

13

Бесплатно

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

Горьковский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Лаборатория общей физики
радиофизического факультета

МАЯТНИК ОБЕРБЕКА

(описание к лабораторной работе)

Маятник Обербека

Лаб. работа. 11У. Горький 1990, 6 стр.

В работе на основе уравнения моментов для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, изучается движение маятника Обербека и экспериментальным путем определяется его момент инерции.

Составитель: Зайцев С.И.

Уравнение движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, имеет вид

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M, \quad (1)$$

где $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \gamma$ - угловое ускорение тела,

M - результирующий момент сил, действующих на твердое тело, вычисленный относительно оси вращения, J - момент инерции тела относительно этой же оси.

Момент инерции твердого тела является мерой его инертности при вращательном движении, зависит от расположения массы по отношению к оси вращения и определяется равенством:

$$J = \int_V \rho r_{\perp}^2 dV. \quad (2)$$

Здесь ρ - плотность тела, r_{\perp} - расстояние элементарного объема dV от оси, V - объем тела. Однако в большинстве случаев вычисление момента инерции по формуле (2) является затруднительным, и тогда особое значение приобретают экспериментальные методы определения момента инерции.

В настоящей работе используется один из таких методов: на основе изучения движения маятника Обербека определяется его момент инерции.

Маятник Обербека представляет собой блок, к которому на нити подвешен груз массы m . В начальном положении нить намотана на блок и груз находится на высоте h (см. рис. 1). Этот груз, падая, разматывает нить, приводит во вращение блок, достигает своего нижнего положения А и затем поднимается на высоту h' за счет энергии вращательного движения блока.

К блоку прикреплены четыре спицы, вдоль которых можно перемещать и закреплять грузы одинаковой массы, что позволяет изменять момент инерции J_0 блока.

На маятник действуют две внешние силы: сила тяжести груза mg , создающая относительно оси вращения блока момент Mmg , и сила трения, создающая момент $M\tau$. В этом случае уравнение движения (1) для маятника принимает вид

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = Mmg + M\tau \quad (3)$$

где φ - угол поворота блока, а J - момент инерции маятника относительно оси вращения, складывающийся из моментов инерции блока J_0 и груза mr^2 , т.е.

$$J = J_0 + mr^2. \quad (4)$$

В дальнейшем будем считать, что момент силы трения остается величиной постоянной и равной

$$M_{тр} = -M_0 = \text{const} < 0. \quad (5)$$

Когда груз опускается вниз, из (3) можно получить следующее уравнение

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{mgr - M_0}{J_0 + mr^2} \quad (6)$$

с начальными условиями на угловую скорость ($\dot{\varphi} = 0$) и угол поворота ($\varphi = 0$). Т.к. правая часть не зависит от времени, уравнение (6) легко интегрируется и в итоге получаются выражения для угловой скорости и угла поворота

$$\omega = \frac{mgr - M_0}{J_0 + mr^2} t, \quad \varphi = \frac{1}{2} \frac{mgr - M_0}{J_0 + mr^2} t^2. \quad (7)$$

В некоторый момент времени t_1 груз m достигнет нижнего положения и величины ω и φ примут какие-то значения, которые обозначим ω_1 и φ_1 .

При движении груза вверх уравнение движения маятника примет несколько отличный от (6) вид

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{mgr + M_0}{J_0 + mr^2} \quad (8)$$

и имеет следующие начальные условия при $t = t_1$: если угол поворота остается функцией непрерывной, т.е. $\varphi = \varphi_1$, то угловая скорость может измениться и перед поднятием груза принять значение ω_0 .

Уравнение (8) также легко интегрируется, что позволяет записать с учетом начальных условий следующие выражения для угловой скорости и угла поворота

$$\begin{aligned} \omega &= -\frac{mgr + M_0}{J_0 + mr^2} (t - t_1) + \omega_0, \\ \varphi &= -\frac{1}{2} \frac{mgr + M_0}{J_0 + mr^2} (t - t_1)^2 + \omega_0 (t - t_1). \end{aligned} \quad (9)$$

В некоторый момент времени t_2 маятник останавливается, т.е. угловая скорость будет равной нулю, а угол поворота принимает значение φ_2 .

Из выражений (7) и (9) можно получить систему 4-х уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{mgr - M_0}{J_0 + mr^2} t_1, \\ \varphi_1 &= \frac{1}{2} \frac{mgr - M_0}{J_0 + mr^2} t_1^2, \\ 0 &= -\frac{mgr + M_0}{J_0 + mr^2} (t_2 - t_1) + \omega_0, \\ \varphi_2 &= \varphi_1 - \frac{1}{2} \frac{mgr + M_0}{J_0 + mr^2} (t_2 - t_1)^2 + \omega_0 (t_2 - t_1). \end{aligned} \right. \quad (10)$$

В системе (10) будем считать неизвестными J_0 , M_0 , ω_1 и ω_0 . Опуская промежуточные вычисления, приведем конечный результат

$$\left\{ \begin{aligned} J_0 &= \frac{mgr (t_2 - t_1)^2}{\varphi_2 - \varphi_1 \left[1 - \left(\frac{t_2 - t_1}{t_1} \right)^2 \right]} - mr^2, \\ M_0 &= mgr \frac{\varphi_2 - \varphi_1 \left[1 + \left(\frac{t_2 - t_1}{t_1} \right)^2 \right]}{\varphi_2 - \varphi_1 \left[1 - \left(\frac{t_2 - t_1}{t_1} \right)^2 \right]}, \\ \omega_0 &= 2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1}, \quad \omega_1 = 2 \frac{\varphi_1}{t_1}. \end{aligned} \right. \quad (11)$$

Соотношения (11) позволяют определить J_0 , M_0 , ω_0 и ω_1 по результатам измерений m , r , φ_1 , φ_2 , t_1 и t_2 (значение g берется с необходимой точностью из таблиц).

ЗАДАНИЕ

1. Определить момент инерции блока:

- а) без грузов,
- б) с грузами, закрепленными на середине спиц,
- в) с грузами, закрепленными на концах спиц.

2. Проверить, выполняется ли на опыте пропорциональность между $J_{гр}$ и R^2 , где $J_{гр}$ — момент инерции грузов на спицах, а R — расстояние их до оси вращения.

3. Для каждого пункта задания 1 определить:

- а) какая часть кинетической энергии маятника терлется при прохождении груза m через нижнее положение,
- б) работу силы трения.

4. Снять зависимость угла поворота блока от времени и построить графики $\varphi(t)$ и $\omega(t)$ (выполнить для одного из пунктов задания 1).

ВОПРОСЫ:

1. Укажите направление моментов внешних сил, действующих на маятник Обербека.
2. Как изменятся графики зависимостей $\varphi(t)$ и $\omega(t)$, если бы не было потери энергии при движении маятника Обербека?
3. Получите формулу для вычисления момента инерции блока без учета трения.
4. Получите зависимость $\omega(t)$ при условии: момент силы трения пропорционален угловой скорости.

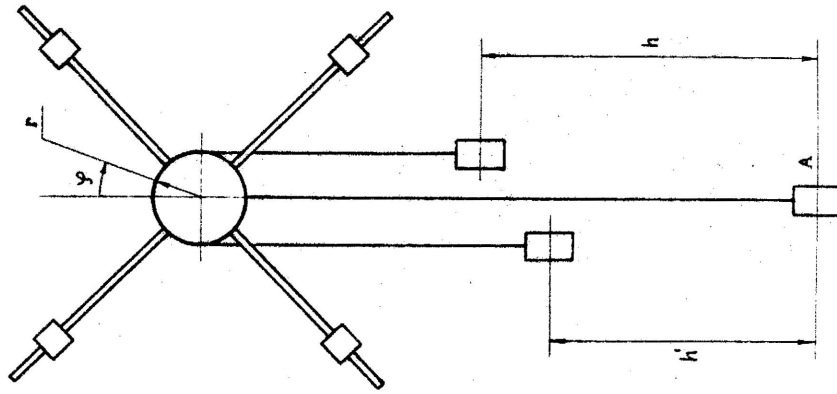


Рис. 1