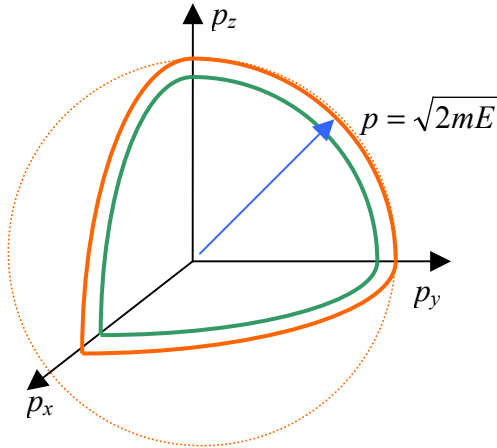


1.7. Функция распределения по энергиям.

1.7.1. Идеальный газ.

Учитывая определяющую роль энергии, естественно перейти от вероятности попадания молекулы в объем $d\Gamma = d\Gamma_q d\Gamma_p = d\Gamma_r d\Gamma_p$ к вероятности для молекулы иметь энергию E .



Для идеального газа нет необходимости рассматривать пространственную часть объема фазового пространства $d\Gamma_r$, т.к. энергия не зависит от координат для невзаимодействующих молекул. Ищем вероятность состояния молекулы с энергией в интервале от E до $(E+dE)$. Энергия равна $E = \frac{p^2}{2m} = \frac{mv^2}{2}$, т.е. определенная энергия соответствует определенному значению скорости или импульса. Для определенной скорости v , или импульса p , область, соответствующая диапазону $(E \div E + dE)$, имеет вид тонкого шарового слоя, радиусом $p = \sqrt{2mE}$.

Вероятность того, что энергия молекулы находится в диапазоне $(E \div E + dE)$, равна по теореме о сложении

вероятностей:

$$dP(E) = \int_{p \div p+dp} \rho(E(p_x, p_y, p_z)) dp_x dp_y dp_z, \quad (1.7.1)$$

где интегрирование ведется по шаровому слою от p до $p + dp$. Так как шаровой слой очень тонкий, то ρ внутри можно считать постоянной (т.к. E практически не меняется). Вынесем ρ за знак интеграла:

$$dP(E) = \rho(E) \cdot \int_{p \div p+dp} d\Gamma_p = \rho(E) \cdot d\Gamma_E \quad (1.7.2)$$

Здесь ввели обозначение:

$$d\Gamma_E = \int_{p \div p+dp} d\Gamma_p \quad (1.7.3)$$

- объем шарового слоя с радиусом p . Сосчитаем его. Объем шара в импульсном пространстве равен:

$$\Gamma_{\text{шар}} = \frac{4}{3} \pi p^3 = \frac{4}{3} \pi (2mE)^{3/2} \quad (1.7.4)$$

Объем шарового слоя равен:

$$d\Gamma_E = d\Gamma_{\text{шар}} = 4\pi p^2 dp. \quad (1.7.5)$$

Учитывая, что $p = \sqrt{2mE}$, запишем этот объем шарового слоя через энергию:

$$d\Gamma_E = \frac{d\Gamma_{\text{шар}}}{dE} dE = 4\pi p^2 \frac{dp}{dE} dE \quad (1.7.6)$$

Итак, вероятность для молекулы идеального газа иметь энергию в интервале от E до $E + dE$ равна:

$$dP(E) = 4\pi m^{3/2} \sqrt{2E} \rho(E) \cdot dE = \rho_E(E) dE \quad (1.7.7)$$

Функция распределения молекул по их энергиям, следовательно, определяется соотношением:

$$\rho_E(E) = 4\pi m^{3/2} \rho(E) \sqrt{2E} \quad (1.7.8)$$

Важно отличать друг от друга две функции распределения:

- 1) функция распределения $\rho(E) = \rho(E(q, p))$ представляет собой плотность вероятности обнаружить систему в единице фазового объема с координатами q и p , это есть *микрораспределение*;
- 2) функция распределения $\rho_E(E)$ представляет собой плотность вероятности обнаружить систему в состоянии с определенной энергией при всех координатах и импульсах, соответствующих этой энергии (шаровой слой в фазовом пространстве), иначе, это есть *макрораспределение*.

Примечание 1. Если функция микрораспределения $\rho(E) = \rho(E(q, p))$ определена в пространстве скоростей (т.е. $E = \frac{mv^2}{2}$) вероятность для идеального газа иметь энергию в интервале от E до $E + dE$ равна:

$$dP(E) = 4\pi m^{-3/2} \sqrt{2E} \rho(E) \cdot dE = \rho_E(E) dE \quad (1.7.9)$$

1.7.2. Зависимость $\rho(E)$ от энергии.

Используя вероятностные соображения, можно найти зависимость функции $\rho(E)$ от энергии. Выделим в газе квазизамкнутую подсистему из двух не взаимодействующих молекул. Энергия подсистемы - аддитивная величина:

$$E = E_1 + E_2. \quad (1.7.10)$$

Функция распределения подсистемы по теореме умножения вероятностей равна:

$$\rho(E) = \rho(E_1) \cdot \rho(E_2) \quad (1.7.11)$$

Таким образом, функция распределения не аддитивная величина. Однако нам всегда удобнее работать с аддитивными величинами в квазизамкнутой системе. Поэтому удобнее рассматривать логарифм распределения, который есть аддитивная величина от энергии:

$$\ln \rho(E) = \ln \rho(E_1) + \ln \rho(E_2). \quad (1.7.12)$$

При сложении энергий складываются и логарифмы функций распределения. Однако такое, т.е. одновременное выполнение (1.7.10) и (1.7.12), можно совместить только тогда, когда $\ln \rho(E)$ является линейной функцией энергии E :

$$\ln \rho(E) = \alpha + \beta E, \quad (1.7.13)$$

где α и β неизвестные пока постоянные. Итак, общий вид функции распределения можно представить:

$$\rho(E) = \text{const} \cdot e^{\beta E}. \quad (1.7.14)$$

1.7.3. Произвольная квазизамкнутая подсистема.

До сих пор рассматривали идеальный газ. Однако все эти рассуждения могут быть применены к произвольному макроскопическому телу (неидеальные газы, жидкость, твердое тело). Разбивая систему на квазизамкнутые подсистемы, записываем полную энергию подсистемы как сумму энергий частиц (молекул):

$$E = \sum_i E_i, \quad (1.7.15)$$

где в E_i входит не только кинетическая, но и потенциальная энергии частиц. При этом энергия подсистемы есть функция координат (в отличие от идеального газа) и импульсов $E = E(q, p)$, где $q = x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots$ и $p = p_{1x}, p_{1y}, p_{1z}, p_{2x}, p_{2y}, p_{2z}, \dots$. Вероятность подсистемы попасть в элемент объема $d\Gamma$ многомерного фазового пространства определяется:

$$dP(q, p) = \rho(q, p) d\Gamma \quad (1.7.16)$$

Здесь $d\Gamma = d\Gamma_q d\Gamma_p = dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 \dots dp_{1x} dp_{1y} dp_{1z} dp_{2x} \dots = d^{2n} \Gamma$ - дифференциал $2n$ (или $6N$) порядка, где n число степеней свободы (N число частиц). Из стационарности функции распределения $\rho(q, p)$ следует, что она зависит лишь от интегралов движения, а именно энергии:

$$\rho(E(q, p)) = \rho(E(x_1, y_1, z_1, \dots, p_{1x}, p_{1y}, p_{1z}, \dots)) \quad (1.7.17)$$

Перейдем от микрораспределения $\rho(q, p)$ к макрораспределению $\rho_E(E)$. Для этого, как и ранее для одной молекулы идеального газа, найдем вероятность состояния с энергией от E до $E + dE$. Приравняв энергию постоянной величине $E = E(q, p) = \text{const}$, мы определяем поверхность в фазовом пространстве. Тогда значениям энергии от E до $E + dE$ отвечает "шаровой" слой в многомерном фазовом пространстве p и q , которому соответствует многочисленное множество значений q и p :

$$dP(E) = \int_{E \rightarrow E+dE} \rho(E(x_1, y_1, z_1, \dots, p_{1x}, p_{1y}, p_{1z}, \dots)) d^{2n}\Gamma = \rho(E) \cdot \int_{E \rightarrow E+dE} d^{2n}\Gamma = \rho(E) d\Gamma_E \quad (1.7.18)$$

Здесь введен объем многомерного “шарового” слоя $d\Gamma_E = \int_{E \rightarrow E+dE} d^{2n}\Gamma$, интеграл берется по $(2n-1)$ переменной (или по $6N-1$), поэтому $d\Gamma_E$ - дифференциал первого порядка. Поскольку рассматривается тонкий “шаровой” слой, то можно считать $\rho(q, p)$ постоянной внутри этого слоя и вынести за знак интеграла.

Как и ранее для идеального газа запишем дифференциал $d\Gamma_E$ через энергию dE и вводим функцию макрораспределения подсистемы по энергиям:

$$d\Gamma_E = \frac{\partial \Gamma_E}{\partial E} dE \quad (1.7.19)$$

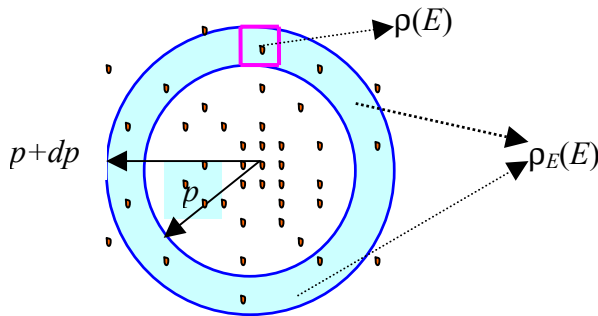
$$dP(E) = \rho(E) \frac{\partial \Gamma_E}{\partial E} dE = \rho_E(E) dE \quad (1.7.20)$$

Итак, *функция распределения подсистемы по энергиям*:

$$\rho_E(E) = \rho(E) \frac{\partial \Gamma_E}{\partial E}. \quad (1.7.21)$$

При этом выполняется следующее условие нормировки:

$$\int_{\text{все } E} dP(E) = \int_{\text{все } E} \rho_E(E) dE = \int_{\text{все } E} \rho(E) \frac{\partial \Gamma_E}{\partial E} dE = 1. \quad (1.7.22)$$



Еще раз следует напомнить, что $\rho(E) = \rho(E(q, p))$ - это плотность вероятности иметь энергию от E до $E + dE$, но только в единице фазового объема, а $\rho_E(E)$ - плотность вероятности иметь энергию от E до $E + dE$ во всем фазовом пространстве. Пример со стрельбой по мишени.