

2.3. Распределение Максвелла по проекциям скорости.

2.3.1. Распределение по проекциям скорости.

Обычно, когда проводится экспериментальная проверка распределения Максвелла, то регистрируются молекулы, летящие в одну сторону. Т.е. необходимо знать составляющую скорости вдоль определенной оси, например, вдоль оси x - v_x .

Воспользуемся микрораспределением, т.е. тем, что вероятность молекуле иметь определенную энергию равна произведению распределения Гиббса на соответствующий фазовый объем:

$$\rho(E) = A \cdot e^{-\frac{E}{T}}, \quad dP(E) = A \cdot e^{-\frac{E}{T}} d\Gamma_E \quad (2.3.1)$$

Подставляя кинетическую энергию одной молекулы $K = \frac{mv^2}{2}$, как и в предыдущем параграфе, рассмотрим фазовый объем, соответствующий элементу объема в пространстве скоростей: $d\Gamma_v = dv_x dv_y dv_z$. Тогда получаем распределение Максвелла, дающее вероятность того, что молекула

имеет скорость в следующем диапазоне скоростей $\left\{ \begin{array}{l} v_x \div v_x + dv_x \\ v_y \div v_y + dv_y \\ v_z \div v_z + dv_z \end{array} \right\}$:

$$dP(K) = \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2T}} dv_x dv_y dv_z \quad (2.3.2)$$

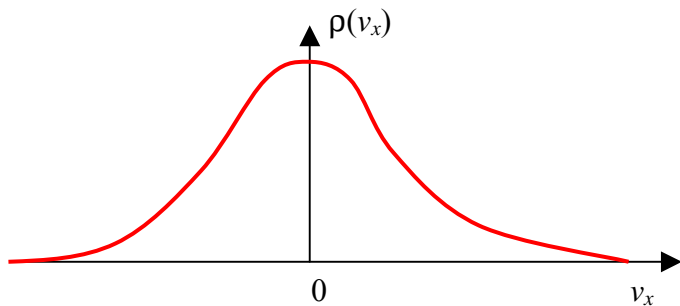
Эту вероятность можно представить в виде произведения: $dP(K) = dP(v_x) dP(v_y) dP(v_z)$, где каждый из множителей представляет собой распределение Максвелла (1859 г.) для проекций скорости молекул. Так, вероятность того, что молекула имеет x -ую проекцию скорости в пределах $v_x \div v_x + dv_x$, имеет вид:

$$dP(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{1/2} e^{-\frac{mv_x^2}{2T}} dv_x \quad (2.3.3)$$

Или иначе, распределение Максвелла по x -ой проекции скорости (плотность вероятности) равно:

$$\rho(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{1/2} e^{-\frac{mv_x^2}{2T}} dv_x = \frac{dP(v_x)}{dv_x} \quad (2.3.4)$$

Легко увидеть, что распределение (2.3.4) симметрично относительно начала координат и имеет максимум при проекции скорости $v_x = 0$.

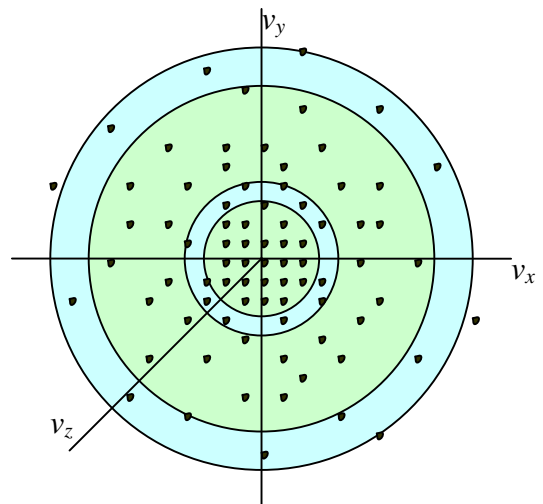


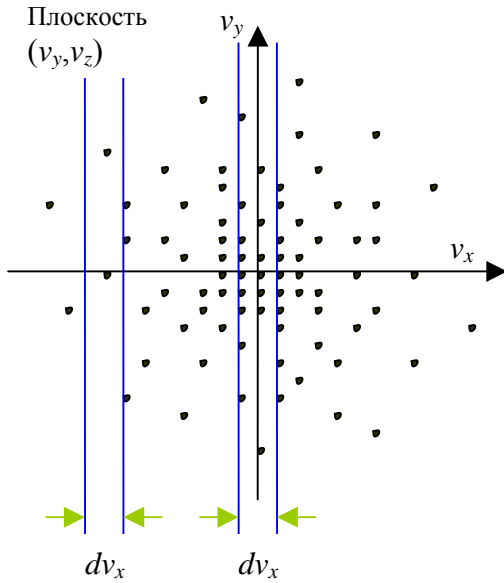
Положительные и отрицательные значения v_x имеют одинаковую вероятность, поэтому наиболее вероятная проекция и средняя проекция скорости равны нулю $\langle v_x \rangle = 0$.

Можно пояснить на простых картинках фазового объема различие в распределениях по абсолютным значениям скорости и по проекциям, а также, почему наиболее вероятная проекция скорости равна нулю. Плотность числа точек наибольшая в центре системы координат скоростей, а затем падает по экспоненте:

$$\rho(E) = \rho(K) = A e^{-\frac{mv^2}{2T}}$$

Для абсолютных значений скорости (см рисунок справа) для разных абсолютных значений скоростей v имеем различный фазовый объем, который растет с увеличением абсолютного значения скорости





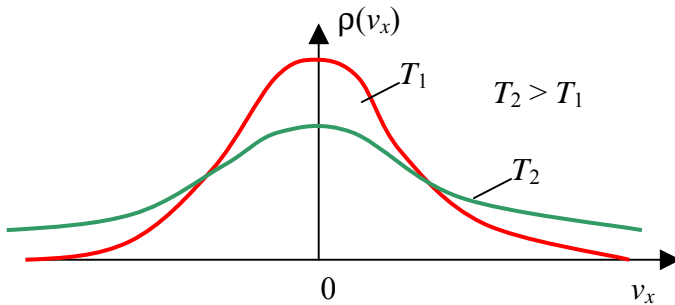
пропорционально $\sim 4\pi v^2 dv$. Поэтому при малых скоростях распределение растет из-за фазового объема, достигает максимума и затем падает из-за быстрого падения плотности частиц (хотя фазовый объем по-прежнему растет).

Если рассматривать фазовый объем в распределении по проекциям скорости (см рисунок слева), то этот фазовый объем постоянен для всех значений v_x , и равен dv_x . Следовательно, вероятность больше там, где больше плотность частиц, т.е. когда плоскость толщины dv_x походит через центр пространства скоростей.

Качественная зависимость распределения по проекциям от температуры показана на рисунке ниже. Чем выше температура ($T_2 > T_1$), тем положе становится кривая. Легко видеть, что площадь под кривой равна 1 (единице), т.е. выполняется условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{1/2} e^{-\frac{mv_x^2}{2T}} dv_x = \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{1/2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{m}{2T}}} = 1 \quad (2.3.5)$$

Для системы частиц из N молекул вероятность того, что молекула обладает кинетической энергией в определенном объеме фазового пространства, равна:



$$dP_K = \left[\left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2T}\right) dv_x dv_y dv_z \right]^N \quad (2.3.6)$$

Это распределение справедливо для любой системы с произвольным взаимодействием между молекулами, подчиняющейся законам классической физике.

2.3.2. Средняя кинетическая энергия на одну степень свободы

Вычислим среднюю энергию, приходящуюся на одну степень свободы, т.е. считаем $\langle E_x \rangle$ - долю кинетической энергии, относящуюся к движению по оси x :

$$E = \frac{mv_x^2}{2} + \frac{mv_y^2}{2} + \frac{mv_z^2}{2} = E_x + E_y + E_z \quad (2.3.7)$$

По определению среднего значения имеем:

$$\langle E_x \rangle = \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{1/2} \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2T}\right) v_x^2 dv_x \quad (2.3.8)$$

Так как (см Приложение 1 к § 2.2):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\beta x^2) x^2 dx = -\frac{d}{d\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\beta x^2) dx = -\frac{d}{d\beta} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \beta^{-3/2}$$

получаем для средней энергии:

$$\langle E_x \rangle = \frac{m}{2} \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{1/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{m}{2T} \right)^{3/2} = \frac{1}{2} T = \frac{1}{2} kT_k \quad (2.3.9)$$

Итак, кинетическая энергия, приходящаяся на одну степень свободы, равна “половинке” kT , причем

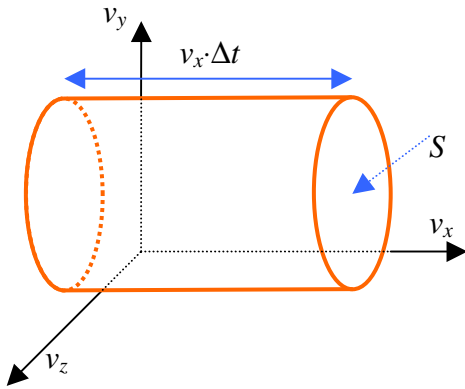
$$\langle E_x \rangle = \langle E_y \rangle = \langle E_z \rangle = \frac{1}{2} kT_k \quad (2.3.10)$$

Тогда среднее значение полной энергии равно

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} kT_k \quad (2.3.11)$$

2.3.3. Число ударов о единицу поверхности в единицу времени.

Рассмотрение числа ударов в единицу времени на единицу поверхности V есть не что иное, как определение плотности потока частиц (см Механика). Сосчитаем число молекул летящих по оси x , как количество молекул в цилиндрическом объеме высоты $v_x \cdot \Delta t$ и площадью основания S , изображенном на рисунке. При этом можно не обращать внимания на проекции по другим осям, поскольку число молекул, выходящих за боковые стенки цилиндра, равно числу молекул, входящих в объем, в силу равновесия.



Пусть концентрация частиц равна n . Тогда число молекул, обладающих проекцией скорости от v_x до $v_x + dv_x$, равно:

$$dn(v_x) = n \cdot dP(v_x) \quad (2.3.12)$$

Число молекул с этими проекциями, содержащихся в объеме цилиндра, равно:

$$dN(v_x) = S v_x \Delta t \cdot dn(v_x) \quad (2.3.13)$$

Все эти молекулы за время Δt пересекут площадку S . Поэтому число молекул с проекциями от v_x до $v_x + dv_x$, проходящих за единицу времени через единицу площадки, записывается:

$$dv = \frac{dN}{S \Delta t} = n \cdot v_x \cdot dP(v_x) \quad (2.3.14)$$

Полное число молекул (с любыми скоростями) записывается через интеграл:

$$v = n \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{1/2} \cdot \int_0^{\infty} v_x \cdot \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2T}\right) dv_x = n \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{1/2} \cdot \frac{T}{m} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2T}\right) \cdot d\left(\frac{mv_x^2}{2T}\right) = n \sqrt{\frac{T}{2\pi m}}$$

Вспоминая выражение для средней скорости молекул (2.2.21), получаем окончательно число ударов молекул о единицу поверхности в единицу времени:

$$v = \frac{1}{4} n \langle v \rangle \quad (2.3.15)$$

Эту же формулу легко получить, исходя из распределения Максвелла по абсолютным значениям скорости, если интегрировать по всем возможным углам прилета молекул на данную площадку.