Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Радиофизический факультет
Кафедра общей физики

Лабораторная работа

Изучение колебательного движения

Выполнили:
студенты 417 гр.
Овчинин С.Г. и
Илюхин Д.А.

Проверил:
Сергеева Е.А.

Нижний Новгород.
2003 г.

Цель работы:

1. Определение коэффициента жесткости пружины.
2. Измерение периодов колебаний для каждой пружины с грузами различной массы.
3. Вывод зависимости периода колебаний от амплитуды.
4. Вывод зависимости амплитуды колебаний от времени.

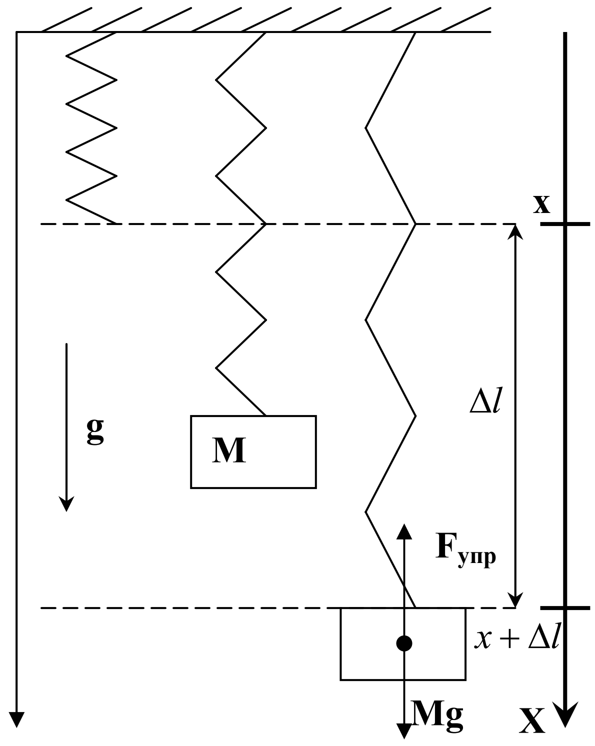
Приборы и оборудование: набор пружин известной массы m, набор грузов известной массы M. Штатив для закрепления пружин, шкала для отсчета смещения конца пружины, секундомер для измерения периода колебаний груза на пружине.

Теоретическая часть:

Равновесное положение груза массы M, подвешенного на пружине определяется равенством величин: силы упругости $|\vec{F}| = k \cdot \Delta l$, и силы тяжести Mg (где k – коэффициент жесткости пружины, а Δl - ее удлинение от недеформированного состояния). Если m<<M, то имеет место равенство: $M \cdot a = F_{упр} + M \cdot g$ - по II закону Ньютона в проекции на ось OX:

OX) $Ma_x = -k(x + \Delta l) + Mg$. Т.к. $k\Delta l = Mg$, получим $Ma_x = -kx$, учитывая что $a_x = \ddot{x}$, имеем: $M\ddot{x} + kx = 0$

$\ddot{x} + \dfrac{k}{M} \cdot x = 0$ - уравнение гармонического осциллятора. Выведенный из положения равновесия груз колеблется около этого положения по синусоидальному (гармоническому) закону $x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ (где x – смещение от положения равновесия, A – амплитуда колебаний, ω - циклическая частота, φ - начальная фаза). Период колебаний вычисляется по формуле $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ A и φ

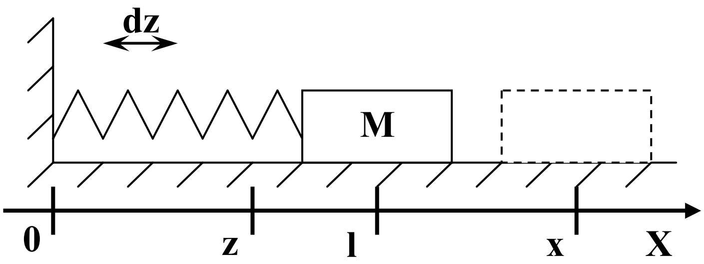


определяются из начальных условий, т.е. по значениям x и $V_x = \dfrac{dx}{dt}$ в момент t = 0.

$\ddot{x} = \omega^2 x = 0$, где $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{M}}$. В этом случае период колебаний $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M}{k}}$.

Рассмотрим теперь, как влияет масса пружины на характер колебаний.

Если существует область упругих деформаций (где справедлив закон Гука) сила $F_{тяж}$ не влияет на период колебаний. Поэтому можно рассмотреть горизонтальный аналог колебательного движения.



Чем дальше виток от закрепления, тем больше его деформация. Если у нас однородная деформация, то $|\vec{V}| \sim z$. В идеале деформация однородна.

Но для реальной пружины такая идеализация тем точнее, чем меньше m – масса пружины по сравнению с массой груза M.

Если у нас существует некая деформация, то $W_n = \frac{kx^2}{2}$, где x – удлинение пружины, равное смещению груза. А $W_k = \frac{M \cdot V_x^{\ 2}}{2}$, где $V_x = \dot{x}$ - скорость правого конца пружины. Если однородная деформация, то скорость участка пружины dz с массой $dm = \frac{mdz}{l}$ (где l – длина недеформированной пружины) равна $V_{dz} = \frac{zV_x}{l}$, а $W_{k_{dz}} = dW_k = \frac{mV_x^{\ 2} \cdot z^2 dz}{2 \cdot l^3}$. Тогда полная кинетическая энергия пружины:

$$\int dW_k = \int_0^l \frac{mV_x^{\ 2} \cdot z^2}{2 \cdot l^3} dz \Rightarrow W_{k_n} = \frac{mV_x^{\ 2}}{2 \cdot l^3} \int_0^l z^2 dz = \frac{mV_x^{\ 2}}{2 \cdot l^3} \cdot \frac{z^3}{3}\Bigg|_0^l = \frac{mV_x^{\ 2} \cdot l^3}{6 \cdot l^3} - 0 = \frac{mV_x^{\ 2}}{6}.$$

Тогда полная энергия $W = W_n + W_k + W_{k_n} = \frac{kx^2}{2} + \frac{MV_x^{\ 2}}{2} + \frac{mV_x^{\ 2}}{6} = const$ - закон сохранения энергии.

Если продифференцируем данное равенство по dt, то получим:

$\left(\frac{kx^2}{2} + \frac{(3M+m)}{6} V_x^{\ 2} \right)' = 0$, тогда $\frac{k \cdot 2x \cdot \dot{x}}{2} + \frac{3M+m}{6} \cdot 2\dot{x} \cdot \ddot{x} = 0 / : \dot{x}$, то

$kx + (M + \frac{m}{3}) \cdot \ddot{x} = 0$, отсюда $\ddot{x} + \frac{k}{M + m/3} \cdot x = 0$. В этом случае $\omega = \sqrt{\frac{k}{M + m/3}}$ и

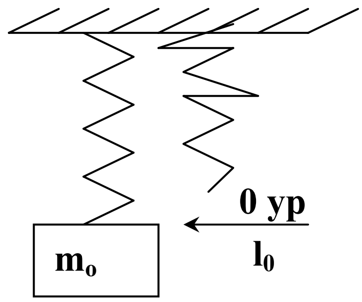
$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{M + m/3}{k}}$. Таким образом, масса m существенно влияет на T так же, как если бы мы подвесили другой груз $m/3$ на невесомую пружину.

Ход работы:

Соберем установку, подвесив пружину к штативу со шкалой. Даны пружины с номерами 2 (m_2=1.416*10^{-1} кг) и 6 (m_6=9.8*10^{-3} кг).

А) Измерение коэффициента жесткости k двух пружин.

Теперь измерим коэффициент жесткости k для каждой из пружин. Для этого нам необходимо при подвешивании определенных грузов замерять смещения конца пружины. Т.к. пружина деформирована, то необходимо подвесить некий груз массы m_0, чтобы устранить асимметрию пружины (см рис.). Для этого достаточно груза массы m_0 = 0,1 кг. Данное положение конца пружины будем считать нулевым уровнем. Далее будем подвешивать различные грузы массы M и измерять удлинения пружины Δl, тогда $k_i = \dfrac{M_i g}{\Delta l_i}$, след. $k = \dfrac{1}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{M_i g}{\Delta l_i}$ - среднее значение коэффициента жесткости пружины.



Пружина №2. (m_0 = 0,1 кг, l_0 = 35,1 см)

№	M, кг	L, см	$\Delta l = l - l_0$	K, н/м	$K_{ср}$, н/м
1	0,1	38,8	3,7	26,513	26,513
2	0,2	42,5	7,4	26,513	
3	0,3	46,2	11,1	26,514	
4	0,4	49,9	14,8	26,513	
5	0,5	53,5	18,5	26,513	

$\Delta M = 0.002$ кг, $\xi_M = \dfrac{0.002}{0.9} = 0.007$, $\Delta l = 1.5мм = 0.0015м$, $\xi_{\Delta l} = \dfrac{0.0015}{0.111} = 0.01$,

$k = \dfrac{Mg}{\Delta l} = M^1 g^1 \Delta l^{-1} \Rightarrow \xi_k = \sqrt{\xi_M{}^2 + \xi_g{}^2 + \xi_{\Delta l}{}^2}$ =0,0158.

$\Delta k = \xi_k \cdot k = 0.0158 \cdot 26.513 = 0.42 \, Н/м$. $S_k = \sqrt{\dfrac{1}{n-1} \sum \Delta k_i{}^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} \sum\limits_{i=1}^{5} \Delta k_i{}^2} = 0.06 \, Н/м$.

k_2=(26,51 ± 0,42) $Н/м$.

Пружина №6. (m_0 = 0,1 кг, l_0 = 22,9 см)

№	M, кг	L, см	$\Delta l = l - l_0$	K, н/м	$K_{ср}$, н/м
1	0,1	25,2	2,3	40,652	40,82
2	0,2	27,7	4,8	40,875	
3	0,3	30,2	7,3	40,315	
4	0,4	32,7	9,8	40,041	
5	0,5	35,1	12,2	40,205	

$\xi_{\Delta l} = \dfrac{0.0015}{0.173} = 0.02$, ξ_k =0,0245. $\Delta k = \xi_k \cdot k = 40.82 \cdot 0.0245 = 0.999 \, Н/м = 1 \, Н/м$.

$S_k = \sqrt{\dfrac{1}{n-1} \sum \Delta k_i{}^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} \sum\limits_{i=1}^{5} \Delta k_i{}^2} = 1.072 \, Н/м$, $\Delta k < 3 \cdot S_k \Rightarrow$

k_6=(40,82 ± 3,21) $Н/м$.

Получаем следующие средние значения коэффициентов жесткости пружин:

K_1 = 26,513 н/м и K_2 = 40,82 н/м

Б) Измерение периода колебаний в зависимости от массы грузов:

Измерим теперь периоды колебаний для каждой пружины с различными массами М.

Для первой пружины измерим время 25 колебаний, тогда $T_i = \frac{t_i}{25}$ для каждого груза М (при этом амплитуда колебаний достаточно мала А=3см).

№	M, кг	t, с			$t_{ср}$, с	T, с
1	0,1	11,22	11,47	11,18	11,29	0,452
2	0,2	13,09	13,22	13,56	13,29	0,532
3	0,3	15,05	15,59	15,62	15,41	0,616
4	0,4	17,72	17,53	17,47	17,57	0,703

$\Delta T = 0.015c$. $S_T = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\Delta t_i}$ =0,3.

S_T =0,012с $\Delta T \le 3 \cdot S_T \Rightarrow$

$\Rightarrow T = (T_{cp} \pm 0.037)c$

ξ_T =0,08.

Для второй пружины измерим время 15 колебаний, тогда $T_i = \frac{t_i}{15}$.

№	M, кг	t, с			$t_{ср}$, с	T, с
1	0,1	8,88	8,87	8,49	8,75	0,583
2	0,2	10,66	10,59	10,72	10,66	0,711
3	0,3	11,97	12,21	12,07	12,08	0,805

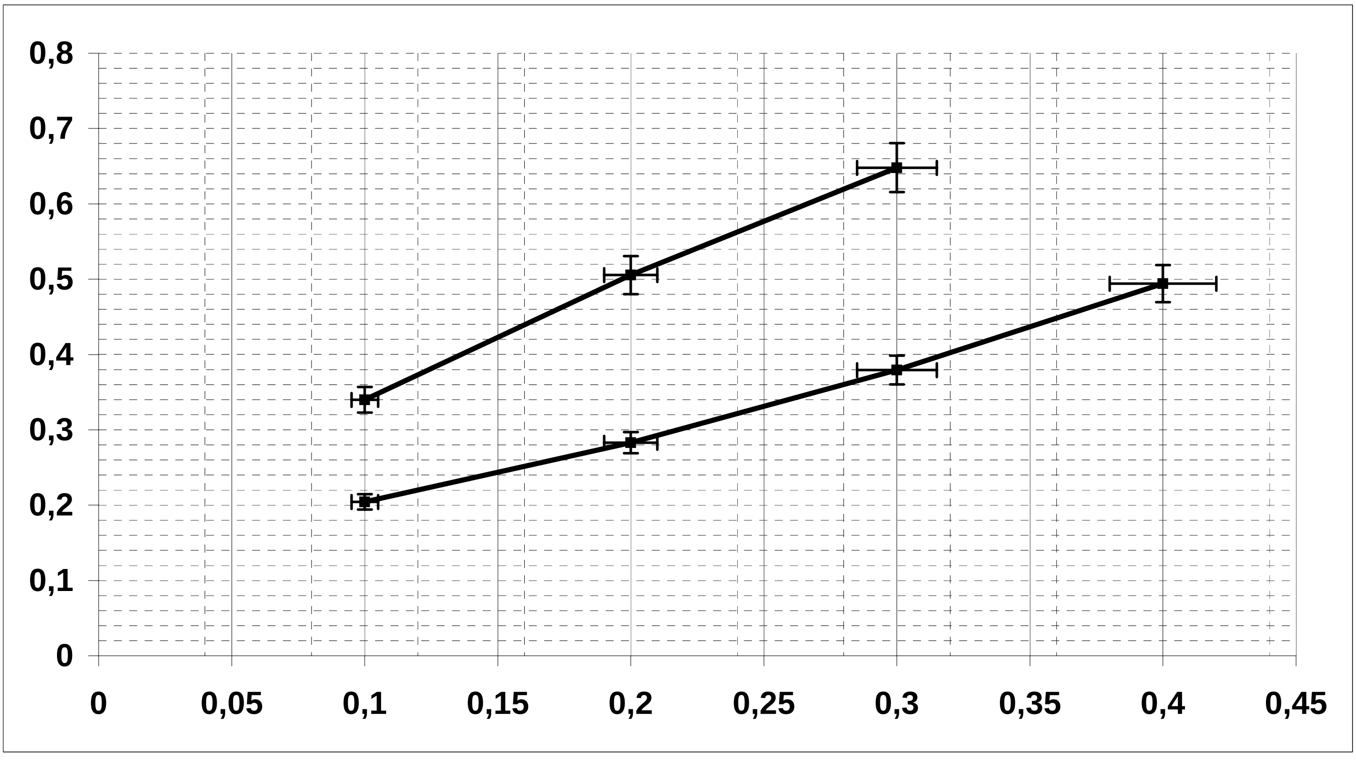
$\Delta T = 0.015c$.

$S_T = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\Delta t_i} \cdot \frac{1}{15}$=0,021.

$\Delta T \le 3 \cdot S_T \Rightarrow T = (T_{cp} \pm 0.063)c$

ξ_T =0,04.

Далее построим зависимость $T^2(M)$ и сравним ее с расчетной зависимостью $T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{M}{k}$. Как видим из графиков для 2-й и 6-й пружин наша зависимость не совпадает полностью с расчетной зависимостью. Это можно объяснить тем, что масса пружины m_n влияет на характер колебания. Поэтому, если построить график $T^2(M) = 4\pi^2 \frac{(M + m/3)}{k}$, то мы видим, что эта зависимость наиболее четко совпадает с нашей. Следовательно, масса пружины действительно влияет на колебания пружины.



В) Исследование зависимости периода колебаний от амплитуды, измерение и сравнение периодов малых, средних и больших амплитуд колебаний. Измерим время полных колебаний при разных амплитудах.

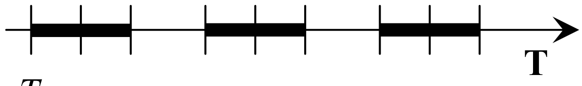
Выясним зависимость периода колебаний Т от амплитуды А. Для этого измерим периоды колебаний при малых, средних и больших амплитудах.

Пружина №2 (М = 0,3 кг)

А, с	**3**	**6**	**9**
t, с	9,01	6,09	6,12
N	15	10	10
Т, с	0,601	0,609	0,612

$\Delta A = 0.0015$, $\xi A = 0.05$, $\Delta t = 0.015c$, $\Delta T = 0.002c$,

$\xi_T = \dfrac{0.002}{0.601} = 0.003$.



Получили, что в пределах погрешностей $T_3 > T_2 > T_3$

Следовательно для пружины №2: Т увеличивается с увеличением А.

Пружина №6 (М = 0,3 кг)

А	**2**	**5**	**7,5**
t	8,03	8,06	8,18
N	15	15	15
Т, с	0,535	0,538	0,545

$\Delta A = 0.0015 = c + {c}/{2}$, $\xi A = \dfrac{\Delta A}{A_{\min}} = 0.075$,

$\Delta t = 0.015c$, $\Delta T = 0.001c$, $\xi_T = \dfrac{0.001}{0.535} = 0.002$.

$T_{расч} = 2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{M + {m}/{3}}{k_6}} = 0.546c$. Опять же видим, что в пределах погрешностей период растет с ростом А. $A_3 > A_2 > A_1 \Rightarrow T_3 > T_2 > T_1$. Таким образом, период колебаний Т растет с ростом амплитуды А.

Г) Изучение зависимости амплитуды колебаний от времени.

Изучим теперь зависимость амплитуды колебаний от времени. Для этого подвесим груз на пружинке и отклоним его от положения равновесия на величину А = 2 см. Затем отпустим грузик и система начнет колебаться. Установим через какое время амплитуда колебаний будет равна $\dfrac{3}{4}A$, $\dfrac{1}{2}A$, $\dfrac{1}{4}A$.

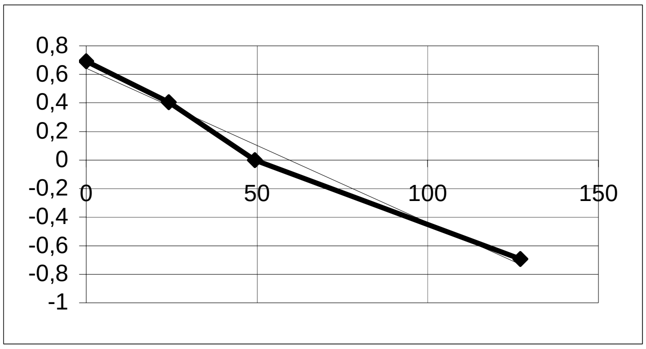
И построим графики зависимостей A(t), с погрешностями $\Delta t = 0{,}015$с, $\Delta A = 0{,}15$см. Т.к. 3-х точек для построения не достаточно, то необходимо найти еще точки. Для этого используем тот факт, что А уменьшается по экспоненциальному закону. Поэтому ln(A(t)) – будет прямая с угловым коэффициентом k.

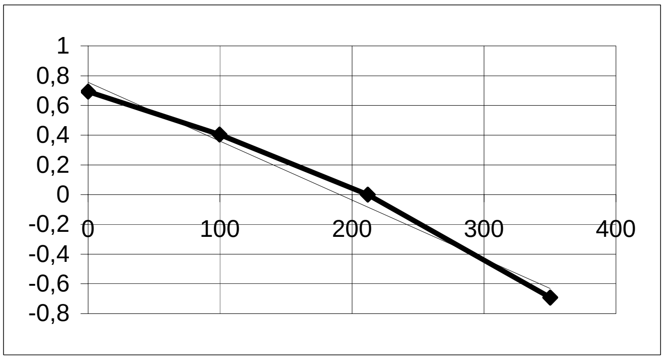
Пружина №6

Амплитуда, см	Время, с
$\ln({3}/{4}\,A) = 0.405$	24,15
$\ln({1}/{2}\,A) = 0$	49,40
$\ln({1}/{4}\,A) = -\ 0.693$	127,18
$\ln(A) = 0.693$	0

Пружина №2

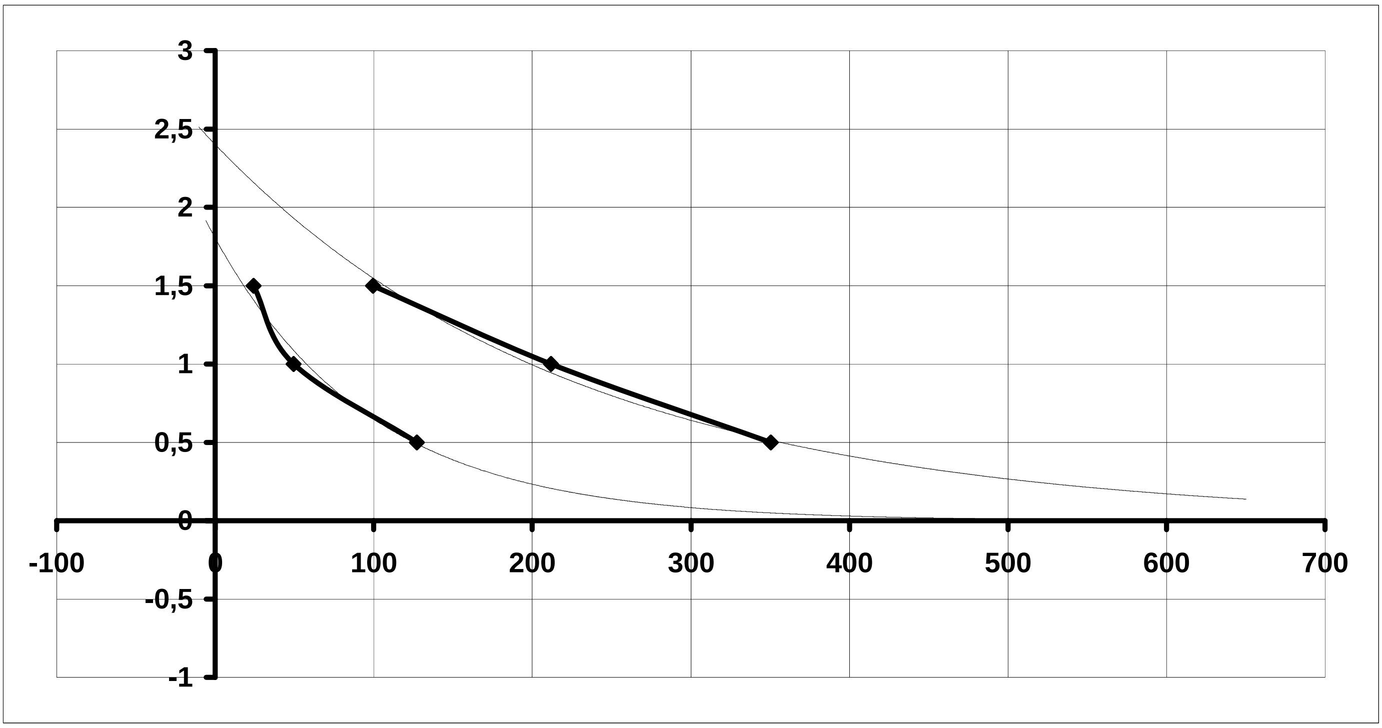
Амплитуда, см	**Время, с**
$\ln({3}/{4}\,A) = 0{,}405$	99,58
$\ln({1}/{2}\,A) = 0$	211,93
$\ln({1}/{4}\,A) = -\ 0{,}693$	350,37
$\ln(A) = 0.693$	0





Таким образом, при различных t мы можем найти значение A для этого момента. Точнее из ln(A) следует уже само A. Следовательно, мы уже точнее можем построить график функции A(t).

Наше предположение, что A(t) – зависимость экспоненциальная следует из того, что потеря энергии происходит через выделение тепла и превращение $W_п$ во внутреннюю энергию.



Вывод по лабораторной работе:

В данной работе были проведены опыты по изучению колебательного движения пружинного маятника. Было установлено, что на период колебаний влияют как масса самого груза, так и масса пружины, на которой он подвешен. А также влияет амплитуда колебаний (чем больше A, тем больше T). Проверено как убывает амплитуда со временем – экспоненциальная зависимость. Предел погрешностей не превышает 2-4%, что свидетельствует о точности проводимых опытов. Также присутствуют в системе и случайные погрешности, избежать которых можно улучшив качество опытов, т.е. улучшение приборов.