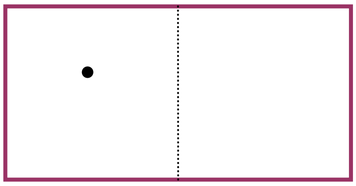
1.2. Элементы теории вероятностей.

1.2.1. Случайные события.

Случайные события - обычное явление в жизни. Примеры: бросаем монету, кубик (кости), упал на голову кирпич и т.д. Случайными событиями могут быть координаты и скорости отдельных частиц.



Рассмотрим объем, в котором находится 1 молекула, и мысленно разобьем его на две части. Вопрос - где находится молекула? Измеряем много раз - N раз, получаем, что из них $N_л$ раз частица находится в левой половине объема. Тогда вероятность можно определить как отношение "положительного" результата к полному числу испытаний при достаточно большом их числе. Это *частотное определение вероятности*:

$$\mathrm{P}\left(левая\ V/2\right) = \lim_{N\to\infty} \frac{N_л}{N} \qquad (1.2.1)$$

Рассмотрим, для примера, бросание кубика. Вероятность выпадения какого-либо числа i равна:

$$\mathrm{P}_i = \lim_{N\to\infty} \frac{N_i}{N}.$$

В силу равно вероятности выпадения каждой грани имеем: $\mathrm{P}(1) = \mathrm{P}(2) = \ldots = \mathrm{P}(6) = \frac{1}{6}$. Сумма вероятностей всех событий равна единице - нормировка вероятности на единицу:

$$\sum_i P_i = \sum_i \frac{N_i}{N} = 1 \qquad (1.2.2)$$

Для молекулы в сосуде объемом V можно рассмотреть вероятность того, что частица попадет в элемент объема ΔV. Для этого в течение длительного периода τ будем измерять положение частицы через промежутки времени Δt. Тогда число измерений равно $N = \frac{\tau}{\Delta t}$. Пусть за время τ частица проводит внутри малого объема ΔV время t_i, тогда число "положительных" измерений будет равно:

$$N_i = \frac{t_i}{\Delta t}. \qquad (1.2.3)$$

Вероятность того, что частица находится в ΔV, определяется:

$$\mathrm{P} = \lim_{N\to\infty} \frac{N_i}{N} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{t_i}{\tau} \qquad (1.2.4)$$

Если время наблюдения достаточно велико, то время пребывания $t_i \sim \Delta V$, тогда вероятность равна:

$$\mathrm{P} = \frac{\Delta V}{V} \qquad (1.2.5)$$

Как поступать, когда случайная величина имеет непрерывное распределение - например, координата частицы x. Если эта величина принимает дискретный ряд значений x_α ($\alpha = 1,2,3,\ldots$), то вероятность того, что молекула находится в состоянии с координатой x_α определяется также как (1.2.4):

$$\mathrm{P}_\alpha = \lim_{N\to\infty} \frac{N_\alpha}{N} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{t_\alpha}{\tau}$$

где N_α - число измерений, при которых найдено значение x_α, N - полное число измерений, t_α - время, которое частица проводит в состоянии x_α.

Однако если учитывать непрерывное распределение координат, то тогда бессмысленно говорить о вероятности нахождения частицы точно в точке x, т.к. она имеет размерность нуль и в ней частица находится бесконечно малое время (множество событий не счетное). Правильно в этом случае находить вероятность того, что частица находится в интервале от x до $x + dx$. Время t_x, которое частица проводит в интервале координат ($x \div x + dx$) пропорционально малому интервалу dx, и тогда вероятность попадания в этот интервал может быть записана:

$$d\mathrm{P}_x = \rho(x)\ dx \qquad (1.2.6)$$

Здесь $\rho(x)$ - коэффициент пропорциональности, дающий вероятность того, что частица лежит в интервале единичной длины. Величина $\rho(x)$ - *плотность вероятности*.

Если рассматриваем частицу в объеме V и определяем ее вероятность попасть в объем ΔV, то имеем:

$$\mathrm{P}(\Delta V) = \lim_{N\to\infty}\frac{\Delta N}{N} \tag{1.2.7}$$

при этом плотность вероятности запишется

$$\rho(x,y,z) = \lim_{\substack{N\to\infty\\ \Delta V\to 0}}\frac{\Delta N}{\Delta V\cdot N} = \lim\frac{\mathrm{P}(\Delta V)}{\Delta V}. \tag{1.2.8}$$

Или можно записать плотность вероятности по-другому:

$$\rho(x,y,z) = \frac{d\mathrm{P}}{dV} \tag{1.2.9}$$

Если у нас производится N измерений, то число измерений dN, дающих попадание частицы в бесконечно малый объем dV, равно (под N в будущем будем понимать число частиц в объеме, которые независимы друг от друга):

$$dN = Nd\mathrm{P} = N\cdot\rho(x,y,z)dV = N\cdot\rho(x,y,z)dxdydz\,, \tag{1.2.10}$$

а в конечный объем V_1 равно:

$$N(V_1) = N\int_{V_1}\rho(x,y,z)dxdydz \tag{1.2.11}$$

Тогда и вероятность попасть в конечный объем равна:

$$\mathrm{P}(V_1) = \frac{N(V_1)}{N} = \int_{V_1}\rho(x,y,z)dxdydz \tag{1.2.12}$$

Условие нормировки выполняется:

$$\int_V d\mathrm{P} = \int_V \rho(x,y,z)dxdydz = 1 \tag{1.2.13}$$

1.2.2. Основные теоремы.

а). **Теорема сложения вероятностей**.

Пусть имеем дискретный набор случайных величин, характеризующих состояние системы. Если система находится в состоянии со значением α, то она не может одновременно находиться в состоянии β. Тогда имеем дело с взаимоисключающими событиями: система находится либо в α, либо в β. Пусть времена нахождения системы в этих состояниях равны t_α и t_β соответственно. Тогда вероятность системе попасть в состояния α или β есть:

$$\mathrm{P}_{\alpha+\beta} = \lim_{\tau\to\infty}\frac{t_\alpha + t_\beta}{\tau} = \lim_{\tau\to\infty}\frac{t_\alpha}{\tau} + \lim_{\tau\to\infty}\frac{t_\beta}{\tau} = \mathrm{P}_\alpha + \mathrm{P}_\beta \tag{1.2.14}$$

Это и есть теорема сложения вероятностей для двух взаимоисключающих событий. Примеры таких событий: а) бросаем кубик - хотим 5 или 6, т.е. и то и другое устраивает, б) молекула внутри объема - $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$.

Исходя их этого, формируется условие нормировки вероятностей:

$$\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 + \mathrm{P}_3 + \ldots = \sum_i \mathrm{P}_i = \lim_{\tau\to\infty}\frac{t_1}{\tau} + \lim_{\tau\to\infty}\frac{t_2}{\tau} + \lim_{\tau\to\infty}\frac{t_3}{\tau} + \ldots = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}(t_1 + t_2 + t_3 + \ldots) = 1 \tag{1.2.15}$$

т.к. сумма по всем возможным состояниям, или по всем временам $\sum_i t_i = \tau$, дает единицу.

Для непрерывного распределения x имеем:

$$\int d\mathrm{P} = \int \rho(x)dx = 1 \tag{1.2.16}$$

б). **Теорема умножения вероятностей**.

Рассмотрим 2 независимые физические системы, состояния которых характеризуются наборами величин L и M. Системы называются статистически независимыми, если вероятность P_α того, что система 1 находится в состоянии α со значением L_α никак не зависит от вероятности P_β того, что система 2 находится в состоянии β со значением M_β.

Найдем вероятность того, что 1-ая система в состоянии α, а вторая - в состоянии β:

$$\mathsf{P}_{\alpha\beta} = \lim_{N\to\infty} \frac{N_{\alpha\beta}}{N}, \tag{1.2.17}$$

где $N_{\alpha\beta}$ - число измерений, когда в результате получаем одновременно L_α и M_β. Нетрудно получить число измерений, когда в системе 1 получено значение L_α:

$$N_\alpha = \mathsf{P}_\alpha \cdot N. \tag{1.2.18}$$

Из них только доля этих измерений, которые дают у системы 2 значение M_β, поэтому их число, как нетрудно видеть, равно:

$$N_{\alpha\beta} = \mathsf{P}_\beta \cdot N_\alpha. \tag{1.2.19}$$

Тогда подставляя (1.2.18) и (1.2.19) в (1.2.17), получаем теорему умножения вероятностей для статистически независимых систем:

$$\mathsf{P}_{\alpha\beta} = \mathsf{P}_\alpha \cdot \mathsf{P}_\beta \tag{1.2.20}$$

Примеры:

1) бросаем 2 кубика (либо один бросаем 2 раза), интересуемся вероятностью выпадения у одного кубика “6”, а у второго - “5”, тогда имеем: $\mathsf{P}_{6,5} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. Если нам безразлично, у какого кубика происходит выпадение этих чисел, то надо умножить на 2: $P_{6,5} = \frac{2}{36}$.
2) рассмотрим 2 молекулы в объеме ΔV, тогда вероятность для них оказаться в этом объеме равна:

$$P_2 = \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2.$$

1.2.3. Среднее значение случайных величин.

Определим среднее значение случайных величин или *математическое ожидание*. Пусть некоторая физическая величина L имеет дискретный ряд значений: L_1, L_2, L_3,… с соответствующими вероятностями: P_1, P_2, P_3,...их появления. Часто удобно знать не все наборы значений и их вероятности, а средние значения: $\langle L\rangle$. Среднее значение определяется (подобно нахождению координат центра масс):

$$\langle L\rangle = \lim_{N\to\infty}\frac{N_1L_1 + N_2L_2 + \ldots}{N} = \lim_{N\to\infty}\frac{\sum_\alpha N_\alpha L_\alpha}{N} = \sum_\alpha \mathsf{P}_\alpha L_\alpha$$

$$\langle L\rangle = \sum_\alpha \mathsf{P}_\alpha L_\alpha \tag{1.2.21}$$

Среднее значение любой функции от L равно:

$$\langle f(L)\rangle = \sum_\alpha \mathsf{P}_\alpha f(L_\alpha) \tag{1.2.22}$$

Для непрерывных величин имеем (например, координаты x):

$$\begin{gathered}\langle x\rangle = \int x d\ \mathsf{P}_x = \int x\rho(x)dx \\ \langle f(x)\rangle = \int f(x)\rho(x)dx\end{gathered} \tag{1.2.23}$$

где интегрирование проводится по всем возможным значениям x.

Рассмотрим некоторые свойства средних значений.

1) Пусть имеем две различные функции от случайной величины L: $f(L)$ и $\varphi(L)$. Тогда среднее значение от суммы равно

$$\langle f(L)+\varphi(L)\rangle=\sum_\alpha \mathrm{P}_\alpha\left(f(L)+\varphi(L)\right)=\sum_\alpha \mathrm{P}_\alpha f(L_\alpha)+\sum_\alpha \mathrm{P}_\alpha \varphi(L_\alpha)=\langle f(L)\rangle+\langle\varphi(L)\rangle \quad (1.2.24)$$

2) Если C постоянная, то среднее значение от произведения:

$$\langle C\varphi(L)\rangle=C\sum_\alpha \varphi(L_\alpha)\mathrm{P}_\alpha=C\langle\varphi(L)\rangle \quad (1.2.25)$$

3) Если $f(L)$ функция L, а $\varphi(M)$ функция другой случайной величины M, тогда имеем:

$$\langle f(L)\varphi(M)\rangle=\sum_\alpha\sum_\beta P_{\alpha\beta} f(L_\alpha)\varphi(M_\beta) \quad (1.2.26)$$

Если переменные L и M описывают 2 статистически независимые системы, то вероятности в соответствие с (1.2.20) перемножаются $\mathrm{P}_{\alpha\beta}=\mathrm{P}_\alpha\cdot\mathrm{P}_\beta$ и тогда получаем для средних значений:

$$\langle f(L)\varphi(M)\rangle=\sum_\alpha P_\alpha f(L_\alpha)\sum_\beta P_\beta\varphi(M_\beta)=\langle f(L)\rangle\langle\varphi(M)\rangle \quad (1.2.27)$$

1.2.4. <u>Флуктуации.</u>

Флуктуация - отклонение от среднего значения. Флуктуация характеризует, как часто состояние системы отклоняется от своего среднего значения.

$$\Delta L=L-\langle L\rangle \quad (1.2.28)$$

Поскольку отклонения от среднего значения могут быть совершенно различными, то удобнее характеризовать их тоже средней величиной. Но тогда определение (1.2.28) не годится для этого, поскольку среднее значение от него равно 0:

$$\langle\Delta L\rangle=\langle(L-\langle L\rangle)\rangle=\langle L\rangle-\langle L\rangle=0 \quad (1.2.29)$$

Поэтому берут не само отклонение ΔL, а квадрат флуктуации $(\Delta L)^2$ в качестве меры отклонения:

$$(\Delta L)^2=(L-\langle L\rangle)^2$$

и тогда рассматривают *среднюю квадратичную флуктуацию* величины L:

$$\left\langle(\Delta L)^2\right\rangle=\left\langle(L-\langle L\rangle)^2\right\rangle \quad (1.2.30)$$

Преобразуем (1.2.30):

$$\left\langle(\Delta L)^2\right\rangle=\left\langle(L-\langle L\rangle)^2\right\rangle=\left\langle\left(L^2-2L\langle L\rangle+\langle L\rangle^2\right)\right\rangle=\left\langle L^2\right\rangle-2\langle L\rangle^2+\langle L\rangle^2=\left\langle L^2\right\rangle-\langle L\rangle^2 \quad (1.2.31)$$

Часто характеризуют флуктуации так называемой *дисперсией*, определяемой как квадратный корень из средней квадратичной флуктуации:

$$\sigma=\sqrt{\left\langle(\Delta L)^2\right\rangle} \quad (1.2.32)$$

Относительная квадратичная флуктуация определяется:

$$\eta=\frac{\sqrt{\left\langle(\Delta L)^2\right\rangle}}{\langle L\rangle} \quad (1.2.33)$$