз дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$. Составим определитель

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' & y' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Данное равенство представляет собой однородное линейное дифференциальное уравнение n -го порядка для неизвестной функции $y(x)$. Подстановка вместо $y(x)$ любой функции $y_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) обращает уравнение в тождество (возникают два одинаковых столбца в определителе). Это означает, что функции $y_i(x)$ являются линейно независимыми решениями построенного уравнения, т.е. его фундаментальной системой решений. Коэффициентом при старшей производной $y^{(n)}$, входящей в уравнение, является определитель Вронского $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$. Для фундаментальной системы решений $W(x) \neq 0$ ни в одной точке отрезка $[a, b]$, и поэтому на него можно поделить обе части уравнения. Раскладывая определитель по последнему столбцу и деля обе части равенства на $W(x)$, приходим к однородному линейному дифференциальному уравнению вида:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \quad (1)$$

где

$$a_i(x) = (-1)^i \frac{\Delta_i(x)}{W(x)},$$

$$\Delta_i(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-i-1)} & y_2^{(n-i-1)} & \cdots & y_n^{(n-i-1)} \\ y_1^{(n-i+1)} & y_2^{(n-i+1)} & \cdots & y_n^{(n-i+1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

В частности,

$$a_1(x) = -\frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Таким образом, искомое уравнение построено.

Формула Лиувилля.

Выведем сначала формулу дифференцирования функционального определителя. Рассмотрим производную

$$\frac{d\Delta(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

Воспользуемся формулой для определителя

$$\Delta(x) = \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} (-1)^r a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n},$$

где сумма содержит $n!$ слагаемых, соответствующих различным упорядоченным множествам (k_1, k_2, \dots, k_n) , получаемым r попарными перестановками (транспозициями) элементов из множества $(1, 2, \dots, n)$. Тогда,

$$\frac{d\Delta(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left[\sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} (-1)^r a_{1k_1}(x) a_{2k_2}(x) \cdots a_{nk_n}(x) \right] = \sum_{i=1}^n \Delta_i(x),$$

где

$$\Delta_i(x) = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1}(x) & a'_{i2}(x) & \cdots & a'_{in}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

Применяя найденную формулу, подсчитаем производную определителя Вронского $W'(x)$.

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Поскольку все определители, кроме последнего, зануляются (содержат одинаковые строки), то в соответствии с формулой (2)

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = -a_1(x) W(x).$$

Решая полученное дифференциальное уравнение первого порядка, находим:

$$W(x) = c \exp\left(-\int a_1(x) dx\right)$$

или

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^x a_1(t) dt\right). \quad (3)$$

Формула (3) и называется *формулой Лиувилля*. Из нее отчетливо видно, что если $W(x) = 0$ в одной точке, то он тождественно равен нулю.

На практике выведенную формулу Лиувилля можно с успехом применять для отыскания взаимосвязи фундаментальных решений линейного однородного дифференциального уравнения. Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка общего вида

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0.$$

Пусть известно частное решение $y_1(x)$ этого уравнения. Построим систему фундаментальных решений, взяв в качестве одного из них $y_1(x)$, а второе определив из формулы Лиувилля. В самом деле, согласно (3)

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = c \exp\left(-\int a_1(x) dx\right).$$

Отсюда,

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = c \exp\left(-\int a_1(x) dx\right)$$

или

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{c}{y_1^2} \exp\left(-\int a_1(x) dx\right).$$

Проводя интегрирование, получаем формулу связи фундаментальных решений в виде двух квадратур

$$y_2(x) = y_1(x) \int \exp\left(-\int a_1(x) dx\right) \frac{dx}{y_1^2(x)}. \quad (4)$$

(константа c отнесена в множитель функции $y_1(x)$).

Пример. Допустим, нам известно одно из фундаментальных решений уравнения второго порядка: $y_1(x) = \cos x$. Выведенная формула (4) позволяет найти второе фундаментальное решение при заданном коэффициенте $a_1(x)$ при y' , а затем построить само дифференциальное уравнение и записать его общее решение. Положим для простоты $a_1(x) = 0$. Тогда,

$$y_2(x) = \cos x \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \cos x \cdot \tan x = \sin x.$$

Построим теперь по известной фундаментальной системе $\{\cos x, \sin x\}$ линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Составим определитель

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x & y \\ -\sin x & \cos x & y' \\ -\cos x & -\sin x & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Складывая первую и третью строки и разлагая определитель по третьей строке, приходим к известному уравнению математического маятника

$$y'' + y = 0,$$

общее решение которого имеет вид:

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Пример. Найдем общее решение дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Поскольку коэффициенты уравнения являются полиномами, частное решение можно поискать также в виде полинома некоторой степени k

$$y(x) = x^k + b_1 x^{k-1} + \dots + b_{k-1} x + b_k.$$

Подставим это выражение в уравнение.

$$k(k-1)x^{k-2} + \dots - 2x[kx^{k-1} + (k-1)b_1x^{k-2} \dots] + 2x^k + 2b_1x^{k-1} + \dots = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при старшей степени x , определяем степень полинома: $k = 1$. Следовательно, частное решение следует искать в виде линейной функции $y = x + b_1$. Подставляя ее в уравнение, найдем:

$$-2x + 2x + 2b_1 = 0 \implies b_1 = 0.$$

Таким образом, частное решение рассматриваемого уравнения имеет вид: $y_1(x) = x$.

По формуле (4) определяем второе линейно независимое решение

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x \int \exp \left\{ \int 2x dx \right\} \frac{dx}{x^2} = x \int e^{x^2} \frac{dx}{x^2} = x \left(-\frac{e^{x^2}}{x} + 2 \int e^{x^2} dx \right) = \\ &= 2x \int e^{x^2} dx - e^{x^2}. \end{aligned}$$

Заметим, что второе решение не выражается через элементарные функции, но быстро нарастает при $|x| \rightarrow \infty$. Общее решение уравнения таково

$$y = c_1 x + c_2 \left(2x \int e^{x^2} dx - e^{x^2} \right).$$

Понижение порядка однородного линейного дифференциального уравнения.

Как понизить порядок однородного линейного дифференциального уравнения ? Один прием мы рассматривали ранее - замену функции

$$y = \exp \left\{ \int z dx \right\}.$$

При этом уравнение для новой функции $z(x)$ оказывается уже нелинейным. Оказывается, если известно какое-либо частное решение $y_1(x)$, то порядок уравнения можно понизить, сохранив его линейность.

Введем новую функцию $z(x)$ соотношением $y = y_1 z$. Тогда,

$$y' = y_1' z + y_1 z'; \quad y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z''; \dots;$$

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k y_1^{(k)} z^{(n-k)} = y_1^{(n)} z + n y_1^{(n-1)} z' + \dots + y_1 z^{(n)}.$$

Подставляя все в однородное дифференциальное уравнение (1), приходим к

$$z \hat{L} y_1(x) + b_{n-1}(x) z' + \dots + b_1(x) z^{(n-1)} + y_1(x) z^{(n)} = 0,$$

где оператор \hat{L} , по-прежнему,

$$\hat{L} = \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{d}{dx} + a_n(x).$$

Поскольку $y_1(x)$ - решение дифференциального уравнения, $\hat{L} y_1(x) = 0$, и в результате получаем линейное однородное уравнение, не содержащее явно функции z . Вводя еще одну функцию $u = z'$ и деля обе части уравнения на функцию $y_1(x)$, приходим к

$$u^{(n-1)} + d_1(x) u^{(n-2)} + \dots + d_{n-1}(x) u = 0,$$

где $d_i = b_i/y_1$. Полученное уравнение $(n-1)$ -го порядка имеет фундаментальную систему решений u_1, u_2, \dots, u_{n-1} . Вспоминая замены: $u = (y/y_1)'$, для исходного дифференциального уравнения находим систему решений:

$$y_1, y_1 \int u_1 dx, y_1 \int u_2 dx, \dots, y_1 \int u_{n-1} dx.$$

Докажите самостоятельно, что если система u_1, u_2, \dots, u_{n-1} - фундаментальная, то полученная система решений также фундаментальна.

5. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение n -го порядка.

Поговорим теперь о свойствах решений неоднородного уравнения

$$\hat{L} y = y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = f(x). \quad (5)$$

удовлетворяет неоднородному уравнению. В самом деле:

$$\hat{L} \left(\sum_i \alpha_i Y_i \right) = \sum_i \alpha_i \hat{L} Y_i = \sum_i \alpha_i f_i = f(x). \quad \square$$

ЛЕКЦИЯ 14

Метод вариации произвольных постоянных для отыскания частного решения неоднородного уравнения.

Покажем, что с помощью известной фундаментальной системы решений y_1, y_2, \dots, y_n линейного однородного уравнения можно найти частное решение неоднородного дифференциального уравнения

$$\hat{L}y = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

и, следовательно, построить его общее решение. Воспользуемся тем, что общее решение однородного уравнения представляется в виде суперпозиции

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n. \quad (2)$$

Совершенно ясно, что ни при каких постоянных c_1, c_2, \dots, c_n функция (2) не будет решением неоднородного уравнения (1). Попробуем, считая постоянные функциями $x : c_i = c_i(x)$, подобрать их так, чтобы функция (2) стала решением неоднородного уравнения (1).

Поскольку вместо одной неизвестной функции $y(x)$ мы ввели n функций, то мы имеем право наложить $(n - 1)$ условий на $c_i(x)$ так, как нам удобно. Продифференцируем обе части выражения (2)

$$y' = c'_1y_1 + c'_2y_2 + \dots + c'_ny_n + c_1y'_1 + c_2y'_2 + \dots + c_ny'_n.$$

Потребуем, чтобы y' имела такое же выражение как и при постоянных c_i , т.е. положим

$$c'_1y_1 + c'_2y_2 + \dots + c'_ny_n = 0. \quad (3)$$

Дифференцируя еще раз соотношение для

$$y' = \sum_{k=1}^n c_k y'_k,$$

находим:

$$y'' = \sum_{k=1}^n c'_k y'_k + \sum_{k=1}^n c_k y''_k.$$

Опять потребуем, чтобы выражение для y'' выглядело также как и при постоянных c_i . В результате получаем еще одно условие

$$c'_1y'_1 + c'_2y'_2 + \dots + c'_ny'_n = 0. \quad (4)$$

Поступая далее аналогичным образом, можно придти к выражению для $(n - 1)$ производной вида

$$y^{(n-1)} = \sum_{k=1}^n c_k y_k^{(n-1)},$$

$u = u(x), v = v(x)$. Если $u(x)$ и $v(x)$ - дифференцируемые функции, то $w'(x) = u'(x) + iv'(x)$.

Если $\lambda = \alpha + i\beta$ - комплексное число, то по определению

$$e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha} (\cos \beta + i \sin \beta).$$

При $\alpha = 0$ отсюда имеем

$$e^{i\beta} = \cos \beta + i \sin \beta,$$

что совпадает с известной *формулой Эйлера*. Так определяется функция с комплексным показателем. Заменяя β на $-\beta$, имеем:

$$e^{-i\beta} = \cos \beta - i \sin \beta.$$

Складывая и вычитая левые и правые части последних двух равенств, получаем:

$$\cos \beta = \frac{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}{2}, \quad \sin \beta = \frac{e^{i\beta} - e^{-i\beta}}{2i}.$$

Для функции $y = e^{\lambda x}$, где $\lambda = \alpha + i\beta$, в соответствии с определением имеем:

$$y = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x).$$

Установим правило дифференцирования этой функции. Рассмотрим сначала производную

$$\begin{aligned} (e^{i\beta x})' &= (\cos \beta x + i \sin \beta x)' = -\beta \sin \beta x + i\beta \cos \beta x = \\ &= i\beta (\cos \beta x + i \sin \beta x) = i\beta e^{i\beta x}. \end{aligned}$$

В общем случае

$$\begin{aligned} y' &= (e^{\lambda x})' = (e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x})' = (e^{\alpha x})' e^{i\beta x} + e^{\alpha x} (e^{i\beta x})' = \\ &= \alpha e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} + i\beta e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = (\alpha + i\beta) e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}. \end{aligned}$$

Это означает, что функция $y = e^{\lambda x}$ ($\lambda = \alpha + i\beta$) является решением дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y.$$

Его общее решение таково

$$y = ce^{\lambda x}, \text{ где } c = c_1 + ic_2.$$

Утверждение.

Если комплекснозначная функция $y(x) = u(x) + iv(x)$ является решением линейного однородного дифференциального уравнения $\hat{L}y = 0$, то ее действительная часть $u(x)$ и мнимая часть $v(x)$ являются решениями того же уравнения.

Доказательство: в силу линейных свойств дифференциального оператора \hat{L} и определения производных комплекснозначной функции

$$\hat{L}y = \hat{L}(u + iv) = \hat{L}u + i\hat{L}v = 0.$$

Комплексное число равно нулю тогда и только тогда, когда обращаются одновременно в нуль его действительная и мнимая части. Значит, $\hat{L}u = 0, \hat{L}v = 0$. ▣

Операторные многочлены и их свойства.

Перейдем к анализу линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (8)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n = \text{const}$. Попытаемся найти фундаментальную систему решений уравнения (8). Введем оператор дифференцирования $D : y' = Dy$. Тогда $y'' = (y')' = D(Dy) = D^2 y, \dots, y^{(n)} = D^n y$. Уравнение (8) при этом примет вид

$$D^n y + a_1 D^{n-1} y + \dots + a_{n-1} Dy + a_n y = 0$$

или

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) y = 0.$$

Многочлен, стоящий перед функцией y , является многочленом от оператора дифференцирования и носит название *операторного многочлена* $M(D)$:

$$M(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} D^k \quad (a_0 = 1).$$

Уравнение (8) принимает компактный вид: $M(D)y = 0$.

Отметим основные свойства операторных многочленов.

1. Закон сложения (ассоциативность):

$$[M(D) + N(D)]y = M(D)y + N(D)y.$$

2. Под умножением операторных многочленов понимается их последовательное применение.

$$M(D)[N(D)y] = [M(D)N(D)]y.$$

Отсюда,

$$\sum_{k=0}^n a_{n-k} D^k \left[\sum_{s=0}^m b_{m-s} D^s y \right] = \sum_{k=0}^n \sum_{s=0}^m a_{n-k} b_{m-s} D^{k+s} y = \sum_{s=0}^m b_{m-s} D^s \left[\sum_{k=0}^n a_{n-k} D^k y \right].$$

Следовательно, верен переместительный закон:

$$M(D)[N(D)y] = N(D)[M(D)y].$$

3. Поскольку $M(D)$ - дифференциальный оператор, то

$$M(D)(y_1 + y_2) = M(D)y_1 + M(D)y_2.$$

4. Справедлив дистрибутивный закон

$$M(D)[N(D) + Q(D)]y = M(D)N(D)y + M(D)Q(D)y.$$

Свойства 1-4 показывают, что для операторных многочленов справедливы все теоремы алгебры. Отсюда следует еще одно свойство.

5. Операторный многочлен можно разложить на множители. Введем *характеристический многочлен*

$$M(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n. \quad (9)$$

Этот многочлен имеет n корней и представим по теореме алгебры в виде

$$M(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n).$$

Значит,

$$M(D) = D^n + a_1D^{n-1} + \dots + a_{n-1}D + a_n = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (D - \lambda_n). \quad (10)$$

Решение линейного уравнения в случае простых корней.

Допустим, что характеристический многочлен (9) имеет n различных корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Тогда из (10) имеем:

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (D - \lambda_n) y = 0. \quad (11)$$

Поскольку операторы, стоящие в (11) в скобках, обладают переместительным свойством, то любой из них можно сделать последним. Это означает, что уравнение (11) имеет решения:

$$(D - \lambda_i) y = 0 \implies \frac{dy}{dx} = \lambda_i y \implies y_i = e^{\lambda_i x}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Здесь постоянные λ_i могут быть и комплексными. В итоге, мы получили n решений. Можно ли по ним построить общее решение? Если найденные решения линейно независимы, т.е. образуют фундаментальную систему, то можно. Докажем фундаментальность найденной системы решений.

Составим определитель Вронского

$$\begin{aligned} W(y_1, \dots, y_n) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = \\ &= e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)x} \prod_{i>k} (\lambda_i - \lambda_k) \neq 0. \end{aligned}$$

В наших расчетах встретился *определитель Вандермонда*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>k} (\lambda_i - \lambda_k),$$

равный произведениям всевозможных попарных разностей чисел λ_i .

Поскольку определитель Вронского отличен от нуля, найденная система решений фундаментальна, и общее решение линейного однородного дифференциального уравнения в случае простых корней имеет вид:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}. \quad (12)$$

Таким образом, для построения общего решения (12) достаточно найти корни характеристического многочлена, т.е. решить уравнение $M(\lambda) = 0$. Если среди корней λ_i встречаются комплексные, то выделяют действительное решение. Делается это следующим образом.

Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ - корень характеристического уравнения. Так как коэффициенты многочлена действительны, то имеется сопряженный корень $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$. Таким образом, имеем два комплексных решения

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x),$$

$$y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x).$$

Комбинируя их, легко получить два действительных решения

$$Y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

$$Y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x = \frac{y_1 - y_2}{2i}.$$

Проверим, что найденные решения линейно независимы. Для этого составим определитель матрицы перехода

$$\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2i & -1/2i \end{vmatrix} = \frac{i}{2} \neq 0.$$

Тогда из линейной независимости решений y_1, y_2 вытекает линейная независимость решений Y_1, Y_2 .

В случае, когда имеется несколько комплексных корней, определитель матрицы перехода

$$\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1/2i & -1/2i & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/2i & -1/2i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

В результате мы можем получить только линейно независимые действительные решения.

Решение линейного уравнения в случае кратных корней.

Пусть характеристический многочлен

$$M(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

имеет кратные корни: корень λ_1 кратности m_1 , корень λ_2 кратности m_2 , ..., корень λ_k кратности m_k , причем $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$. В этом случае операторный многочлен $M(D)$ может быть разложен на следующие множители:

$$M(D) = (D - \lambda_1)^{m_1} (D - \lambda_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (D - \lambda_k)^{m_k},$$

а дифференциальное уравнение

$$(D - \lambda_1)^{m_1} (D - \lambda_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (D - \lambda_k)^{m_k} y = 0$$

распадается на k уравнений

$$(D - \lambda_s)^{m_s} y = 0; \quad s = 1, 2, \dots, k. \quad (1)$$

Мы уже знаем, что решением этого уравнения является функция $y = e^{\lambda_s x}$, $s = \overline{1, k}$. Но всего таких решений $k < n$. Нам не хватает $(n - k)$ решений для построения фундаментальной системы. Как найти дополнительные решения?

Выведем сначала вспомогательное операторное соотношение, называемое *формулой смещения*

$$M(D) e^{\lambda x} f(x) = e^{\lambda x} M(D + \lambda) f(x). \quad (2)$$

Подставим в левую часть выражение операторного многочлена

$$M(D) = \sum_{l=0}^n a_{n-l} D^l \quad (a_0 = 1).$$

Тогда,

$$M(D) e^{\lambda x} f(x) = \sum_{l=0}^n a_{n-l} D^l e^{\lambda x} f(x) = \sum_{l=0}^n a_{n-l} [e^{\lambda x} f(x)]^{(l)} =$$

применим формулу Лейбница для производной от произведения функций

$$\begin{aligned} &= \sum_{l=0}^n a_{n-l} \sum_{j=0}^l C_l^j (e^{\lambda x})^{(j)} f^{(l-j)}(x) = \sum_{l=0}^n a_{n-l} \sum_{j=0}^l C_l^j \lambda^j e^{\lambda x} f^{(l-j)}(x) = \\ &= e^{\lambda x} \left[\sum_{l=0}^n a_{n-l} \sum_{j=0}^l C_l^j \lambda^j D^{l-j} \right] f(x) = e^{\lambda x} \left[\sum_{l=0}^n a_{n-l} (D + \lambda)^l \right] f(x) = \end{aligned}$$

$$= e^{\lambda x} M(D + \lambda) f(x). \quad \boxed{*}$$

Вернемся к уравнению (1). Будем искать его решение в виде $y = e^{\lambda_s x} P(x)$. Тогда,

$$(D - \lambda_s)^{m_s} e^{\lambda_s x} P(x) = 0,$$

и применяя формулу смещения, имеем:

$$D^{m_s} P(x) = 0$$

или

$$\frac{d^{m_s}}{dx^{m_s}} P(x) = 0.$$

Решением получившегося уравнения является произвольный полином степени $(m_s - 1)$, т.е.

$$P(x) = c_0 x^{m_s-1} + c_1 x^{m_s-2} + \dots + c_{m_s-2} x + c_{m_s-1}.$$

Окончательный вид решения уравнения (1) таков

$$y = e^{\lambda_s x} (c_0 x^{m_s-1} + c_1 x^{m_s-2} + \dots + c_{m_s-2} x + c_{m_s-1}).$$

Как получить отсюда линейно независимые решения ?

Будем полагать поочередно: $c_{m_s-1} = 1$, остальные - нули; $c_{m_s-2} = 1$, остальные - нули; ...; $c_0 = 1$, остальные - нули. В результате получим m_s решений вида

$$e^{\lambda_s x}, \quad x e^{\lambda_s x}, \dots, \quad x^{m_s-1} e^{\lambda_s x}, \quad (3)$$

соответствующих кратности корня λ_s характеристического многочлена. Серии решений вида (3) получаются для всех остальных корней, так что общее число построенных решений равно $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$.

Покажем, что построенная система решений фундаментальна. Предположим *противное*, т.е. что система решений линейно зависима. Это означает, что существует набор действительных постоянных α_{ij} (не все из которых нули), для которого

$$\begin{aligned} & \alpha_{11} e^{\lambda_1 x} + \alpha_{12} x e^{\lambda_1 x} + \dots + \alpha_{1m_1} x^{m_1-1} e^{\lambda_1 x} + \dots + \alpha_{k1} e^{\lambda_k x} + \alpha_{k2} x e^{\lambda_k x} + \\ & + \dots + \alpha_{km_k} x^{m_k-1} e^{\lambda_k x} \equiv 0 \end{aligned}$$

или

$$P_{m_1-1}(x) e^{\lambda_1 x} + Q_{m_2-1}(x) e^{\lambda_2 x} + \dots + R_{m_k-1}(x) e^{\lambda_k x} \equiv 0 \quad \text{для } \forall x. \quad (4)$$

Покажем, что отсюда вытекает равенство нулю всех многочленов $P_{m_1-1}(x), Q_{m_2-1}(x), \dots, R_{m_k-1}(x)$.

Снова применим прием от противного. Пусть хотя бы у одного из многочленов не все коэффициенты α_{ij} являются нулями, например у $P_{m_1-1}(x)$ отличен от нуля коэффициент при старшей степени α_{1m_1} . Разделим тождество (4) на $e^{\lambda_k x}$:

$$P_{m_1-1}(x) e^{(\lambda_1-\lambda_k)x} + Q_{m_2-1}(x) e^{(\lambda_2-\lambda_k)x} + \dots + R_{m_k-1}(x) \equiv 0$$

и продифференцируем его m_k раз для того, чтобы исчез многочлен $R_{m_k-1}(x)$. Поскольку,

$$[P_{m_1-1}(x) e^{(\lambda_1-\lambda_k)x}]' = [(\lambda_1 - \lambda_k) P_{m_1-1}(x) + P'_{m_1-1}(x)] e^{(\lambda_1-\lambda_k)x},$$

то в силу условий $\lambda_1 \neq \lambda_k$ и $P_{m_1-1}(x) \neq 0$ в квадратных скобках получается многочлен той же степени, что и $P_{m_1-1}(x)$. В результате, после дифференцирования m_k раз придем к:

$$\tilde{P}_{m_1-1}(x) e^{(\lambda_1-\lambda_k)x} + \tilde{Q}_{m_2-1}(x) e^{(\lambda_2-\lambda_k)x} + \dots + \tilde{T}_{m_k-1-1}(x) e^{(\lambda_{k-1}-\lambda_k)x} \equiv 0.$$

Многочленов стало на один меньше. Разделим теперь тождество на $e^{(\lambda_{k-1}-\lambda_k)x}$ и продифференцируем его m_{k-1} раз для того, чтобы исчез многочлен $\tilde{T}_{m_k-1-1}(x)$. В результате получим $(k-2)$ слагаемых. И т.д. В конце этой процедуры придем к тождеству вида

$$\bar{P}_{m_1-1}(x) e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} \equiv 0.$$

Из него следует, что $\bar{P}_{m_1-1}(x) \equiv 0$ при $\forall x$, а значит все коэффициенты многочлена $\bar{P}_{m_1-1}(x)$ обращаются в нуль. В том числе и коэффициент при старшей степени, который совпадает с аналогичным коэффициентом α_{1m_1} исходного полинома $P_{m_1-1}(x)$. Мы пришли к противоречию, поскольку полагали этот коэффициент отличным от нуля.

Таким образом все полиномы в тождестве (4) равны нулю. Следовательно, обращаются в нуль и все коэффициенты α_{ij} : $\alpha_{ij} \equiv 0$. Получили еще одно противоречие, которое и доказывает фундаментальность построенной системы решений (3).

Итак, в случае кратных корней фундаментальная система решений имеет вид:

$$e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{m_1-1} e^{\lambda_1 x}; \dots; e^{\lambda_k x}, x e^{\lambda_k x}, \dots, x^{m_k-1} e^{\lambda_k x}.$$

Общее решение линейного однородного уравнения является линейной суперпозицией этих решений.

Остановимся и здесь на способе выделения действительных решений в случае комплексности корней λ_k . Пусть комплексный корень $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ имеет кратность m . Тогда, как мы знаем, существует комплексно-сопряженный корень $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ той же кратности. Корню λ_1 соответствуют решения вида:

$$e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x), x e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x), \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x).$$

Корню λ_2 соответствуют решения

$$e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x), x e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x), \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x).$$

Всего таких решений $2m$. Из них почленным сложением и вычитанием, т.е. невырожденным преобразованием, можно получить следующие $2m$ линейно независимых действительных решений:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} x \cos \beta x, \dots, e^{\alpha x} x^{m-1} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x, e^{\alpha x} x \sin \beta x, \dots, e^{\alpha x} x^{m-1} \sin \beta x.$$

Понятие квазиполинома.

Функция вида $P(x)e^{\lambda x}$, где $P(x)$ - полином, а λ - некоторая, вообще говоря, комплексная постоянная, носит название *квазиполинома*. Отметим основные свойства квазиполиномов.

1. Сумма двух квазиполиномов с одинаковыми показательными функциями есть снова квазиполином:

$$P(x)e^{\lambda x} + Q(x)e^{\lambda x} = R(x)e^{\lambda x}.$$

2. Произведение двух квазиполиномов дает снова квазиполином:

$$P(x)e^{\lambda x} \cdot Q(x)e^{\mu x} = R(x)e^{(\lambda+\mu)x}.$$

3. Производная от квазиполинома дает снова квазиполином:

$$[P(x)e^{\lambda x}]' = [\lambda P(x) + P'(x)]e^{\lambda x} = Q(x)e^{\lambda x}.$$

4. После действия операторного многочлена на квазиполином получается снова квазиполином:

$$M(D)P(x)e^{\lambda x} = e^{\lambda x}M(D+\lambda)P(x) = R(x)e^{\lambda x}.$$

Исследуем, как действует операторный многочлен $M(D)$ на показательную и тригонометрические функции.

$$M(D)e^{\lambda x} = \sum_{l=0}^n a_{n-l}D^l e^{\lambda x} = \sum_{l=0}^n a_{n-l}\lambda^l e^{\lambda x} = e^{\lambda x} \sum_{l=0}^n a_{n-l}\lambda^l = e^{\lambda x}M(\lambda).$$

Итак,

$$M(D)e^{\lambda x} = M(\lambda)e^{\lambda x}. \quad (5)$$

Далее.

$$\begin{aligned} M(D^2)\sin \beta x &= \sum_{l=0}^n a_{n-l}D^{2l}\sin \beta x = \sum_{l=0}^n a_{n-l}D^{2l-2}(-\beta^2)\sin \beta x = \\ &= \sin \beta x \sum_{l=0}^n a_{n-l}(-\beta^2)^l = M(-\beta^2)\sin \beta x. \end{aligned}$$

В итоге, получили еще одну формулу

$$M(D^2)\sin \beta x = M(-\beta^2)\sin \beta x. \quad (6)$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$M(D^2)\cos \beta x = M(-\beta^2)\cos \beta x. \quad (7)$$

ЛЕКЦИЯ 16

Решение линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами и квазиполиномом в правой части.

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с квазиполиномом в правой части

$$M(D)y = e^{\mu x} P_r(x). \quad (1)$$

Здесь μ , вообще говоря, некоторое комплексное число, а коэффициенты многочлена $P_r(x)$ действительны.

$$P_r(x) = b_0 x^r + b_1 x^{r-1} + \dots + b_{r-1} x + b_r = b_0 x^r + P_{r-1}(x)$$

Теорема. Уравнение (1) имеет частное решение вида

$$y = x^m e^{\mu x} Q_r(x), \quad (2)$$

где $Q_r(x)$ - многочлен той же степени, что и $P_r(x)$:

$$Q_r(x) = c_0 x^r + c_1 x^{r-1} + \dots + c_{r-1} x + c_r = c_0 x^r + Q_{r-1}(x).$$

Если μ - не корень характеристического многочлена, т.е. $M(\mu) \neq 0$, то $m = 0$; если μ - корень характеристического многочлена, т.е. $M(\mu) = 0$, то m - его кратность.

Доказательство: докажем, что (2) - решение уравнения (1). Рассмотрим равенство

$$M(D) x^m e^{\mu x} Q_r(x) = e^{\mu x} P_r(x).$$

Применим в левой части формулу смещения

$$e^{\mu x} M(D + \mu) x^m Q_r(x) = e^{\mu x} P_r(x)$$

и сократим на $e^{\mu x}$:

$$M(D + \mu) x^m Q_r(x) = P_r(x). \quad (3)$$

Теперь нам осталось показать, что можно всегда подобрать коэффициенты многочлена $Q_r(x)$ c_0, c_1, \dots, c_r так, чтобы выполнялось равенство (3).

Поскольку μ - m -кратный корень многочлена $M(\lambda)$: $M(\mu) = 0$, операторный многочлен $M(D)$ допускает представление в виде

$$M(D) = (D - \mu)^m N(D), \quad (4)$$

где $N(\mu) \neq 0$ ($m = 0$, если μ - не корень $M(\lambda)$). Подставляя (4) в (3), находим:

$$N(D + \mu) D^m x^m Q_r(x) = P_r(x)$$

или

$$N(D + \mu) D^m x^m [c_0 x^r + Q_{r-1}(x)] = b_0 x^r + P_{r-1}(x). \quad (5)$$

Представим оператор $N(D + \mu)$ в виде

$$N(D + \mu) = N(\mu) + DN_1(D).$$

Тогда,

$$c_0 N(\mu) D^m x^{m+r} + c_0 N_1(D) D^{m+1} x^{m+r} + N(D + \mu) D^m x^m Q_{r-1}(x) = b_0 x^r + P_{r-1}(x). \quad (6)$$

Определим старший полиномиальный член слева и приравняем его подобному справа в силу произвольности x :

$$c_0 N(\mu) D^m x^{m+r} = b_0 x^r.$$

Поскольку $N(\mu) \neq 0$, то коэффициент c_0 находится однозначно

$$c_0 = \frac{b_0 \cdot r!}{N(\mu) \cdot (m+r)!}.$$

В результате уравнение (6) примет вид:

$$N(D + \mu) D^m x^m Q_{r-1}(x) = P_{r-1}(x) - \frac{r b_0}{N(\mu)} N_1(D) x^{r-1}. \quad (7)$$

Уравнения (5) и (7) имеют одинаковую структуру, но в (7) степень полинома справа стала меньше на единицу. Поэтому, аналогичным образом найдем c_1 . И т.д. Аналогично можно однозначно найти остальные коэффициенты c_2, \dots, c_r . Таким образом, решение вида (2) уравнения (1) существует. *

Пример. Рассмотрим некоторые примеры.

1. Дано неоднородное уравнение второго порядка:

$$y'' - 2y' + y = x e^x.$$

Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Оно имеет один двукратный корень $\lambda = 1$, т.е. $m = 2$. Из правой части уравнения определяем значение $\mu = 1$. Оно совпадает с корнем характеристического многочлена, поэтому частное решение неоднородного уравнения ищем в виде:

$$y = x^2 e^x (c_0 x + c_1),$$

где коэффициенты c_0, c_1 неизвестны. Для их определения подставим решение в исходное уравнение и применим формулу сдвига:

$$M(D) y = (D - 1)^2 x^2 (c_0 x + c_1) = e^x D^2 (c_0 x^3 + c_1 x^2) = e^x (6c_0 x + 2c_1) = x e^x.$$

Отсюда, пользуясь произвольностью x , определяем коэффициенты

$$c_0 = \frac{1}{6}, \quad c_1 = 0.$$

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения таково:

$$y = \frac{1}{6}x^3 e^x.$$

2. Рассмотрим уравнение математического маятника, находящегося под действием периодической силы:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = A \sin \nu t,$$

где \ddot{y} - вторая производная по времени t . Из характеристического уравнения $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ определяем корни $\lambda_1 = i\omega$, $\lambda_2 = -i\omega$. Представим $\sin \nu t$ по формуле Эйлера

$$\sin \nu t = \frac{e^{i\nu t} - e^{-i\nu t}}{2i},$$

откуда следует, что $\mu = i\nu$ и $\mu = -i\nu$.

Проанализируем вначале ситуацию, когда $\nu \neq \omega$ (нерезонансный случай). Тогда $\mu \neq \lambda_1, \lambda_2$, и вынужденное решение записывается в виде

$$y = c_0 e^{i\nu t} + c_1 e^{-i\nu t}$$

или в действительной форме

$$y = a \cos \nu t + b \sin \nu t.$$

Подставляя это решение в уравнение маятника, находим:

$$M(D^2)y = (D^2 + \omega^2)(a \cos \nu t + b \sin \nu t) = (\omega^2 - \nu^2)(a \cos \nu t + b \sin \nu t) = A \sin \nu t.$$

Приравнявая коэффициенты при $\cos \nu t$ и $\sin \nu t$, определяем a и b

$$a = 0, \quad b = \frac{A}{\omega^2 - \nu^2}.$$

Окончательный вид вынужденного решения таков

$$y = \frac{A}{\omega^2 - \nu^2} \sin \nu t.$$

Пусть теперь $\nu = \omega$. Этот случай в физике называют *резонансом*. Тогда оба μ совпадают с простыми корнями характеристического многочлена, и решение следует искать в виде:

$$y = t(a \cos \omega t + b \sin \omega t).$$

Для отыскания коэффициентов a и b достаточно рассмотреть действие оператора $(D^2 + \omega^2)$ на функцию $te^{i\omega t}$, а затем взять от полученного выражения действительную и мнимую часть.

$$(D^2 + \omega^2) te^{i\omega t} = (D + i\omega)(D - i\omega) e^{i\omega t} t = e^{i\omega t} (D + 2i\omega) Dt = 2i\omega e^{i\omega t}.$$

В результате,

$$(D^2 + \omega^2) y = (D^2 + \omega^2) (a \cos \omega t + b \sin \omega t) t = -2\omega a \sin \omega t + 2\omega b \cos \omega t = A \sin \omega t.$$

Отсюда

$$b = 0, \quad a = -\frac{A}{2\omega}.$$

Окончательно,

$$y = -\frac{At}{2\omega} \cos \omega t.$$

Как видим, с течением времени амплитуда колебаний маятника увеличивается пропорционально t . Говорят, что происходит резонансная раскачка колебаний.

Операторный метод отыскания частного решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами.

Обратный оператор. Запишем исследуемое линейное неоднородное дифференциальное уравнение n -го порядка в операторной форме

$$M(D)y = f(x). \tag{8}$$

Если отсюда формально найти y , то получим:

$$y = \frac{1}{M(D)} f(x). \tag{9}$$

Оператор $1/M(D)$, стоящий в (9), называют обратным операторному многочлену $M(D)$ или просто *обратным оператором*. Если мы изучим свойства обратного оператора, то это позволит нам достаточно просто находить частное решение неоднородного уравнения (8).

Свойства $1/M(D)$.

1. Подставляя (9) в (8), мы должны получить тождество, так как (9) - решение уравнения (8). Значит,

$$M(D) \frac{1}{M(D)} f(x) \equiv f(x).$$

Поскольку $f(x)$ может быть любой, имеем:

$$M(D) \frac{1}{M(D)} \equiv 1. \quad (10)$$

2. Рассмотрим уравнение

$$M(D)y = M(D)f(x). \quad (11)$$

Тогда ясно, что $y = f(x)$ является решением данного уравнения, но не единственным. Функции вида $y = y_{00}(x) + f(x)$, где $y_{00}(x)$ - общее решение однородного уравнения $M(D)y_{00} = 0$, также являются решениями. Из (11) находим:

$$y = \frac{1}{M(D)}M(D)f(x).$$

Значит равенство

$$f(x) = \frac{1}{M(D)}M(D)f(x) \quad (12)$$

справедливо с точностью до решения линейного однородного уравнения. Вывод: обратный оператор (9) находит решение уравнения (8) с точностью до решения линейного однородного уравнения.

Из (12) получаем второе свойство, когда прямой и обратный операторы действуют в другом порядке:

$$\frac{1}{M(D)}M(D) = 1. \quad (13)$$

В соответствии с (10), (13) прямой и обратный операторы можно менять местами и сокращать.

3. Рассмотрим уравнение первого порядка

$$Dy = f(x).$$

Отсюда,

$$y' = f(x) \implies y = \int f(x) dx.$$

С другой стороны,

$$y = \frac{1}{D}f(x).$$

Сопоставление показывает, что оператор $1/D$ является оператором интегрирования:

$$\frac{1}{D} \equiv \int \dots dx. \quad (14)$$

4. Определим действие умножения произвольного операторного многочлена на обратный оператор:

$$N(D) \frac{1}{M(D)} f(x) \equiv N(D) \left[\frac{1}{M(D)} f(x) \right].$$

Аналогично наоборот

$$\frac{1}{M(D)} N(D) f(x) \equiv \frac{1}{M(D)} [N(D) f(x)].$$

Докажем, что эти операции обладают переместительным свойством:

$$N(D) \frac{1}{M(D)} = \frac{1}{M(D)} N(D). \quad (15)$$

Введем обозначение

$$y \equiv N(D) \frac{1}{M(D)} f(x).$$

Тогда,

$$M(D) y \equiv M(D) N(D) \frac{1}{M(D)} f(x) = N(D) M(D) \frac{1}{M(D)} f(x) = N(D) f(x).$$

Отсюда

$$y \equiv \frac{1}{M(D)} N(D) f(x) = N(D) \frac{1}{M(D)} f(x).$$

Что и требовалось доказать.

5. Справедливо еще одно равенство для обратного оператора

$$\frac{1}{M(D)} [f_1(x) + f_2(x)] = \frac{1}{M(D)} f_1(x) + \frac{1}{M(D)} f_2(x). \quad (16)$$

Это равенство следует из принципа суперпозиции для линейного неоднородного уравнения: сумма частных решений неоднородного уравнения с $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в правой части дает частное решение неоднородного уравнения с суммарной правой частью $f_1(x) + f_2(x)$.

6. Определение сложения обратных операторов

$$\left[\frac{1}{M(D)} + \frac{1}{N(D)} \right] f(x) = \frac{1}{M(D)} f(x) + \frac{1}{N(D)} f(x).$$

Они складываются по типу дробей. Умножение для обратных операторов определяют как

$$\left(\frac{1}{M(D)} \cdot \frac{1}{N(D)} \right) f(x) = \frac{1}{M(D)} \left[\frac{1}{N(D)} f(x) \right].$$

Проверим, выполняется ли переместительное свойство для обратных операторов.

$$\frac{1}{M(D)} \cdot \frac{1}{N(D)} = \frac{1}{N(D)} \cdot \frac{1}{M(D)} \quad ?$$

Введем обозначение

$$y \equiv \frac{1}{M(D)} \cdot \frac{1}{N(D)} f(x).$$

Тогда,

$$\begin{aligned} M(D) y \equiv \frac{1}{N(D)} f(x) &\implies N(D) M(D) y \equiv f(x) \implies M(D) N(D) y \equiv f(x) \implies \\ &\implies N(D) y \equiv \frac{1}{M(D)} f(x) \implies y \equiv \frac{1}{N(D)} \cdot \frac{1}{M(D)} f(x), \end{aligned}$$

и свойство доказано.

Таким образом

$$\frac{1}{M(D)} \cdot \frac{1}{N(D)} = \frac{1}{N(D)} \cdot \frac{1}{M(D)}. \quad (17)$$

7. В силу доказанных равенств на обратный оператор можно распространить все свойства алгебраических дробей. В частности, операторная дробь как и алгебраическая должна раскладываться на простейшие дроби. Пусть характеристический многочлен $M(\lambda)$ имеет корни: λ_1 кратности $m_1; \dots; \lambda_k$ кратности m_k . Тогда,

$$\frac{1}{M(\lambda)} = \frac{A_{11}}{\lambda - \lambda_1} + \dots + \frac{A_{1m_1}}{(\lambda - \lambda_1)^{m_1}} + \dots + \frac{A_{k1}}{\lambda - \lambda_k} + \dots + \frac{A_{km_k}}{(\lambda - \lambda_k)^{m_k}}.$$

В результате,

$$\frac{1}{M(D)} = \sum_{s=1}^k \sum_{r=1}^{m_s} \frac{A_{sr}}{(D - \lambda_s)^r}. \quad (18)$$

Важное соотношение (18) позволяет свести действие обратного оператора к сумме действий простейших операторов.

Действие обратного оператора на простейшие функции.

1. Действие обратного оператора на показательную функцию

$$\frac{1}{M(D)}e^{\lambda x} = \frac{e^{\lambda x}}{M(\lambda)}, \quad \text{если } M(\lambda) \neq 0.$$

В самом деле.

$$e^{\lambda x} = \frac{1}{M(D)}M(D)e^{\lambda x} = \frac{1}{M(D)}e^{\lambda x}M(\lambda).$$

И если $M(\lambda) \neq 0$, то

$$\frac{e^{\lambda x}}{M(\lambda)} = \frac{1}{M(D)}e^{\lambda x}.$$

2. Действие обратного оператора на тригонометрические функции

$$\frac{1}{M(D^2)}\sin \beta x = \frac{\sin \beta x}{M(-\beta^2)}, \quad \text{если } M(-\beta^2) \neq 0.$$

$$\frac{1}{M(D^2)}\cos \beta x = \frac{\cos \beta x}{M(-\beta^2)}, \quad \text{если } M(-\beta^2) \neq 0.$$

Формулы доказываются аналогично.

3. Действие обратного оператора на полином

$$\frac{1}{M(D)}P_r(x) = ?$$

Здесь $P_r(x)$ - многочлен степени r :

$$P_r(x) = b_0x^r + b_1x^{r-1} + \dots + b_{r-1}x + b_r.$$

Разделим уголком 1 на операторный многочлен $M(D) = a_n + a_{n-1}D + \dots + a_1D^{n-1} + D^n$, причем деление продолжаем до тех пор, пока в частном не получится многочлен по D степени r :

$$Q_r(D) = c_0 + c_1D + \dots + c_{r-1}D^{r-1} + c_rD^r.$$

В остатке имеем некоторый операторный многочлен

$$R(D) = c_{r+1}D^{r+1} + \dots + c_{r+n}D^{r+n}.$$

В результате,

$$\frac{1}{M(D)} = Q_r(D) + \frac{R(D)}{M(D)} \implies 1 = Q_r(D)M(D) + R(D).$$

Это означает, что

$$[Q_r(D)M(D) + R(D)]P_r(x) = P_r(x).$$

Если продифференцировать полином $P_r(x)$ более r раз, то получим нуль. Следовательно, $R(D)P_r(x) \equiv 0$, и тогда

$$Q_r(D)M(D)P_r(x) = P_r(x) \implies M(D)Q_r(D)P_r(x) = P_r(x).$$

Отсюда окончательно

$$\frac{1}{M(D)}P_r(x) = Q_r(D)P_r(x).$$

Таким образом, действие обратного оператора на полином эквивалентно действию некоторого прямого оператора.

4. Формула смещения для обратного оператора.

Докажем справедливость для обратного оператора той же формулы смещения, что и для прямого оператора, т.е.

$$\frac{1}{M(D)}e^{\lambda x}f(x) = e^{\lambda x}\frac{1}{M(D+\lambda)}f(x). \quad (1)$$

Введем обозначение

$$y = e^{\lambda x}\frac{1}{M(D+\lambda)}f(x).$$

Тогда,

$$M(D)y = M(D)e^{\lambda x}\frac{1}{M(D+\lambda)}f(x) = e^{\lambda x}M(D+\lambda)\frac{1}{M(D+\lambda)}f(x) = e^{\lambda x}f(x).$$

Отсюда,

$$y = \frac{1}{M(D)}e^{\lambda x}f(x),$$

и формула смещения для обратного оператора доказана.

Полученные формулы позволяют легко находить частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с квазиполиномом в правой части операторным методом.

Примеры отыскания частного решения линейного неоднородного уравнения с квазиполиномом в правой части с помощью обратного оператора.

1. Рассмотрим уравнение второго порядка

$$y'' + 4y = e^x.$$

Вводя оператор дифференцирования, находим:

$$y = \frac{1}{D^2 + 4} e^x = \frac{1}{1^2 + 4} = \frac{1}{5} e^x.$$

2. Определим частное решение уравнения четвертого порядка

$$y^{IV} + y = 2 \cos 3x.$$

Аналогичным образом

$$y = \frac{1}{D^4 + 1} 2 \cos 3x = 2 \cos 3x \frac{1}{(-3^2)^2 + 1} = \frac{1}{41} \cos 3x.$$

3. Пусть теперь в правой части уравнения второго порядка стоит квазиполином

$$y'' - 4y' + 4y = x^2 e^{2x}.$$

Тогда,

$$y = \frac{1}{D^2 - 4D + 4} x^2 e^{2x} = \frac{1}{(D - 2)^2} x^2 e^{2x} = e^{2x} \frac{1}{D^2} x^2 = \frac{x^4}{12} e^{2x}.$$

4. Рассмотрим уравнение третьего порядка с тригонометрической функцией в правой части

$$y''' - y = \sin x.$$

Запишем y через обратный оператор

$$y = \frac{1}{D^3 - 1} \sin x$$

и применим вспомогательный прием. Домножим и числитель и знаменатель на операторный многочлен, так чтобы обратный оператор стал четным по D .

$$\begin{aligned} y &= (D^3 + 1) \frac{1}{D^6 - 1} \sin x = (D^3 + 1) \sin x \frac{1}{(-1^2)^3 - 1} = \\ &= -\frac{1}{2} (-\cos x + \sin x) = \frac{1}{2} (\cos x - \sin x). \end{aligned}$$

5. Пусть в правой части уравнения стоит только полином

$$y'' + y = x^2 - x + 2.$$

Тогда,

$$y = \frac{1}{D^2 + 1} (x^2 - x + 2).$$

Используя известное разложение

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots,$$

находим:

$$y = (1 - D^2 + D^4 - D^6 + \dots) (x^2 - x + 2) = x^2 - x + 2 - D^2 (x^2 - x + 2) = x^2 - x.$$

6. Рассмотрим, наконец, пример на применение формулы смещения для обратного оператора

$$y'' + y = x \cos x.$$

Будем решать вспомогательное дифференциальное уравнение

$$\tilde{y}'' + \tilde{y} = x e^{ix}.$$

Решение данного уравнения является комплексным, причем $y = \operatorname{Re} \tilde{y}$. Для вспомогательного уравнения имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= \frac{1}{D^2 + 1} x e^{ix} = e^{ix} \frac{1}{(D + i)^2 + 1} x = e^{ix} \frac{1}{D^2 + 2Di} x = e^{ix} \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{D + 2i} x = \\ &= e^{ix} \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{1 + D/2i} x = e^{ix} \frac{1}{D} \left[\frac{1}{2i} - \frac{D}{(2i)^2} \right] x = e^{ix} \frac{1}{D} \left(\frac{x}{2i} + \frac{1}{4} \right) = e^{ix} \left(\frac{x^2}{4i} + \frac{x}{4} \right) = \\ &= (\cos x + i \sin x) \left(\frac{x^2}{4i} + \frac{x}{4} \right) = \left(\frac{x^2}{4} \sin x + \frac{x}{4} \cos x \right) + i \left(\frac{x}{4} \sin x - \frac{x^2}{4} \cos x \right). \end{aligned}$$

Отделяя действительную часть, получаем искомое решение

$$y = \frac{x}{4} (\cos x + x \sin x).$$

**Формула для частного решения линейного неоднородного
дифференциального уравнения с произвольной правой частью.
Функция Грина.**

Возникает вопрос: можно ли найти частное решение линейного неоднородного уравнения с произвольной правой частью с помощью обратного оператора? Оказывается, это можно сделать, если воспользоваться разложением обратного оператора на простейшие дроби

$$\frac{1}{M(D)} = \sum_{s=1}^k \sum_{r=1}^{m_s} \frac{A_{sr}}{(D - \lambda_s)^r}$$

и формулой смещения (1). Подставим данное разложение в формулу для частного решения линейного неоднородного уравнения с произвольной правой частью:

$$y = \frac{1}{M(D)} f(x) = \sum_{s=1}^k \sum_{r=1}^{m_s} \frac{A_{sr}}{(D - \lambda_s)^r} f(x). \quad (2)$$

Попытаемся свести действие простейшей операторной дроби на функцию $f(x)$

$$\frac{1}{(D - \lambda)^r} f(x)$$

к интегрированию, добавив специальные множители и применив формулу смещения. В самом деле,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(D - \lambda)^r} f(x) &= \frac{1}{(D - \lambda)^r} e^{\lambda x} f(x) e^{-\lambda x} = e^{\lambda x} \frac{1}{D^r} e^{-\lambda x} f(x) = \\ &= e^{\lambda x} \underbrace{\int dx \int dx \dots \int dx}_r \cdot e^{-\lambda x} f(x). \end{aligned}$$

Поскольку мы ищем любое частное решение линейного неоднородного уравнения, расставим пределы у повторных интегралов так, как нам удобно. А именно, по убыванию аргументов

$$\frac{1}{(D - \lambda)^r} f(x) = e^{\lambda x} \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{r-1}} e^{-\lambda x_r} f(x_r) dx_r.$$

Изменяя порядок интегрирования на обратный (по возрастанию аргументов) и вычисляя $(r - 1)$ интегралов, приходим к

$$\begin{aligned} \frac{1}{(D - \lambda)^r} f(x) &= e^{\lambda x} \int_0^x e^{-\lambda x_r} f(x_r) dx_r \int_{x_r}^x dx_{r-1} \dots \int_{x_2}^x dx_1 = \\ &= e^{\lambda x} \int_0^x e^{-\lambda x_r} f(x_r) \frac{(x - x_r)^{r-1}}{(r - 1)!} dx_r. \end{aligned}$$

Итак, окончательно имеем:

$$\frac{1}{(D - \lambda)^r} f(x) = \int_0^x e^{\lambda(x-t)} \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} f(t) dt. \quad (3)$$

Подставляя выражение (3) в (2), получаем:

$$y = \sum_{s=1}^k \sum_{r=1}^{m_s} A_{sr} \int_0^x e^{\lambda_s(x-t)} \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} f(t) dt = \int_0^x \left[\sum_{s=1}^k \sum_{r=1}^{m_s} A_{sr} e^{\lambda_s(x-t)} \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} \right] f(t) dt.$$

Отсюда видно, что частное решение линейного неоднородного уравнения с произвольной правой частью представимо в виде квадратуры

$$y = \int_0^x G(x-t) f(t) dt, \quad (4)$$

где функция

$$G(x) = \sum_{s=1}^k \sum_{r=1}^{m_s} A_{sr} e^{\lambda_s x} \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} \quad (5)$$

носит название *функции Грина*.

ЛЕКЦИЯ 18

7. Уравнение Эйлера.

Существует целый класс линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, которые сводятся к линейным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами. Рассмотрим неоднородное линейное уравнение n -го порядка следующего вида:

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x). \quad (1)$$

В уравнении (1), называемом *уравнением Эйлера*, числа a_1, \dots, a_n - действительные постоянные. Точка $x = 0$ является особой точкой уравнения Эйлера.

Проанализируем сначала однородное уравнение

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0. \quad (2)$$

Сделаем замену аргумента $x = e^t$. Тогда,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} e^{-t};$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} e^{-t} \right) \frac{dt}{dx} = \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) e^{-2t} \quad \text{и т.д.}$$

$$\frac{d^k y}{dx^k} = \left(\frac{d^k y}{dt^k} + \alpha_1 \frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}} + \dots + \alpha_{k-1} \frac{dy}{dt} \right) e^{-kt},$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ - некоторые действительные постоянные. Отсюда следует, что

$$x^k y^{(k)} = e^{kt} y^{(k)} = \frac{d^k y}{dt^k} + \alpha_1 \frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}} + \dots + \alpha_{k-1} \frac{dy}{dt}. \quad (3)$$

Подставляя выражения (3) в уравнение (2), приходим к линейному однородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + b_{n-1} \frac{dy}{dt} + b_n y = 0. \quad (4)$$

Методы решения уравнения (4) хорошо известны. Его решение ищут в виде $y = ce^{\lambda t}$. Это означает, при решении однородного уравнения (2) нет никакой необходимости проводить замену переменного, а следует сразу искать его решение в виде $y = ce^{\lambda t} = c(e^t)^\lambda = cx^\lambda$. Подставляя $y = cx^\lambda$ в (2), имеем:

$$\begin{aligned} cx^n \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1) x^{\lambda-n} + ca_1 x^{n-1} \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 2) x^{\lambda-n+1} + \\ + \dots + ca_{n-1} x \lambda x^{\lambda-1} + ca_n x^\lambda = 0. \end{aligned}$$

Сокращая обе части уравнения на cx^λ , получаем характеристическое уравнение для определения параметра λ :

$$\lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1) + a_1 \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 2) + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (5)$$

Рассмотрим различные ситуации для корней уравнения (5).

1. Если корни характеристического уравнения (5) действительные и простые, то тогда им соответствует фундаментальная система решений вида

$$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t} \quad \text{или} \quad x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \dots, x^{\lambda_n}.$$

2. Если среди простых корней есть комплексно-сопряженные: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, то этим корням, как известно, соответствуют действительные решения

$$e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t \quad \text{или} \quad x^\alpha \cos(\beta \ln x), x^\alpha \sin(\beta \ln x).$$

3. Пусть все корни действительны, но среди них есть кратные. Если, например, корень λ имеет кратность m , то ему соответствуют m решений вида

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{m-1} e^{\lambda t} \quad \text{или} \quad x^\lambda, x^\lambda \ln x, \dots, x^\lambda (\ln x)^{m-1}.$$

4. Наконец, если среди корней есть комплексно-сопряженные кратные корни: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ кратности m и $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ той же кратности m , то этой паре соответствует серия $2m$ действительных решений

$$e^{\alpha t} \cos \beta t, te^{\alpha t} \cos \beta t, \dots, t^{m-1} e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t, te^{\alpha t} \sin \beta t, \dots, t^{m-1} e^{\alpha t} \sin \beta t$$

или

$$x^\alpha \cos(\beta \ln x), x^\alpha (\ln x) \cos(\beta \ln x), \dots, x^\alpha (\ln x)^{m-1} \cos(\beta \ln x),$$

$$x^\alpha \sin(\beta \ln x), x^\alpha (\ln x) \sin(\beta \ln x), \dots, x^\alpha (\ln x)^{m-1} \sin(\beta \ln x).$$

Способ нахождения общего решения уравнения Эйлера продемонстрируем на примере.

Пример.

Найдем общее решение следующего уравнения Эйлера

$$x^2 y'' + 2xy' - 6y = 18x^2 \ln x.$$

Составим характеристическое уравнение для λ , подставив решение в виде $y = x^\lambda$.

$$\lambda(\lambda - 1) + 2\lambda - 6 = 0 \implies \lambda^2 + \lambda - 6 = 0.$$

Отсюда определяем корни: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$. Следовательно, общее решение однородного уравнения таково:

$$y_{00} = c_1 x^2 + c_2 x^{-3}.$$

По виду получившегося характеристического уравнения: $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ легко восстановить дифференциальное уравнение для функции $y = y(t)$, получающегося после замены $x = e^t$. Достаточно заменить все λ^k на $y_t^{(k)}$ и подставить $x = e^t$ в правую часть исходного уравнения. В результате найдем:

$$y_{tt}'' + y_t' - 6y = 18te^{2t}.$$

Далее находим частное решение этого уравнения операторным методом.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{D^2 + D - 6} 18te^{2t} = 18 \frac{1}{D - 2} \cdot \frac{1}{D + 3} e^{2t} t = 18e^{2t} \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{D + 5} t = \\ &= \frac{18}{5} e^{2t} \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{1 + D/5} t = \frac{18}{5} e^{2t} \frac{1}{D} \left(1 - \frac{D}{5}\right) t = \frac{18}{5} e^{2t} \frac{1}{D} \left(t - \frac{1}{5}\right) = \\ &= \frac{18}{5} e^{2t} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{5}\right) = \frac{9}{5} t e^{2t} \left(t - \frac{2}{5}\right). \end{aligned}$$

Подставляя в это решение $t = \ln x$ и складывая с полученным ранее общим решением, окончательно получаем:

$$y = c_1 x^2 + c_2 \frac{1}{x^3} + \frac{9}{5} x^2 \left(\ln x - \frac{2}{5}\right) \ln x.$$

Заметим, что к уравнению Эйлера приводятся и уравнения вида

$$(\beta x + \gamma)^n y^{(n)} + a_1 (\beta x + \gamma)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} (\beta x + \gamma) y' + a_n y = f(x),$$

если применить замену $\beta x + \gamma = e^t$.

8. Интегрирование однородных линейных дифференциальных уравнений с помощью рядов.

В физике очень часто приходится решать линейные дифференциальные уравнения второго порядка, которые не подпадают ни под один из рассмотренных случаев. Пусть имеется уравнение вида

$$a_0(x) y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0, \tag{6}$$

где функции $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ либо многочлены, либо степенные ряды. Существуют две теоремы о виде фундаментальных решений уравнения (6).

Теорема 1. Если в какой-либо точке $a_0(x_0) \neq 0$, то уравнение (6) имеет два линейно независимых решения в форме степенного ряда:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x - x_0)^n. \tag{7}$$

Без доказательства.

Теорема 2. Если x_0 является нулем функции $a_0(x_0)$ порядка s : $a_0(x_0) = 0$, функция $a_1(x)$ имеет в точке x_0 нуль порядка не ниже $(s - 1)$ и функция $a_2(x)$ имеет в точке x_0 нуль порядка не ниже $(s - 2)$, то уравнение (6) имеет, по крайней мере, одно решение в виде *обобщенного степенного ряда*:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x - x_0)^{r+n}, \quad (8)$$

где r - некоторое действительное число (не обязательно целое).

Без доказательства.

Примеры.

1. Уравнение Эйри.

Рассмотрим уравнение

$$y'' - xy = 0, \quad (9)$$

которое называется *уравнением Эйри* и встречается в целом ряде задач оптики, акустики, квантовой механики. Поскольку $a_0(x) = 1$, то можно применить первую теорему, т.е. искать решение в виде степенного ряда с центром в точке $x = 0$:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9), находим:

$$\sum_{k=2}^{\infty} A_k k(k-1) x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{k+1} = 0.$$

Выделим в первой сумме слагаемое с $k = 2$, а второй произведем замену индекса суммирования $k + 1 = m - 2$ или $k = m - 3$. В результате получим

$$2A_2 + \sum_{k=3}^{\infty} A_k k(k-1) x^{k-2} - \sum_{m=3}^{\infty} A_{m-3} x^{m-2} = 0$$

или

$$2A_2 + \sum_{k=3}^{\infty} [A_k k(k-1) - A_{k-3}] x^{k-2} = 0.$$

Поскольку данное равенство справедливо для любых x , приравняем нулю коэффициенты степенного ряда, стоящие при различных степенях x :

$$A_2 = 0, \quad A_k k(k-1) - A_{k-3} = 0, \quad k = 3, 4, \dots$$

Отсюда находим рекуррентное соотношение для коэффициентов A_k

$$A_k = \frac{A_{k-3}}{k(k-1)}.$$

Полагая в нем $k = 5, 8, 11, \dots$, получаем:

$$A_5 = \frac{A_2}{5 \cdot 4} = 0, \quad A_8 = \frac{A_5}{8 \cdot 7} = 0, \quad A_{11} = \frac{A_8}{11 \cdot 10} = 0, \dots, \quad A_{3n-1} = 0.$$

Далее,

$$A_3 = \frac{A_0}{3 \cdot 2}; \quad A_6 = \frac{A_3}{6 \cdot 5} = \frac{A_0}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}; \quad A_9 = \frac{A_0}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}; \dots;$$

$$A_{3n} = \frac{A_0}{3n(3n-1)(3n-3)(3n-4) \dots 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}.$$

Аналогично

$$A_4 = \frac{A_1}{4 \cdot 3}; \quad A_7 = \frac{A_4}{7 \cdot 6} = \frac{A_1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}; \quad A_{10} = \frac{A_1}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}; \dots;$$

$$A_{3n+1} = \frac{A_1}{(3n+1)3n(3n-2)(3n-3) \dots 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}.$$

Подставляя эти выражения в (10) и производя перегруппировку членов ряда, приходим окончательно к

$$y = A_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{3n(3n-1)(3n-3)(3n-4) \dots 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} \right] +$$

$$+ A_1 \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)3n(3n-2)(3n-3) \dots 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} \right]. \quad (11)$$

В формуле (11) A_0 и A_1 - две произвольные постоянные. Значит, мы построили общее решение уравнения (10), где в квадратных скобках записаны два фундаментальных решения уравнения Эйри. Докажем, что полученные ряды абсолютно сходятся на всей числовой оси (**самостоятельно докажите линейную независимость решений !**).

По признаку Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{3(n+1)} \cdot 3n(3n-1) \dots 3 \cdot 2}{(3n+3)(3n+2)3n(3n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot |x|^{3n}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^3}{(3n+3)(3n+2)} = 0 < 1 \quad \text{для } \forall x \in \mathfrak{R}.$$

Аналогично доказывается сходимость второго ряда.

2. Уравнение Бесселя.

При исследовании объектов с круговой симметрией в механике, электродинамике, оптике встречается линейное дифференциальное уравнение вида

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0 \quad (\nu \in \mathfrak{R}), \quad (12)$$

называемое *уравнением Бесселя*. Точка $x = 0$ является особой точкой этого уравнения. Поскольку функции $a_0(x) = x^2$, $a_1(x) = x$, $a_2(x) = x^2 - \nu^2$, то указанная точка является нулем второго порядка функции $a_0(x)$, нулем первого порядка функции $a_1(x)$, вообще не является нулем функции $a_2(x)$ при $\nu \neq 0$ и нулем второго порядка при $\nu = 0$. Воспользуемся теперь второй теоремой и будем искать решение уравнения (12) в виде обобщенного степенного ряда

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{r+k}, \quad r \in \mathfrak{R}. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12), находим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k (r+k)(r+k-1) x^{r+k} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k (r+k) x^{r+k} - \nu^2 \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{r+k} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{r+k+2} = 0$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(r+k)^2 - \nu^2] A_k x^{r+k} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{r+k+2} = 0.$$

Выделим в первой сумме слагаемые с x^r и с x^{r+1} , не содержащиеся во второй сумме, и приравняем к нулю коэффициенты при степенях x . Слагаемое с $k = 0$ дает равенство:

$$[r^2 - \nu^2] A_0 = 0.$$

Поскольку $A_0 \neq 0$ (в противном случае надо было бы переобозначить r), то:

$$r = \pm \nu. \quad (14)$$

Приравнивание к нулю члена с $k = 1$ приводит к

$$[(r+1)^2 - \nu^2] A_1 = 0.$$

Отсюда с учетом (14) получаем:

$$(1 \pm 2\nu) A_1 = 0.$$

Далее есть две возможности: либо $A_1 = 0$, либо $\nu = \pm 1/2$.

Остановимся на более общем случае $A_1 = 0$, положив $r = \nu$. Тогда,

$$\sum_{k=2}^{\infty} [(\nu + k)^2 - \nu^2] A_k x^{\nu+k} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{\nu+k+2} = 0.$$

Заменяя индекс суммирования в первой сумме $k = m + 2$, имеем:

$$\sum_{m=2}^{\infty} \{[(\nu + m + 2)^2 - \nu^2] A_{m+2} + A_m\} x^{\nu+m+2} = 0.$$

Отсюда,

$$A_{m+2} = -\frac{A_m}{2\nu(m+2) + (m+2)^2} = -\frac{A_m}{(m+2)(m+2+2\nu)}.$$

Поскольку $A_1 = 0$, то все нечетные коэффициенты $A_{2n+1} = 0$. С другой стороны,

$$A_2 = -\frac{A_0}{2^2(\nu+1)}; \quad A_4 = -\frac{A_2}{2^2 \cdot 2(\nu+2)} = \frac{A_0}{2^4 \cdot 2(\nu+1)(\nu+2)};$$

$$A_6 = -\frac{A_0}{2^6 \cdot 2 \cdot 3(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}; \dots;$$

$$A_{2n} = (-1)^n \frac{A_0}{2^{2n} n! \cdot (\nu+1)(\nu+2) \dots (\nu+n)}.$$

Используем одну из специальных функций - *гамма-функцию*, определяемую как:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

и обладающую свойствами:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma(n+1) = n!; \text{ где } n - \text{ натуральное число.}$$

Гамма-функцию можно трактовать в качестве обобщения факториала на случай не целых x .

Выберем постоянную

$$A_0 = \frac{1}{2^\nu \cdot \Gamma(\nu)}.$$

Тогда,

$$A_{2n} = (-1)^n \frac{1}{2^{2n+\nu} n! \cdot \Gamma(\nu+n+1)},$$

и из (13) получаем:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} \frac{1}{n! \cdot \Gamma(\nu + n + 1)}. \quad (15)$$

Функция (15) называется функцией Бесселя первого рода n -го порядка и обозначается как $J_\nu(x)$.

Если взять $r = -\nu$, то получим второе решение

$$y_2 = J_{-\nu}(x).$$

Таким образом, общее решение уравнения Бесселя (12) записывается в виде:

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x).$$

В случае целого ν ($\nu = m$) из (15) имеем:

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m} \frac{1}{n! (m+n)!}.$$

Функции $J_m(x)$ и $J_{-m}(x)$ оказываются уже линейно зависимыми:

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x). \quad (16)$$

Здесь вторым линейно независимым решением является функция Бесселя 2-го рода

$$Y_m(x) = \lim_{\nu \rightarrow m} \frac{J_\nu(x) \cos \pi \nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi \nu}.$$

Из формулы Лиувилля для уравнения второго порядка можно получить другое представление этой функции:

$$Y_m(x) = J_m(x) \int \frac{dx}{x J_m^2(x)}.$$

На самостоятельную работу: доказать соотношение (16) и разобрать случай $\nu = \pm 1/2$.

IV. СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

1. Эквивалентность системы дифференциальных уравнений одному уравнению n -го порядка.

Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned} \tag{1}$$

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n).$$

Предположим, что функции f_1, \dots, f_n дифференцируемы неограниченное число раз. Общим методом решения системы (1) является *метод исключения*. Докажем теорему.

Теорема. Об эквивалентности нормальной системы одному дифференциальному уравнению.

Нормальная система n дифференциальных уравнений эквивалентна одному дифференциальному уравнению n -го порядка при условии дифференцируемости правых частей f_1, \dots, f_n .

Доказательство: будем исключать переменные y_1, y_2, \dots, y_n и строить дифференциальное уравнение относительно функции y_1 . Как известно, решением системы (1) является система функций: $y_1 = \varphi_1(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$. Подставляя ее в (1), получаем тождества:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1(x)}{dx} &\equiv f_1(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) = \tilde{f}_1, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned} \tag{2}$$

$$\frac{d\varphi_n(x)}{dx} \equiv f_n(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) = \tilde{f}_n.$$

Продифференцируем по x первое тождество системы (2)

$$\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} = \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y_k} \cdot \frac{d\varphi_k}{dx} = \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y_k} \cdot \tilde{f}_k \equiv F_2(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) = \tilde{F}_2.$$

Далее находим еще одну производную

$$\frac{d^3 \varphi_1}{dx^3} = \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial x} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial y_k} \cdot \tilde{f}_k \equiv F_3(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) = \tilde{F}_3.$$

И т.д. Наконец,

$$\frac{d^n \varphi_1}{dx^n} = \frac{\partial \tilde{F}_{n-1}}{\partial x} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \tilde{F}_{n-1}}{\partial y_k} \cdot \tilde{f}_k \equiv F_n(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) = \tilde{F}_n.$$

В итоге мы получили новую систему тождеств. По образцу этих тождеств составим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{d^2 y_1}{dx^2} &= F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{aligned} \tag{3}$$

... ..

$$\frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} = F_{n-1}(x, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Добавим к системе (3) отдельное уравнение:

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \tag{4}$$

Будем рассматривать переменные y_2, y_3, \dots, y_n системы (3) в качестве неизвестных. Тогда систему (3) можно разрешить относительно этих переменных, если якобиан

$$\frac{D(f_1, F_2, \dots, F_{n-1})}{D(y_2, y_3, \dots, y_n)} \neq 0. \tag{5}$$

Если условие (5) выполняется, то получим:

$$\begin{aligned} y_2 &= \psi_2(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}), \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \tag{6}$$

$$y_n = \psi_n(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}).$$

Учитывая, что функции ψ_2, \dots, ψ_n являются решениями системы (3), и ранее установленные тождества (2), имеем:

$$\begin{aligned} \psi_2 \left(x, \varphi_1(x), \varphi_1'(x), \dots, \varphi_1^{(n-1)}(x) \right) &\equiv \varphi_2(x), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned} \tag{7}$$

$$\psi_n \left(x, \varphi_1(x), \varphi_1'(x), \dots, \varphi_1^{(n-1)}(x) \right) \equiv \varphi_n(x).$$

Подставляя выражения (6) в уравнение (4), придем окончательно к

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = \Phi \left(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)} \right). \tag{8}$$

Составленное уравнение (8) и будет искомым уравнением. Проверим, что функция $\varphi_1(x)$ является решением уравнения (8). Подстановка $\varphi_1(x)$ в левую и правую части уравнения (8) с учетом тождеств (7) дает:

$$\frac{d^n \varphi_1}{dx^n} = F_n(x, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = \tilde{F}_n,$$

что совпадает с последним из ранее полученных тождеств.

Проведем теперь доказательство в обратную сторону. Покажем, что если известно какое-либо решение уравнения (8), то можно без дополнительного интегрирования получить решение нормальной системы (1).

Пусть $y_1 = \psi_1(x)$ - решение дифференциального уравнения (8). Для того, чтобы построить решение системы необходимо найти функции y_2, y_3, \dots, y_n . Составим систему

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dx} &= f_1(x, \psi_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{d^2\psi_1}{dx^2} &= F_2(x, \psi_1, y_2, \dots, y_n), \end{aligned} \tag{9}$$

... ..

$$\frac{d^{n-1}\psi_1}{dx^{n-1}} = F_{n-1}(x, \psi_1, y_2, \dots, y_n).$$

Эта алгебраическая система уравнений с неизвестными y_2, \dots, y_n очень похожа на (3). В силу условия (5) эта система разрешима относительно y_2, \dots, y_n , и решением ее будут функции $y_2 = \psi_2(x), \dots, y_n = \psi_n(x)$. Однако неизвестно, является ли найденная система функций вместе с $\psi_1(x)$ решением нормальной системы (1)?

Если ψ_2, \dots, ψ_n подставить в (9), то получим тождества:

$$\frac{d\psi_1}{dx} \equiv f_1(x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n),$$

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} \equiv F_2(x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n), \quad (10)$$

... ..

$$\frac{d^{n-1}\psi_1}{dx^{n-1}} \equiv F_{n-1}(x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n).$$

В то же время, поскольку функция $\psi_1(x)$ является решением уравнения (8), имеет место тождество:

$$\frac{d^n\psi_1}{dx^n} \equiv F_n(x, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n). \quad (11)$$

Продифференцируем по x обе части первого из тождеств (10):

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} \equiv \frac{\partial f_1}{\partial x} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \cdot \frac{d\psi_k}{dx}. \quad (12)$$

Записывая второе из тождеств (10) в развернутой форме, находим:

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} \equiv \frac{\partial f_1}{\partial x} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \cdot f_k. \quad (13)$$

Вычитая почленно (13) из (12), имеем:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \left(\frac{d\psi_k}{dx} - f_k \right) \equiv 0.$$

В соответствии с первым из тождеств (10): $d\psi_1/dx = f_1$. Поэтому,

$$\sum_{k=2}^n \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \left(\frac{d\psi_k}{dx} - f_k \right) \equiv 0. \quad (14)$$

Продифференцируем далее по x второе из тождеств (10)

$$\frac{d^3\psi_1}{dx^3} \equiv \frac{\partial F_2}{\partial x} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_2}{\partial y_k} \cdot \frac{d\psi_k}{dx}$$

и запишем третье тождество в развернутом виде:

$$\frac{d^3\psi_1}{dx^3} \equiv \frac{\partial F_2}{\partial x} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_2}{\partial y_k} \cdot f_k.$$

Почленное вычитание и учет того, что $d\psi_1/dx = f_1$, дает:

$$\sum_{k=2}^n \frac{\partial F_2}{\partial y_k} \left(\frac{d\psi_k}{dx} - f_k \right) \equiv 0. \quad (15)$$

Аналогичным образом поступаем до $(n-1)$ -го тождества. Дифференцирование последнего из тождеств (10) и вычитание из него тождества (11), записанного в развернутой форме, приводит к:

$$\sum_{k=2}^n \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_k} \left(\frac{d\psi_k}{dx} - f_k \right) \equiv 0. \quad (16)$$

В итоге, мы получили систему тождеств (14)-(16), где неизвестными являются разности $(d\psi_k/dx - f_k)$. Определителем этой однородной системы является якобиан (5), отличный от нуля при любом значении x . Следовательно, система (14)-(16) при всех x имеет только нулевое решение, т.е.

$$\frac{d\psi_k}{dx} \equiv f_k, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

К тому же $d\psi_1/dx \equiv f_1$. Значит, найденная система функций является решением нормальной системы (1). □

Замечание.

В процессе доказательства теоремы использовано условие отличности от нуля якобиана (5). Если якобиан везде равен нулю, то можно попытаться построить уравнение для переменной y_2 . И т.д. Может, однако, оказаться, что все якобианы типа (5) относительно y_1, y_2, \dots, y_n обращаются в нуль. Значит, методом исключения нельзя построить одно дифференциальное уравнение n -го порядка. В этом случае нормальная система (1) распадается на несколько подсистем. Например,

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2), \\ \frac{dy_3}{dx} &= f_3(x, y_3, y_4), \\ \frac{dy_4}{dx} &= f_4(x, y_3, y_4). \end{aligned}$$

Каждую из таких подсистем можно анализировать отдельно, т.е. строить для нее дифференциальное уравнение соответствующего порядка.

2. Линейные системы дифференциальных уравнений.

Линейной системой дифференциальных уравнений называется система уравнений вида:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= a_{11}(x)y_1 + \dots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned} \tag{17}$$

$$\frac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + \dots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x).$$

Входящие в (17) функции $a_{ik}(x)$ и $f_i(x)$ предполагаются непрерывными на отрезке $[a, b]$. Это обеспечивает, как мы видели ранее, выполнение условий теоремы существования и единственности решения в области $a \leq x \leq b, -\infty < y_1 < \infty, \dots, -\infty < y_n < \infty$. Таким образом, система (17) имеет единственное решение при любом начальном условии $(x_0, y_{10}, \dots, y_{n0})$, где $a < x_0 < b, -\infty < y_{10} < \infty, \dots, -\infty < y_{n0} < \infty$.

Очень часто систему (17) записывают в векторной форме. Если ввести матричную функцию

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

и вектор-функции

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}; \quad \vec{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix},$$

то систему (17) можно переписать как

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\vec{y} + \vec{f}(x). \tag{18}$$

Решением системы (18) будет вектор-функция $\vec{y} = \vec{\varphi}(x)$, которая обращает (17) в тождество:

$$\frac{d\vec{\varphi}}{dx} \equiv \mathbf{A}(x)\vec{\varphi} + \vec{f}(x). \tag{19}$$

Система (18) называется *однородной*, если $\vec{f} = 0$, т.е. когда она имеет вид:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\vec{y}, \tag{20}$$

и *неоднородной*, если $\vec{f} \neq 0$.

ЛЕКЦИЯ 20

Общая теория линейных однородных систем дифференциальных уравнений.

Теорема 1. *О тривиальном решении системы.*

Если решение $\vec{y} = \vec{\varphi}(x)$ однородной системы

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\vec{y} \quad (1)$$

обращается в нуль в некоторой точке $x = x_0$, т.е. $\vec{\varphi}(x_0) = 0$, то $\vec{\varphi}(x) \equiv 0$.

Доказательство: как видно из (1), однородная система имеет тривиальное решение $\vec{y} = 0$. Это решение удовлетворяет нулевым начальным условиям при $\forall x_0$. Тогда в силу теоремы единственности $\vec{\varphi}(x)$ должно совпадать с тривиальным решением: $\vec{\varphi}(x) \equiv 0$. □

Теорема 2. *Принцип суперпозиции.*

Пусть $\vec{\varphi}_1(x), \dots, \vec{\varphi}_s(x)$ - решения однородной системы (1). Тогда их линейная комбинация

$$\vec{\psi}(x) = \sum_{k=1}^s c_k \vec{\varphi}_k(x), \quad c_k \in \mathfrak{R}$$

также является решением однородной системы.

Доказательство: проверим, что вектор-функция $\vec{\psi}(x)$ является решением системы (1). Для этого подставим выражение для $\vec{\psi}(x)$ в (1) и учтем, что $\vec{\varphi}_k(x)$ - решения однородной системы. Тогда,

$$\frac{d\vec{\psi}}{dx} = \sum_{k=1}^s c_k \frac{d\vec{\varphi}_k}{dx} \equiv \sum_{k=1}^s c_k \mathbf{A}(x) \vec{\varphi}_k = \mathbf{A}(x) \sum_{k=1}^s c_k \vec{\varphi}_k = \mathbf{A}(x) \vec{\psi}. \quad \square$$

Определение. Если имеются вектор-функции $\vec{\varphi}_1(x), \dots, \vec{\varphi}_s(x)$, то они называются *линейно независимыми*, если тождество

$$\sum_{k=1}^s \alpha_k \vec{\varphi}_k(x) \equiv 0$$

имеет место лишь при $\alpha_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, s$. В противном случае они называются *линейно зависимыми*.

Заметим, что если вектор-функции линейно зависимы, то постоянные векторы $\vec{\varphi}_1(x_0), \dots, \vec{\varphi}_s(x_0)$ будут также линейно зависимыми. Обратное неверно.

Теорема 3. *О линейной зависимости решений однородной системы.*

Если постоянные векторы $\vec{\varphi}_1(x_0), \dots, \vec{\varphi}_s(x_0)$ линейно зависимы, то соответствующие им решения $\vec{\varphi}_1(x), \dots, \vec{\varphi}_s(x)$ однородной системы (1) также линейно зависимы.

Доказательство: в силу зависимости постоянных векторов $\vec{\varphi}_1(x_0), \dots, \vec{\varphi}_s(x_0)$ существует ненулевая система констант $\{\alpha_i\}$, таких, что

$$\alpha_1 \vec{\varphi}_1(x_0) + \dots + \alpha_s \vec{\varphi}_s(x_0) = 0.$$

Построим вспомогательную вектор-функцию

$$\vec{\varphi}(x) = \alpha_1 \vec{\varphi}_1(x) + \dots + \alpha_s \vec{\varphi}_s(x),$$

где $\vec{\varphi}_k(x)$ - решения системы (1), удовлетворяющие начальным условиям: $(x_0, \vec{\varphi}_k(x_0))$. По предыдущей теореме функция $\vec{\varphi}(x)$ также является решением однородной системы (1), причем $\vec{\varphi}(x_0) = 0$. Тогда в соответствии с теоремой о тривиальном решении $\vec{\varphi}(x) \equiv 0$. □

Определение. Система n линейно независимых решений $\vec{\varphi}_1(x), \dots, \vec{\varphi}_n(x)$ однородной системы (1), где n - порядок системы, называется *фундаментальной системой решений*.

Теорема 4. *О существовании фундаментальной системы решений.*

Однородная система дифференциальных уравнений (1) всегда имеет фундаментальную систему решений.

Доказательство: выберем систему постоянных n -мерных векторов $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$, линейно независимых между собой. Такие векторы всегда существуют: в качестве них, например, можно взять базис n -мерного пространства. Определим вектор-функцию $\vec{\varphi}_k(x)$ как решение однородной системы (1), удовлетворяющее начальному условию $\vec{\varphi}_k(x_0) = \vec{b}_k$. В результате получим систему n решений: $\vec{\varphi}_1(x), \dots, \vec{\varphi}_n(x)$. По соответствующей теореме для линейной системы такие решения существуют и являются единственными.

Докажем их линейную независимость методом "от противного". Пусть система $\vec{\varphi}_1(x), \dots, \vec{\varphi}_n(x)$ линейно зависима. Это означает, что существует ненулевой набор констант $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ таких, что

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{\varphi}_k(x) \equiv 0.$$

Но тогда

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{\varphi}_k(x_0) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{b}_k = 0,$$

а это означает линейную зависимость системы постоянных векторов $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$, что невозможно по построению. □

Теорема 5. *Структура общего решения линейной однородной системы.*

Общее решение линейной однородной системы (1) имеет вид:

$$\vec{y} = \sum_{k=1}^n c_k \vec{\varphi}_k(x), \tag{2}$$

где c_k - некоторые константы, а $\vec{\varphi}_1(x), \dots, \vec{\varphi}_n(x)$ - фундаментальная система решений.

Доказательство: из теоремы о суперпозиции следует, что (2) является решением однородной системы (1). Убедимся теперь в его общности, т.е. покажем, что

любое решение (1), удовлетворяющее заданным произвольным начальным условиям, может быть получено из (2) при соответствующем выборе коэффициентов c_1, \dots, c_n .

Пусть некоторое решение $\vec{\varphi}(x)$ системы (1) удовлетворяет начальному условию $\vec{\varphi}(x_0) = \vec{b}$. В силу фундаментальности системы решений $\vec{\varphi}_1(x), \dots, \vec{\varphi}_n(x)$ постоянные векторы $\vec{\varphi}_1(x_0), \dots, \vec{\varphi}_n(x_0)$ являются линейно независимыми и образуют базис n -мерного пространства. Тогда любой вектор, в частности \vec{b} , можно разложить по этому базису:

$$\vec{b} = c_1^* \vec{\varphi}_1(x_0) + c_2^* \vec{\varphi}_2(x_0) + \dots + c_n^* \vec{\varphi}_n(x_0). \quad (3)$$

Тогда вектор-функция

$$\vec{y}(x) = \sum_{k=1}^n c_k^* \vec{\varphi}_k(x)$$

будет являться решением системы (1), удовлетворяющим заданному начальному условию $\vec{y}(x_0) = \vec{b}$ (см.(3)), а, следовательно, по теореме единственности совпадает с $\vec{\varphi}(x)$. *

Теорема 6. *О числе линейно независимых решений однородной системы.*

Максимальное число линейно независимых решений однородной системы (1) равно порядку системы.

Доказательство: "от противного".

Допустим, что имеются $(n + 1)$ линейно независимых решений однородной системы (1): $\vec{\varphi}_1(x), \dots, \vec{\varphi}_n(x), \vec{\varphi}_{n+1}(x)$. Согласно доказанной теореме о структуре общего решения системы (1) любое ее решение выражается формулой (2). В частности, всегда можно подобрать постоянные $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n$ таким образом, чтобы решение $\vec{\varphi}_{n+1}(x)$ было представлено в форме:

$$\vec{\varphi}_{n+1}(x) = \bar{c}_1 \vec{\varphi}_1(x) + \dots + \bar{c}_n \vec{\varphi}_n(x).$$

Запись данного равенства в виде

$$\bar{c}_1 \vec{\varphi}_1(x) + \dots + \bar{c}_n \vec{\varphi}_n(x) - \vec{\varphi}_{n+1}(x) = 0$$

указывает на линейную зависимость функций $\vec{\varphi}_1(x), \dots, \vec{\varphi}_n(x), \vec{\varphi}_{n+1}(x)$, что противоречит первоначальному предположению. Следовательно, число линейно независимых решений однородной системы (1) не превосходит ее порядка n . *

Вывод. Совокупность решений линейной однородной системы образует линейное n -мерное векторное пространство.

Определение. Пусть задана система вектор-функций $\vec{\psi}_1(x), \dots, \vec{\psi}_n(x)$, где

$$\vec{\psi}_1(x) = \begin{pmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{21} \\ \dots \\ \psi_{n1} \end{pmatrix}, \vec{\psi}_2(x) = \begin{pmatrix} \psi_{12} \\ \psi_{22} \\ \dots \\ \psi_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \vec{\psi}_n(x) = \begin{pmatrix} \psi_{1n} \\ \psi_{2n} \\ \dots \\ \psi_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определителем Вронского такой системы называют определитель размера $n \times n$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \vec{\psi}_1(x) & \vec{\psi}_2(x) & \cdots & \vec{\psi}_n(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \cdots & \psi_{1n} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \cdots & \psi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_{n1} & \psi_{n2} & \cdots & \psi_{nn} \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Теорема 7. *Об определителе Вронского для системы линейно зависимых функций.*

Для линейно зависимых вектор-функций $\vec{\psi}_1(x), \dots, \vec{\psi}_n(x)$ определитель Вронского тождественно равен нулю.

Доказательство: пусть $\vec{\psi}_1(x), \dots, \vec{\psi}_n(x)$ - линейно зависимые вектор-функции, т.е. существует ненулевой набор действительных постоянных $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ($\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$) таких, что:

$$\alpha_1 \vec{\psi}_1(x) + \dots + \alpha_n \vec{\psi}_n(x) \equiv 0. \quad (5)$$

Соотношение (5) означает, что между столбцами определителя Вронского (4) существует линейная зависимость. Следовательно, по свойствам определителей $W(x) \equiv 0$. *

Теорема 8. *Об определителе Вронского для решений линейной однородной системы.*

Пусть при некотором значении $x = x_0$ определитель Вронского для решений линейной однородной системы (1) обращается в нуль

$$W(x_0) = 0. \quad (6)$$

Тогда для $\forall x$ $W(x) \equiv 0$.

Доказательство: равенство (6) означает, что столбцы определителя $W(x_0)$ линейно зависимы, т.е. линейно зависимы постоянные векторы $\vec{\varphi}_1(x_0), \dots, \vec{\varphi}_n(x_0)$. Если их принять за начальные условия, то по теореме 3 линейно зависимыми будут и соответствующие решения системы (1) $\vec{\varphi}_1(x), \dots, \vec{\varphi}_n(x)$. Следовательно, по ранее доказанной теореме 7 определитель Вронского тождественно равен нулю при любых x . *

Следствие. Если определитель Вронского для решений линейной однородной системы не обращается в нуль хотя бы в одной точке x_0 , то он ни при каких x не обращается в нуль, и эта система решений линейно независима, т.е. фундаментальна.

Теорема 9. *О линейном преобразовании фундаментальной системы решений.*

Если фундаментальную систему решений подвергнуть линейному невырожденному преобразованию, то полученная система решений будет также фундаментальной.

Доказательство: Допустим, что $\vec{\varphi}_1(x), \dots, \vec{\varphi}_n(x)$ - фундаментальная система решений линейной однородной системы (1). Построим новую систему функций

$$\vec{\psi}_j(x) = \sum_{k=1}^n a_{jk} \vec{\varphi}_k(x), \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (7)$$

где определитель матрицы $\mathbf{A} = \{a_{jk}\}$ отличен от нуля: $\det \mathbf{A} \neq 0$. Совершенно ясно, что суперпозиция (7) решений линейной однородной системы (1) сама является решением этой системы (см. теорему 2). С другой стороны, соотношение (7) можно переписать в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \vec{\psi}_1(x) & \vec{\psi}_2(x) & \cdots & \vec{\psi}_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\varphi}_1(x) & \vec{\varphi}_2(x) & \cdots & \vec{\varphi}_n(x) \end{pmatrix} \mathbf{A}^T. \quad (8)$$

Из формулы (8) вытекает следующее равенство для определителей

$$\left| \begin{pmatrix} \vec{\psi}_1(x) & \vec{\psi}_2(x) & \cdots & \vec{\psi}_n(x) \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \vec{\varphi}_1(x) & \vec{\varphi}_2(x) & \cdots & \vec{\varphi}_n(x) \end{pmatrix} \right| \det \mathbf{A}^T$$

или

$$W_\psi(x) = \det \mathbf{A} \cdot W_\varphi(x),$$

где $W_\psi(x)$ и $W_\varphi(x)$ - определители Вронского для системы решений $\vec{\psi}_1(x), \dots, \vec{\psi}_n(x)$ и $\vec{\varphi}_1(x), \dots, \vec{\varphi}_n(x)$ соответственно. Поскольку исходная система решений фундаментальна, то $W_\varphi(x) \neq 0$ ни при каких x . В силу невырожденности преобразования: $\det \mathbf{A} \neq 0$ и, следовательно, $W_\psi(x)$ также отличен от нуля: $W_\psi(x) \neq 0$. Это означает, что построенная система решений $\vec{\psi}_1(x), \dots, \vec{\psi}_n(x)$ остается фундаментальной. *

Построение линейной однородной системы по фундаментальной системе решений.

Задача. Задана система n линейно независимых вектор-функций: . Требуется построить линейную однородную систему дифференциальных уравнений, для которой вектор-функции $\vec{\varphi}_1(x), \dots, \vec{\varphi}_n(x)$ являются фундаментальной системой решений.

Решение. Составим n определителей $(n+1)$ -го порядка для n неизвестных функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$ и положим их равными нулю

$$\begin{vmatrix} y'_k & \varphi'_{k1} & \varphi'_{k2} & \cdots & \varphi'_{kn} \\ y_1 & \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ y_2 & \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n & \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} = 0; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

Каждое из построенных уравнений (9) является линейным дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной. В самом деле, если разложить определитель по первому столбцу, то перед производной $y'_k(x)$ появится определитель Вронского $W(x)$, который для системы линейно независимых функций $\vec{\varphi}_1(x), \dots, \vec{\varphi}_n(x)$ отличен от нуля для всех x , и на него можно поделить обе части уравнения. В результате придем к

$$\frac{dy_k}{dx} = \frac{1}{W(x)} [b_{k1}(x)y_1 + b_{k2}(x)y_2 + \dots + b_{kn}(x)y_n]; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

Уравнения (10) представляют собой однородную нормальную систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Теперь легко проверить, что функции $\vec{\varphi}_1(x), \dots, \vec{\varphi}_n(x)$ являются решениями системы (10). Например, при подстановке $y_k = \varphi_{k1}$ ($k = \overline{1, n}$) в (9) получаем два одинаковых столбца (первый и второй) определителя, и (9) переходит в тождество. Таким образом, система линейно независимых функций $\vec{\varphi}_1(x), \dots, \vec{\varphi}_n(x)$ является фундаментальной системой решений построенной линейной однородной системы (9).

ЛЕКЦИЯ 21

Формула Лиувилля.

Вычислим производную определителя Вронского, составленного для фундаментальной системы решений $\vec{\varphi}_1(x), \dots, \vec{\varphi}_n(x)$ линейной однородной системы

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\vec{y}. \quad (1)$$

В соответствии с ранее установленным правилом

$$\frac{d}{dx}W(x) = \sum_{k=1}^n W_k(x), \quad (2)$$

где

$$W_k(x) = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi'_{k1} & \cdots & \varphi'_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Поскольку вектор-функции $\vec{\varphi}_1(x), \dots, \vec{\varphi}_n(x)$ являются решениями однородной системы (1), справедлива система тождеств

$$\frac{d\varphi_{km}}{dx} \equiv \sum_{j=1}^n a_{kj}\varphi_{jm}, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

Подставляя эти равенства в (3), имеем:

$$W_k(x) = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{j=1}^n a_{kj}\varphi_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{kj}\varphi_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{kj} \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{j1} & \cdots & \varphi_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix}.$$

У определителей в правой части при $j \neq k$ есть совпадающие строки, поэтому отличным от нуля будет лишь определитель с $j = k$, который является определителем Вронского. Поэтому

$$W_k(x) = \sum_{j=1}^n a_{kj}W(x)\delta_{jk} = a_{kk}W(x),$$

и согласно (2)

$$\frac{dW}{dx} = W(x) \sum_{k=1}^n a_{kk} = W(x) \cdot \text{Spur } \mathbf{A}. \quad (4)$$

Здесь введено традиционное обозначение суммы диагональных элементов матрицы

$$\text{Spur } \mathbf{A} = \sum_{k=1}^n a_{kk},$$

называемое ее *следом*. В частности, для единичной матрицы \mathbf{E} размера $(n \times n)$ $\text{Spur } \mathbf{E} = n$.

Решая дифференциальное уравнение первого порядка (4) для $W(x)$, находим:

$$W(x) = W(x_0) \exp \left\{ \int_{x_0}^x \text{Spur } \mathbf{A}(t) dt \right\}. \quad (5)$$

Формула (5) и есть искомая *формула Лиувилля*.

Линейные неоднородные системы.

Рассмотрим теперь неоднородную систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \mathbf{A}(x) \vec{y} + \vec{f}(x). \quad (6)$$

Теорема. *О структуре общего решения линейной неоднородной системы.*

Пусть $\vec{\varphi}_1(x), \dots, \vec{\varphi}_n(x)$ - фундаментальная система решений однородной системы (1), а $\vec{\psi}(x)$ - частное решение неоднородной системы (6). Тогда общее решение неоднородной системы записывается в виде

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^n c_i \vec{\varphi}_i(x) + \vec{\psi}(x). \quad (7)$$

Доказательство: сначала проверим: является ли вектор-функция (7) решением неоднородной системы (6)? Для этого подставим (7) в левую часть (6)

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{i=1}^n c_i \vec{\varphi}_i(x) + \vec{\psi}(x) \right) = \sum_{i=1}^n c_i \frac{d}{dx} \vec{\varphi}_i(x) + \frac{d}{dx} \vec{\psi}(x).$$

Поскольку вектор-функции $\vec{\varphi}_i(x)$ ($i = \overline{1, n}$) удовлетворяют однородному уравнению (1), а вектор-функция $\vec{\psi}(x)$ неоднородному, то справедливы тождества

$$\frac{d}{dx} \vec{\varphi}_i(x) \equiv \mathbf{A}(x) \vec{\varphi}_i(x), \quad \frac{d}{dx} \vec{\psi}(x) \equiv \mathbf{A}(x) \vec{\psi}(x) + \vec{f}(x),$$

и поэтому

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{i=1}^n c_i \vec{\varphi}_i(x) + \vec{\psi}(x) \right) \equiv \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{A}(x) \vec{\varphi}_i(x) + \mathbf{A}(x) \vec{\psi}(x) + \vec{f}(x) \equiv$$

$$\equiv \mathbf{A}(x) \left(\sum_{i=1}^n c_i \vec{\varphi}_i(x) + \vec{\psi}(x) \right) + \vec{f}(x).$$

Полученное тождество доказывает, что (7) является решением неоднородной системы.

Перейдем к доказательству общности решения. Покажем, что из (7) можно получить любое частное решение неоднородной системы. Зададим произвольное начальное условие: $\vec{y}(x_0) = \vec{b}$. Разложим постоянный вектор $\vec{b} - \vec{\psi}(x_0)$ по системе линейно независимых векторов (базису) $\vec{\varphi}_1(x_0), \dots, \vec{\varphi}_n(x_0)$

$$\vec{b} - \vec{\psi}(x_0) = c_1^* \vec{\varphi}_1(x_0) + \dots + c_n^* \vec{\varphi}_n(x_0).$$

Если теперь в (7) заменить c_i на c_i^* , то полученное частное решение будет удовлетворять выбранному начальному условию. *

Метод вариации произвольных постоянных при отыскании частного решения неоднородной системы.

Существует прием отыскания частного решения линейной неоднородной системы с произвольной правой частью $\vec{f}(x)$ по известной фундаментальной системе решений $\vec{\varphi}_1(x), \dots, \vec{\varphi}_n(x)$ однородной системы. Будем искать частное решение системы (6) в виде

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^n c_i(x) \vec{\varphi}_i(x), \quad (8)$$

где $c_i(x)$ ($i = \overline{1, n}$) - неизвестные функции. Потребуем, чтобы при подстановке (8) в (6) получалось тождество. Тогда,

$$\sum_{i=1}^n c_i'(x) \vec{\varphi}_i(x) + \sum_{i=1}^n c_i(x) \vec{\varphi}_i'(x) = \mathbf{A}(x) \sum_{i=1}^n c_i \vec{\varphi}_i(x) + \vec{f}(x)$$

или

$$\sum_{i=1}^n c_i'(x) \vec{\varphi}_i(x) + \sum_{i=1}^n c_i(x) [\vec{\varphi}_i'(x) - \mathbf{A}(x) \vec{\varphi}_i(x)] = \vec{f}(x).$$

Учитывая, что $\vec{\varphi}_i(x)$ - решения однородной системы, приходим к

$$\sum_{i=1}^n c_i'(x) \vec{\varphi}_i(x) = \vec{f}(x). \quad (9)$$

В результате пришли к линейной алгебраической системе уравнений для неизвестных $c_1'(x), \dots, c_n'(x)$. Определитель неоднородной системы (9) является определителем Вронского

$$\Delta = \begin{vmatrix} \vec{\varphi}_1(x) & \vec{\varphi}_2(x) & \dots & \vec{\varphi}_n(x) \end{vmatrix} = W(x).$$

Для системы линейно независимых функций $\vec{\varphi}_1(x), \dots, \vec{\varphi}_n(x)$ определитель $W(x) \neq 0$ при всех x . Следовательно, неоднородная линейная алгебраическая система (9) имеет единственное решение, которое можно записать как

$$c'_1(x) = \psi_1(x), \dots, c'_n(x) = \psi_n(x).$$

Вычисляя n неопределенных интегралов без произвольных постоянных и подставляя их в (8), получаем искомое частное решение.

3. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим подробнее линейную однородную систему уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \mathbf{A}\vec{y}, \quad (10)$$

где \mathbf{A} - $(n \times n)$ матрица постоянных коэффициентов

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Система (10) удовлетворяет теореме существования во всем пространстве \mathbf{E}_{n+1} . Прием, который был рассмотрен ранее, данную систему можно свести к линейному однородному уравнению n -го порядка для одной из переменных y_k , решение которого, как известно, ищется в виде $y_k = \gamma_k e^{\lambda x}$. Исходя из этих соображений, будем искать нетривиальное решение однородной системы (10) в форме следующей вектор-функции

$$\vec{y}(x) = \vec{\gamma} e^{\lambda x}, \quad (11)$$

где $\vec{\gamma}$ - неизвестный постоянный вектор, λ - неизвестная константа.

Подставляя (11) в (10), приходим к

$$\lambda \vec{\gamma} e^{\lambda x} = \mathbf{A} \vec{\gamma} e^{\lambda x}$$

или

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \vec{\gamma} = 0, \quad (12)$$

где $\mathbf{E} = \{\delta_{ij}\}$ - единичная матрица. Однородная система (12) имеет ненулевое решение, когда

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$$

или

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Соотношение (13) представляет собой *характеристическое уравнение* для определения λ (в полной аналогии с уравнением n -го порядка). Если раскрыть определитель, то левая часть (13) окажется многочленом n -ой степени по λ , который называют *характеристическим*.

Вернемся к соотношению (12), которое можно переписать в виде

$$\mathbf{A}\vec{\gamma} = \lambda\vec{\gamma}. \quad (14)$$

Уравнение (14) - известное из курса "Аналитическая геометрия и высшая алгебра" уравнение на определение собственных значений λ и собственных векторов $\vec{\gamma}$ матрицы \mathbf{A} . Заметим, что в зависимости от собственных значений матрицы \mathbf{A} вид решений системы (10) может быть весьма различным.

1. Случай простых корней характеристического уравнения.

Пусть все корни характеристического уравнения (13) простые: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. В этом случае характеристический многочлен $\Delta(\lambda)$ допускает представление в виде

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_k) \Delta_1(\lambda), \quad (15)$$

причем $\Delta_1(\lambda_k) \neq 0$. Из (15) следует, что

$$\Delta'(\lambda) = \Delta_1(\lambda) + (\lambda - \lambda_k) \Delta_1'(\lambda),$$

и поэтому $\Delta'(\lambda_k) = \Delta_1(\lambda_k) \neq 0$. С другой стороны, по правилам дифференцирования функционального определителя

$$\begin{aligned} \Delta'(\lambda) &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = \\ &= - \left\{ \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \cdots & a_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку сумма диагональных миноров $(n-1)$ порядка матрицы

$$\mathbf{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

при $\lambda = \lambda_k$ не обращается в нуль, то найдется по крайней мере один из диагональных миноров, отличный от нуля. Это означает, что матрица $\mathbf{M}(\lambda_k)$ имеет $\text{rang } \mathbf{M}(\lambda_k) = r = n - 1$.

Для определения векторов $\vec{\gamma}$ будем последовательно подставлять в уравнения (12) $\lambda = \lambda_1, \lambda = \lambda_2, \dots, \lambda = \lambda_n$. В результате придем к уравнениям вида

$$(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{E}) \vec{\gamma}_k = 0$$

или

$$\mathbf{M}(\lambda_k) \vec{\gamma}_k = 0. \quad (16)$$

Всего таких систем уравнений будет n , поскольку индекс k пробегает значения от 1 до n . Поскольку, как мы установили, ранг матрицы $\mathbf{M}(\lambda_k)$: $r = n - 1$, то компоненты собственных векторов $\vec{\gamma}_k$ определяются с точностью до произвольного множителя.

В качестве ненулевого решения системы уравнений (16) можно взять алгебраические дополнения элементов той строки матрицы $\mathbf{M}(\lambda_k)$, которые не обращаются в нуль. Такие миноры существуют, ибо $r = n - 1$. В результате найдем n решений однородной системы (10):

$$\vec{\varphi}_k(x) = \vec{\gamma}_k e^{\lambda_k x}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (17)$$

Теперь необходимо доказать их линейную независимость.

Доказательство проведем методом "от противного". Пусть найденная система решений линейно зависима, т.е. найдутся ненулевые действительные постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ($\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$) такие, что

$$\alpha_1 \vec{\gamma}_1 e^{\lambda_1 x} + \alpha_2 \vec{\gamma}_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + \alpha_n \vec{\gamma}_n e^{\lambda_n x} = 0 \quad \text{при } \forall x.$$

Однако ранее было доказано, что функции $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ линейно независимы при $\lambda_i \neq \lambda_j$. Поэтому данное равенство имеет место лишь при

$$\alpha_1 \vec{\gamma}_1 = 0, \quad \alpha_2 \vec{\gamma}_2 = 0, \quad \dots, \quad \alpha_n \vec{\gamma}_n = 0.$$

Так как не все из α_k равны нулю, то найдется вектор $\vec{\gamma}_i = 0$, но это не соответствует определению собственных векторов матрицы. Пришли к противоречию. Следовательно, полученная система решений (17) фундаментальна, и общее решение однородной системы (10) представляется в виде

$$\vec{y} = c_1 \vec{\gamma}_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 \vec{\gamma}_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n \vec{\gamma}_n e^{\lambda_n x}.$$

ЛЕКЦИЯ 22

Рассмотрим ситуацию, когда среди простых корней характеристического уравнения встречаются комплексные. В этом случае представление общего решения линейной однородной системы в виде

$$\vec{y} = c_1 \vec{\gamma}_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 \vec{\gamma}_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n \vec{\gamma}_n e^{\lambda_n x}$$

нас не устраивает, ибо среди слагаемых есть комплекснозначные функции. Поэтому фундаментальная система решений нуждается в определенной реконструкции. Допустим, что $\lambda_1 = \alpha + i\beta$. Тогда, в силу действительности коэффициентов характеристического многочлена среди его корней должен присутствовать и комплексно сопряженный корень $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Из уравнений для собственных векторов матрицы **A**

$$(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{E}) \vec{\gamma}_k = 0,$$

отвечающих собственным значениям λ_1 и λ_2 , имеем:

$$[\mathbf{A} - (\alpha + i\beta) \mathbf{E}] \vec{\gamma}_1 = 0, \tag{1}$$

$$[\mathbf{A} - (\alpha - i\beta) \mathbf{E}] \vec{\gamma}_2 = 0.$$

Применяя комплексное сопряжение к первому из уравнений (1)

$$[\mathbf{A} - (\alpha - i\beta) \mathbf{E}] \vec{\gamma}_1^* = 0$$

и сопоставляя его с уравнением для собственного вектора $\vec{\gamma}_2$, заключаем, что $\vec{\gamma}_2$ можно выбрать равным $\vec{\gamma}_1^*$: $\vec{\gamma}_2 = \vec{\gamma}_1^*$. Отсюда следует, что два линейно независимых комплекснозначных решения $\vec{\varphi}_1(x) = \vec{\gamma}_1 e^{(\alpha+i\beta)x}$ и $\vec{\varphi}_2(x) = \vec{\gamma}_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$ линейной однородной системы также являются комплексно сопряженными: $\vec{\varphi}_2(x) = \vec{\varphi}_1^*(x)$. Из этих комплекснозначных решений можно путем линейного невырожденного преобразования получить два действительных линейно независимых решения $\vec{\psi}_1(x)$ и $\vec{\psi}_2(x)$. В самом деле, их можно построить следующим образом:

$$\vec{\psi}_1(x) = \frac{\vec{\varphi}_1(x) + \vec{\varphi}_2(x)}{2} = \operatorname{Re} [\vec{\varphi}_1(x)] = e^{\alpha x} \operatorname{Re} [\vec{\gamma}_1 e^{i\beta x}] = e^{\alpha x} (\vec{a}_1 \cos \beta x - \vec{b}_1 \sin \beta x),$$

$$\vec{\psi}_2(x) = \frac{\vec{\varphi}_1(x) - \vec{\varphi}_2(x)}{2i} = \operatorname{Im} [\vec{\varphi}_1(x)] = e^{\alpha x} \operatorname{Im} [\vec{\gamma}_1 e^{i\beta x}] = e^{\alpha x} (\vec{a}_1 \sin \beta x + \vec{b}_1 \cos \beta x),$$

где $\vec{\gamma}_1 = \vec{a}_1 + i\vec{b}_1$. Определитель матрицы преобразования

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2i & -1/2i \end{vmatrix} = \frac{i}{2} \neq 0.$$

Таким образом, в случае простых комплексных корней линейно независимыми действительными решениями являются действительные и мнимые части комплекснозначных решений.

Пример. Решим следующую однородную систему уравнений для двух неизвестных функций $y(x)$ и $z(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = -7y + z,$$

$$\frac{dz}{dx} = -2y - 5z.$$

Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -7 - \lambda & 1 \\ -2 & -5 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0$$

и определяем корни характеристического многочлена: $\lambda_{1,2} = -6 \pm i$. Запишем уравнения для компонент γ_{11} и γ_{21} собственного вектора $\vec{\gamma}_1$, отвечающего собственному значению $\lambda_1 = -6 + i$.

$$(-1 - i)\gamma_{11} + \gamma_{21} = 0,$$

$$-2\gamma_{11} + (1 - i)\gamma_{21} = 0.$$

Эти уравнения идентичны, в чем легко убедиться, домножив первое из уравнений на $(1 - i)$. Берем для простоты $\gamma_{11} = 1$, тогда $\gamma_{21} = 1 + i$. В результате для корня λ_1 получаем комплекснозначное решение

$$\vec{\varphi}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + i \end{pmatrix} e^{-6x} e^{ix} = e^{-6x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + i \end{pmatrix} (\cos x + i \sin x).$$

Возьмем от полученного решения действительную и мнимую части

$$\vec{\psi}_1(x) = \operatorname{Re}[\vec{\varphi}_1(x)] = e^{-6x} \begin{pmatrix} \cos x \\ \cos x - \sin x \end{pmatrix},$$

$$\vec{\psi}_2(x) = \operatorname{Im}[\vec{\varphi}_1(x)] = e^{-6x} \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x + \sin x \end{pmatrix}.$$

Строим теперь общее решение исследуемой системы по формуле

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \vec{\psi}_1(x) + c_2 \vec{\psi}_2(x),$$

т.е.

$$y(x) = e^{-6x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x),$$

$$z(x) = e^{-6x} [(c_1 + c_2) \cos x + (c_2 - c_1) \sin x].$$

Как и должно быть, в общее решение системы второго порядка входят две произвольные константы.

2. Случай кратных корней характеристического уравнения.

Пусть среди корней характеристического уравнения есть кратные. Предположим, например, что корень λ_1 имеет кратность m . В этой ситуации характеристический многочлен $\Delta(\lambda)$ представим в виде

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^m \Delta_1(\lambda), \quad (2)$$

причем $\Delta_1(\lambda_1) \neq 0$. Из равенства (2) следует, что

$$\Delta'(\lambda_1) = 0, \quad \Delta''(\lambda_1) = 0, \quad \dots, \quad \Delta^{(m-1)}(\lambda_1) = 0, \quad \Delta^{(m)}(\lambda_1) \neq 0.$$

Как было показано ранее, $\Delta'(\lambda_1)$ является суммой главных миноров $(n-1)$ -го порядка матрицы $\mathbf{M}(\lambda_1)$. Аналогично $\Delta''(\lambda_1)$ есть сумма миноров $(n-2)$ -го порядка той же матрицы и т.д. Выражение для $\Delta^{(m)}(\lambda_1)$ представляет собой сумму главных миноров матрицы $\mathbf{M}(\lambda_1)$ порядка m . Эта сумма отлична от нуля, поэтому хотя бы один из миноров $(n-m)$ -го порядка также не равен нулю. Следовательно, ранг матрицы $\mathbf{M}(\lambda_1)$: $r \geq n-m$. Ранг достигает минимального значения $r = n-m$, когда все главные миноры матрицы $\mathbf{M}(\lambda_1)$ порядка $(n-m+1)$ обращаются в нуль. В общем случае границы изменения ранга матрицы таковы: $n-m \leq r \leq n-1$.

Таким образом, система уравнений для определения собственного вектора $\vec{\gamma}_1$, отвечающего собственному значению λ_1 ,

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}) \vec{\gamma}_1 = 0$$

имеет r независимых уравнений, а остальные $(n-r)$ уравнений являются их следствиями. Это означает, что $(n-r)$ компонент собственного вектора $\vec{\gamma}_1$ могут быть произвольными, а остальные r компонент являются их линейными комбинациями.

Положим $\gamma_{11} = c_1, \gamma_{21} = c_2, \dots, \gamma_{n-r,1} = c_{n-r}$, где c_i - произвольные постоянные, а

$$\gamma_{k1} = \sum_{i=1}^{n-r} \sigma_{ki} c_i, \quad k = n-r+1, n-r+2, \dots, n.$$

В результате приходим к системе решений

$$y_1 = c_1, \quad y_2 = c_2 e^{\lambda_1 x}, \quad \dots, \quad y_{n-r} = c_{n-r} e^{\lambda_1 x},$$

$$y_{n-r+1} = \sum_{i=1}^{n-r} c_i e^{\lambda_1 x}, \quad \dots, \quad y_n = \sum_{i=1}^{n-r} \sigma_{ni} c_i e^{\lambda_1 x}.$$

Из этих решений можно получить $(n - r)$ линейно независимых. Положим $c_2 = \dots = c_{n-r} = 0$. Тогда,

$$\begin{aligned} y_{11} &= e^{\lambda_1 x}, \\ y_{21} &= 0, \\ &\dots \\ y_{n-r,1} &= 0, \\ y_{n-r+1,1} &= \sigma_{n-r+1,1} e^{\lambda_1 x}, \\ &\dots \\ y_{n1} &= \sigma_{n1} e^{\lambda_1 x}. \end{aligned}$$

Выберая теперь $c_1 = 1$, находим второе решение:

$$\begin{aligned} y_{12} &= 0, \\ y_{22} &= e^{\lambda_1 x}, \\ &\dots \\ y_{n-r,2} &= 0, \\ y_{n-r+1,2} &= \sigma_{n-r+1,2} e^{\lambda_1 x}, \\ &\dots \\ y_{n2} &= \sigma_{n2} e^{\lambda_1 x}. \end{aligned}$$

И т.д. Последнее решение получаем при подстановке $c_1 = \dots = c_{n-r-1} = 0, c_{n-r} = 1$

$$\begin{aligned} y_{1,n-r} &= 0, \\ y_{2,n-r} &= 0, \\ &\dots \\ y_{n-r,n-r} &= e^{\lambda_1 x}, \\ y_{n-r+1,n-r} &= \sigma_{n-r+1,n-r} e^{\lambda_1 x}, \\ &\dots \\ y_{n,n-r} &= \sigma_{n,n-r} e^{\lambda_1 x}. \end{aligned}$$

Для того, чтобы убедиться в линейной независимости решений выпишем матрицу коэффициентов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \sigma_{n-r+1,1} & \sigma_{n-r+1,2} & \dots & \sigma_{n-r+1,n-r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{n,n-r} \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы, имеющей размер $n \times (n - r)$, равен $n - r$, поскольку есть минор $(n - r)$ -го порядка, отличный от нуля. Отсюда и следует линейная независимость $(n - r)$ построенных решений.

Если ранг матрицы имеет наименьшее значение $r = n - m$, то число линейно независимых решений равно $n - r = m$ - кратности корня λ_1 . А это нам и нужно для построения фундаментальной системы решений.

Если же ранг матрицы $\mathbf{M}(\lambda_1)$: $r > n - m$, то число построенных линейно независимых решений $n - r < m$. В этом случае решение системы ищут в виде:

$$y_i = P_i(x) e^{\lambda_1 x}, \quad (3)$$

где $P_i(x)$ - многочлен степени $m - (n - r)$. Заметим, что если ранг матрицы $\mathbf{M}(\lambda_1)$ достигает своего максимального значения $r = n - 1$, то входящий в (3) многочлен имеет степень $m - 1$.

Задача для самостоятельной работы. Показать, что если записать нормальную систему, эквивалентную одному линейному дифференциальному уравнению n -го порядка, то для полученной системы ранг матрицы $\mathbf{M}(\lambda)$ всегда равен $n - 1$.

3. Метод исключения для линейных систем с постоянными коэффициентами произвольного вида.

Рассмотрим систему вида:

$$\begin{aligned} M_{11}(D) y_1 + M_{12}(D) y_2 + \dots + M_{1n}(D) y_n &= f_1(x), \\ M_{21}(D) y_1 + M_{22}(D) y_2 + \dots + M_{2n}(D) y_n &= f_2(x), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots & \\ M_{n1}(D) y_1 + M_{n2}(D) y_2 + \dots + M_{nn}(D) y_n &= f_n(x), \end{aligned} \quad (4)$$

где $M_{ik}(D)$ - операторные многочлены некоторой степени, $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ - достаточное число раз дифференцируемые функции. Попробуем получить дифференциальное уравнение для одной из неизвестных, например, y_1 . Подействуем на первое уравнение слева оператором $N_{11}(D)$ - алгебраическим дополнением для элемента $M_{11}(D)$ следующего операторного определителя

$$\Delta(D) = \begin{vmatrix} M_{11}(D) & \dots & M_{1n}(D) \\ \dots & \dots & \dots \\ M_{n1}(D) & \dots & M_{nn}(D) \end{vmatrix}. \quad (5)$$

На второе уравнение системы (4) подействуем слева оператором $N_{21}(D)$ - алгебраическим дополнением для элемента $M_{21}(D)$ определителя $\Delta(D)$. И т.д. На последнее уравнение действуем слева оператором $N_{n1}(D)$ - алгебраическим дополнением для элемента $M_{n1}(D)$ определителя (5). Затем, складывая получившиеся уравнения, получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_{i1}(D) N_{i1}(D) y_1 + \sum_{i=1}^n M_{i2}(D) N_{i1}(D) y_2 + \dots + \sum_{i=1}^n M_{in}(D) N_{i1}(D) y_n &= \\ &= \sum_{i=1}^n N_{i1}(D) f_i(x) \end{aligned}$$

или

$$\Delta(D) y_1 = \sum_{i=1}^n N_{i1}(D) f_i(x). \quad (6)$$

Уравнение (6) - линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами. Аналогичным образом получают уравнения для определения неизвестных y_2, \dots, y_n :

$$\begin{aligned} \Delta(D) y_2 &= \sum_{i=1}^n N_{i2}(D) f_i(x), \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \Delta(D) y_n &= \sum_{i=1}^n N_{in}(D) f_i(x). \end{aligned} \tag{7}$$

При выводе системы (6)-(7) мы предполагали дифференцируемость решений. Этот факт можно доказать. Может оказаться также, что $\Delta(D) = 0$. Тогда предложенный метод решения ничего не дает. Этот случай мы не будем рассматривать.

Пусть $\Delta(D) \neq 0$. Тогда определитель представляет собой операторный многочлен относительно D некоторой степени m . Степень многочлена m и называется *порядком системы* (4). Общее решение первого уравнения системы (6)-(7) будет содержать m произвольных постоянных, второго - также m постоянных. И т.д. Таким образом, общее число произвольных постоянных окажется равным $m \cdot n$. В соответствии с порядком системы (4) независимыми являются только m произвольных постоянных. Для того, чтобы установить зависимость между произвольными постоянными, следует найденные общие решения системы (6)-(7) подставить в исходную систему (4) и потребовать выполнения тождеств для любых x . В результате этой процедуры должно остаться m произвольных постоянных, через которые выражаются все остальные.

Пример.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений для двух неизвестных функций

$$\begin{aligned} y' + y + z' &= 0, \\ y'' - y + z'' + z &= x. \end{aligned}$$

Представим ее в операторной форме

$$\begin{aligned} (D + 1)y + Dz &= 0, \\ (D^2 - 1)y + (D^2 + 1)z &= x. \end{aligned}$$

Домножим первое уравнение на $(D^2 + 1)$, второе на D и вычтем второе из первого. В результате получим:

$$[(D + 1)(D^2 + 1) - D(D^2 - 1)]y = -1 \implies (D^2 + 2D + 1)y = -1.$$

Составляем характеристическое уравнение

$$(\lambda + 1)^2 = 0$$

и находим его корни: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Общее решение однородного уравнения таково

$$y = e^{-x}(c_1 + c_2x).$$

Легко видеть, что частным решением неоднородного уравнения является, например, $y = -1$. Таким образом, окончательно

$$y = e^{-x} (c_1 + c_2 x) - 1.$$

Теперь домножим первое уравнение на $(D - 1)$ и вычтем из него второе. Тогда придем к уравнению первого порядка

$$[D(D - 1) - (D^2 + 1)]z = -x \implies (D + 1)z = x,$$

общее решение которого легко находится

$$z = c_3 e^{-x} + x - 1.$$

Определитель системы

$$\Delta(D) = [(D + 1)(D^2 + 1) - D(D^2 - 1)] = (D + 1)^2,$$

поэтому ее порядок равен 2. Следовательно, решения системы должны содержать лишь две независимые постоянные. Для отыскания связи постоянных c_1, c_2, c_3 подставим найденные решения в первое уравнение системы. Тогда,

$$-e^{-x}(c_1 + c_2 x) + c_2 e^{-x} + e^{-x}(c_1 + c_2 x) - 1 - c_3 e^{-x} + 1 = 0 \implies c_3 = c_2.$$

Окончательный вид решения системы таков

$$\begin{aligned} y &= e^{-x} (c_1 + c_2 x) - 1, \\ z &= c_2 e^{-x} + x - 1. \end{aligned}$$