

Лекция 10. **Численное интегрирование** Рассмотрим в пространстве $H_{[a,b]}$ интеграл

$A[f] = \int_a^b f(x)dx : f \in H_{[a,b]} \rightarrow R_1$ т.е операцию интегрирования можно рассматривать как функционал действующий в пространстве $H_{[a,b]}$. Функционал $A[f]$ аппроксимируем последовательностью конечномерных функционалов $A_n : R_n \rightarrow R_1$ имеющих область определения пространства R_n и областью значений пространство R_1 , $A_n[f^n], f^n = T_n[f]$. Здесь T_n - оператор проектирования пространства $H_{[a,b]}$ на пространство R_n с областью определения $\omega_n = \{x_i^{(n)} : a \leq x_0^{(0)} \leq x_1^{(n)} \leq \dots \leq x_n^{(n)} \leq b\}$.

Опр. Будем говорить, что на элементе $f \in H_{[a,b]}$ выполнено условие аппроксимации или иными словами последовательность конечномерных функционалов $A_n[f^n]$ аппроксимирует функционал $A[f]$, если

$$\|A_n[T_n[f^n]] - A[f]\|_{R_n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

Пример: $H_{[a,b]} = C_{[a,b]}^n, T_n f = \{f(x_i^{(n)})\}_{i=0}^n = \{f_i\}_{i=0}^n$ - сеточная функция

Общий вид аппроксимирующего функционала, который называют квадратурной формулой

$A_n f = \sum_{i=0}^n C_i^{(n)} f(x_i^{(n)})$, $C_i^{(n)}$ - весовые коэффициенты, удовлетворяющие условию

$$\sum_{i=0}^n C_i^{(n)} = b - a$$

$x_i^{(n)}$ - узлы квадратурной формулы.

Функционал

$\delta_n[f] = \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^n C_i^{(n)} f(x_i^{(n)})$ - называют функционалом погрешности квадратурной формулы.

$2(n+1)$ - параметров $(x_i^{(n)}, C_i^{(n)})$ - квадратурной формулы выбирают так, чтобы функционал погрешности обращался в ноль на некотором классе функций или был минимальным.

Опр. Будем говорить, что последовательность функционалов $\{A_n f\}, n \rightarrow \infty, f \in H_{[a,b]}$ слабо сходится к функционалу $A[f], f \in H_{[a,b]}$, если

$$A_n[f] \rightarrow A[f], n \rightarrow \infty \text{ для любого элемента } f \in H_{[a,b]}$$

Опр. Будем говорить, что последовательность функционалов $\{A_n f\}, n \rightarrow \infty, f \in H_{[a,b]}$ сильно сходится к функционалу $A[f], f \in H_{[a,b]}$, если

$$\|A_n[f] - A[f]\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|A_n[f] - A[f]\|}{\|f\|} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

Т.1 Ни для какой системы узлов и весовых коэффициентов квадратурной формулы функционал погрешности не стремится сильно к нулю на $C_{[a,b]}$, более того

$$\|\delta_n[f]\| = b - a + \sum_{k=0}^n C_k^{(n)}$$

Иными словами из теоремы следует, что существует функция из класса $C_{[a,b]}$ такая, что для нее невозможно построить квадратурную формулу для целого класса функций, т.е. численно правильно вычислить интеграл.

Однако для практических приложений важен другой факт, состоящий в том что функционал погрешности $\delta_n[f] \rightarrow 0$ слабо на классе $C_{[a,b]}$. Более того, в приложениях, как правило, имеют дело с некоторым компактом (множество где может быть выделены фундаментальная последовательность) $X \in C_{[a,b]}$ и тогда для $f \in X$ можно указать даже порядок стремления к нулю функционала погрешности. Из слабой сходимости следует, вообще говоря факт, что для каждой функции следует строить свою квадратурную формулу

Т. Для того, чтобы последовательность функционалов $\delta_n[f]$ слабо стремилась к нулю для любой функции из класса $C_{[a,b]}$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=0}^n |C_k^{(n)}| < K - const \text{ для всех } n$$

Т. Если все весовые коэффициенты квадратурной формулы положительны то последовательность функционалов $\delta_n[f]$ слабо стремилась к нулю для любой функции из класса $C_{[a,b]}$

Теоремы говорят, что для любой функции из $C_{[a,b]}$ можно построить квадратурную формулу выбором узлов и весовых коэффициентов квадратурной формулы

Построение квадратурных формул интерполяционного типа

Пусть функция $f \in C_{[a,b]}^{n+1}$ би требуется построить квадратурную формулу для вычисления интеграла

$$\int_a^b f(x)p(x)dx - p(x)$$
 заданная весовая функция

Интервалу $[a, b]$ поставим в соответствие сетку $\omega_n = \{x_i^{(n)} : a \leq x_0^{(n)} \leq \dots \leq x_n^{(n)} = b\}$ и с помощью оператора проектирования $T_n f(x) = \{f(x_i^{(n)})\}_{i=0}^n$ - функции $f(x)$ поставим в соответствие сеточную функцию на сетке ω_n . Далее сеточную функцию заменим интерполяционным многочленом Лагранжа.

$$f^L(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k^{(n)}) e_k(x), e_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i^{(n)}}{x_k^{(n)} - x_i^{(n)}} = \frac{\omega_n(x)}{x - x_k^{(n)}} \omega_n'(x), \omega_n(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k^{(n)})$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) p(x) dx &\rightarrow \int_a^b f^L(x) p(x) dx = \\ \int_a^b \sum_{k=0}^n f(x_k^{(n)}) l_k^n(x) p(x) dx &= \\ \sum_{k=0}^n [\int_a^b l_k^n(x) p(x) dx] f(x_k^{(n)}) &= \sum_{k=0}^n C_k^{(n)} f(x_k^{(n)}), \\ C_k^{(n)} &= \int_a^b l_k^n(x) p(x) dx \end{aligned}$$

Построенные таким образом квадратурные формулы называют квадратурными формулами Ньютона-Котеса. Заметим, что формулы Ньютона-Котеса точны для функций $P_{N-1}(x)p(x)$, P_{N-1} - многочлен степени $N - 1$, т.к. в этом случае $f(x)p(x) = f^L(x)p(x)$

Примеры построения квадратурных формул на равномерных сетках:

Пусть $p(x) = 1$ и $[a, b] \rightarrow \omega_n = \{x_i : x_i = a + \frac{b-a}{n}i, i = \overline{0, n}\}$

$$\int_a^b f(x) dx \rightarrow (b-a) \sum_{k=0}^n C_k^{(n)} f(a + k \frac{b-a}{n}), C_k^{(n)} = \frac{1}{b-a} \int_a^b \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} dx$$

1. Квадратурная формула трапеций $n = 1$

$$\omega_n = \{a, b\},$$

$$\int_a^b f(x) dx \rightarrow \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)], C_0^1 = C_1^1 = \frac{1}{2} > 0, C_0^1 + C_1^1 = 1 > 0; \text{Геометрическая интерпретация.}$$

2. Квадратурная формула Симпсона $n = 2$

$$\omega_n = \{a, \frac{a+b}{2}, b\},$$

$$\int_a^b f(x) dx \rightarrow (b-a) [\frac{1}{6} f(a) + \frac{4}{6} f(\frac{a+b}{2}) + \frac{1}{6} f(b)], C_0^2 = C_2^2 = \frac{1}{6} > 0, C_1^2 = \frac{4}{6} > 0, C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 = 1 > 0; \text{Геометрическая интерпретация.}$$

3. Квадратурная формула под названием "правила $\frac{3}{8}$ " $n = 3$

$$\omega_n = \{a, \frac{2a+b}{3}, \frac{a+2b}{3}, b\},$$

$$\int_a^b f(x) dx \rightarrow (b-a) [\frac{1}{8} f(a) + \frac{3}{8} f(\frac{2a+b}{3}) + \frac{3}{8} f(\frac{a+2b}{3}) + \frac{1}{8} f(b)], C_0^3 = C_3^3 = \frac{1}{8} > 0, C_1^3 = C_2^3 \frac{3}{8} > 0, C_0^3 + C_1^3 + C_2^3 + C_3^3 = 1 > 0; \text{Геометрическая интерпретация.}$$

Заметим, что для коэффициентов выполнены условия выше изложенных теорем. Оказывается, что начиная с $n = 8$ среди коэффициентов квадратурных формул Ньютона-Котеса появляются отрицательные. Имеют место теоремы

Т. Для весовых коэффициентов квадратурных формул Ньютона-Котеса имеет место утверждение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n |C_k^{(n)}| = \infty$$

Т. Существуют непрерывные функции для которых процедура численного интегрирования основанные на квадратурных формулах Ньютона-Котеса неограниченно расходятся

Иными словами процедура повышения степени интерполяционного многочлена Лагранжа при построении квадратурных формул - процедура тупиковая.

На практике квадратурные формулы Ньютона-Котеса используют только для $n < 9$.

Замечание. Если при интерполяции интерполяционный многочлен Лагранжа заменить на интерполяционный многочлен Лежандра, а за узлы квадратурной формулы выбирать корни многочленов Лежандра, то процедура повышения степени интерполяционного многочлена не является тупиковой и построенные таким образом квадратурные формулы носят название квадратурных формул Гаусса.

Погрешности квадратурных формул Ньютона-Котеса

$$\text{При } f(x) \in C_{[a,b]}^{N+1}, \quad p(x) = 1$$

$$f(x) = f^L(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k), \xi \in [a, b];$$

Следовательно, функционал погрешности вычисляется для $p(x) = 1$ по формуле

$$\delta_n[f] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{k=0}^n (x - x_k) dx$$

1. Квадратурная формула трапеций $n = 1$

$$\delta_n[f] = \frac{f''(\xi)}{2!} \int_a^b (x-a)(x-b) dx \leq \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \frac{(b-a)^3}{12}$$

2. Квадратурная формула Симпсона $n = 2$

$$\delta_n[f] = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_a^b (x-a)(x-\frac{b-a}{2})(x-b)dx \leq \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| \frac{(b-a)^5}{2880}$$

При вычислении использовано правило: если квадратурные формулы Ньютона-Котеса имеют симметричные узлы относительно середины отрезка $[a, b]$ и весовые коэффициенты симметричны, то такие квадратурные формулы точны для любой нечетной относительно середины отрезка $[a, b]$ функции и следовательно точны для многочленов степени n .

В уточненной оценке погрешности среднюю точку сетки $\omega_n \frac{a+b}{2}$ считают с кратностью два и замены n на $n + 1$ в формуле функционала погрешности.