

Лекция 13.

Порядок точности явной схемы Эйлера

$$\frac{du}{dt} = f(t, u) \\ u(0) = u^0, \quad f(t, u) \in G = \{0 \leq t \leq T, |u - u^0| \leq U\}$$

$$[0, T] \rightarrow \omega_\tau = \{t_i : 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq T, \\ \tau = t/n, t_i = \tau(i-1), i = \overline{0, n}\}, \\ u_{i+1} = u_i + \tau f(t_i, u_i), \\ u_0 = u^0, \beta = \overline{0, n-1}$$

Здесь u_i -приближенное решение задачи.

Пусть $u(t_i)$ - точное решение. Интерес представляет мера близости между точным решением приближенным, а также накопление возможных ошибок в приближенном алгоритме. Мету близости будем оценивать с помощью $\|\{u(t_i)\}_{i=0}^n - \{u_i\}_{i=0}^n\|_{R_n}$.

Предварительно докажем лемму

Лемма Гронуолла Пусть $\alpha, \beta > 0, \gamma_0 = 0$. Тогда из неравенства

$$\gamma_{i+1} \leq \gamma_i(1 + \alpha) + \beta \text{ следует, что}$$

$$\gamma_i \leq \beta \frac{\exp(i\alpha) - 1}{\alpha}.$$

Док-во: для $i = 0$ утверждение леммы очевидно. Предположим, что лемма справедлива для любого i и докажем справедливость леммы для $i + 1$.

$$\gamma_{i+1} \leq \gamma_i(1 + \alpha) + \beta \leq (1 + \alpha)\beta \frac{\exp(i\alpha) - 1}{\alpha} + \beta = \\ \beta \frac{\exp(i\alpha)(1 + \alpha) - 1}{\alpha} \leq \beta \frac{\exp(i\alpha)(\exp(\alpha) - 1)}{\alpha} = \beta \frac{\exp((i+1)\alpha) - 1}{\alpha}$$

Порядок точности явной схемы Эйлера. Пусть $M_0 = \max_G |f|, \quad M_1 = \max_G |f'_t|, \quad M_2 = \max_G |f''_u|$

$\|\{u(t_i)\}_{i=0}^n - \{u_i\}_{i=0}^n\|_{R_n} = ?$ Для точного решения имеем $u(t_{i+1}) =$ используем разложение в ряд Тейлора $= u(t_i) + \tau u'(t_i) + \frac{\tau^2}{2} u''(\zeta_i), \quad \zeta_i \in [t_i, t_{i+1}]$

$$u' = f \rightarrow u(t_{i+1}) = u(t_i) + \tau f(t_i, u(t_i)) + \frac{\tau^2}{2} u''(\zeta_i)$$

Приближенное решение в методе Эйлера задается равенством

$$u_{i+1} = u_i + \tau f(t_i, u_i).$$

Вычитая из первого равенства второе будем иметь

$$|u(t_{i+1}) - u_{i+1}| = |u(t_i) - u_i + \tau f(t_i, u(t_i)) - \tau f(t_i, u_i) + \frac{\tau^2}{2} u''(\zeta_i)| =$$

$$u'' = (u')' = (f)'_t = f'_t + f'_u f$$

$$\leq |u(t_i) - u_i| + \tau |f(t_i, u(t_i)) - f(t_i, u_i)| + \frac{\tau^2}{2} (|f'_t| + |f'_u| |f|) =$$

используя формулу конечных приращений Лагранжа

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 f'_\omega(x + \omega(x-y)) d\omega(x-y) \quad |u(t_{i+1}) - u_{i+1}| \leq |u(t_i) - u_i| + \tau |f_u| |u(t_i) - u_i| + \frac{\tau^2}{2} (|f'_t| + |f'_u| |f|) \leq |u(t_i) - u_i| + \tau M_2 |u(t_i) - u_i| + \frac{\tau^2}{2} (M_1 + M_2 M_0)$$

Применяя к полученному неравенству лемму Гронуолла, будем иметь

$$|u(t_i) - u_i| \leq \frac{\tau^2}{2} (M_1 + M_2 M_0) \frac{M_1 + M_2 M_0}{\tau M_2} (\exp(i\tau M_2) - 1)$$

$$\|\{u(t_i)\}_{i=0}^n - \{u_i\}_{i=0}^n\|_{R_n} = \max_{0 \leq i \leq n} |u(t_i) - u_i| = \tau \frac{M_1 + M_2 M_0}{M_2} (\exp(TM_2) - 1) \sim O(\tau)$$

Аппроксимация, устойчивость, сходимость для линейных разностных схем

Пусть на отрезке $[0, T]$ Линейное уравнение $Lu = f$ имеет решение $u(t)$. Пусть далее задан приближенный алгоритм(разностная схема) решения на равномерной сетке ω_τ

$$L_\tau u_\tau = f_\tau, \quad \tau\text{- параметр} \quad \text{схемы}$$

Пример:

$$\frac{du}{dt} + \lambda u = f(t) \\ u(0) = u^0, \\ Lu = \begin{cases} \frac{du}{dx} + \lambda u & t \in (0, T] \\ u(0), & t = 0 \end{cases}$$

$$f = \begin{cases} f(t)t \in (0, T] \\ u^0, & t = 0 \end{cases}$$

$$u_{i+1} = u_i - \tau \lambda u_i + \tau f_i, \\ u_0 = u^0, \beta = 0, n-1$$

$$L_\tau u_\tau = \begin{cases} \frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} + \lambda u_i & i = \overline{1, n} \\ u_0, & i = 0 \end{cases}$$

$$f_\tau = \begin{cases} f_i = f(t_i) & i = \overline{1, n} \\ u^0, & i = 0 \end{cases}$$

Опр. Погрешностью аппроксимации оператора L оператором L_τ на решении $u(t)$ уравнения $Lu = f$ назовем функцию

$$\Psi(t) = Lu(t) - L_\tau u(t)$$

В нашем примере $\Psi(t) = \frac{du}{dt}|_{t=t_i} + \lambda u(t_i) - \frac{u(t_{i+1}) - u(t_i)}{\tau} - \lambda u(t_i) = f(t_i) - \frac{u(t_{i+1}) - u(t_i)}{\tau} - \lambda u(t_i)$

Опр. Будем говорить, что оператор L_τ имеет m -порядок аппроксимации на сетке ω_τ , если $\|\Psi\|_\tau = \|L_\tau u - Lu\|_\tau \sim O(\tau^m)$, $\|\Psi\|_\tau = M\tau^m$ Здесь и далее под символом $\|\cdot\|_\tau$ понимается норма в R_n для сеточной функции заданной на сетке ω_τ

Пример: $\Psi = f(t_i) - \frac{u(t_{i+1}) - u(t_i)}{\tau} - \lambda u(t_i) = f(t_i) - \frac{u(t_i) + \tau u'(t_i) + \tau^2/2 - u(t_i)}{\tau} - \lambda u(t_i) = f(t_i) - u'(t_i) - \lambda u(t_i) - \frac{\tau}{2} u''(t_i)$
 $\|\Psi\| \sim O(\tau)$

Опр. Будем говорить, что разностная схема $L_\tau u_\tau = f_\tau$ устойчива, если существует постоянная $M > 0$, независящая от выбора f_τ такая, что имеет место оценка

$$\|u_\tau\| \leq M \|f_\tau\|.$$

Опр. Будем говорить, что разностная схема $L_\tau u_\tau = f_\tau$ корректна, если существует единственное решение разностной схемы при любых входных данных f_τ и выполнены условия устойчивости.

$$\text{Пример: } \frac{du}{dt} + \lambda u = 0$$

$$u(0) = u^0$$

Разностная схема

$$u_{i+1} = u_i - \lambda \tau u_i, \quad u_0 = u^0, i = \overline{0, n-1}$$

$$u_{i+1} \leq (1 - \tau \lambda) u_i, \text{ если } |1 - \tau \lambda| < 1 \rightarrow |u_{i+1}| \leq |u_i| \leq \dots \leq |u_0|$$

$$|1 - \tau \lambda| < 1 \rightarrow \lambda \tau < 2$$

Следствие: 1. Устойчивость означает непрерывную зависимость решения разностной схемы $L_\tau u_\tau = f_\tau$ от входных данных равномерную относительно τ .

$$\text{Пусть } L_\tau \bar{u}_\tau = \bar{f}_\tau$$

$$L_\tau u_\tau = f_\tau$$

Вычитая из второго первое равенство, имеем

$$L_\tau (u_\tau - \bar{u}_\tau) = (f_\tau - \bar{f}_\tau) \text{ из условий устойчивости следует, что}$$

$$\|\bar{u}_\tau - u_\tau\| \leq M \|\bar{f}_\tau - f_\tau\|_\tau$$

2. Если разностная схема $L_\tau u_\tau = f_\tau$ корректна, то существует обратный оператор $L_\tau^{-1} \rightarrow u_\tau = L_\tau^{-1} f_\tau \rightarrow \|u_\tau\| \leq \|L_\tau^{-1}\| \|f_\tau\| \rightarrow$ из условий устойчивости, что

$$\|L_\tau^{-1}\| \leq M$$

т.е. имеет место равномерная ограниченность обратного оператора при выполнении условий устойчивости.

Связь устойчивости, аппроксимации разностной схемы с порядком точности приближенного решения.

$$\text{Задача } \|u(t_i)_{i=0}^n - u_\tau\| = ?$$

$$\text{Обозначим } z_\tau = u_\tau - u \rightarrow u_\tau = z_\tau + u \rightarrow L_\tau u_\tau = f_\tau \rightarrow L_\tau z_\tau = f_\tau - L_\tau u = f_\tau - f + f - L_\tau u = f_\tau - f + Lu - L_\tau u = \Psi_\tau \text{- погрешность аппроксимации оператора } L \text{ оператором } L_\tau$$

Опр. Будем говорить, что решение разностной схемы сходится к точному решению, если

$$\|z_\tau\| \rightarrow 0 \quad \tau \rightarrow 0$$

$L_\tau z_\tau = \Psi_\tau$ из условий устойчивости следует, что $\|z_\tau\|_\tau \leq M \|\Psi_\tau\|_\tau$ следовательно, если выполнено условие аппроксимации т.е. $\|\Psi_\tau\|_\tau \sim O(\tau^m)$ тогда $\|z_\tau\|_\tau \rightarrow 0 \quad \tau \rightarrow 0$

В этом смысле и говорят, что из аппроксимации и устойчивости решения разностной схемы следует сходимость приближенного решения к точному и для сходимости достаточно исследовать аппроксимацию и устойчивость.

Устойчивость разностных схем для решения задачи Коши. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= f(t, u) \\ u(0) &= u^0, \quad f(t, u) \in G = \{0 \leq t \leq T, |u - u^0| \leq U\} \end{aligned}$$

и возмущенную

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{dt} &= \bar{f}(t, \bar{u}) \\ \bar{u}(0) &= \bar{u}^0, \quad \bar{f}(t, u) \in G = \{0 \leq t \leq T, |u - u^0| \leq U\} \end{aligned}$$

Вычитая из второй задачи первую, будем иметь для $z = \bar{u} - u$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \bar{f}(t, z + u) - f(t, u) \\ z(0) &= \bar{u}^0 - u^0 = \delta u \end{aligned}$$

Применяя к последнему равенству формулу конечных приращений, для нахождения z , будем иметь уравнение

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} + \lambda u &= 0 \\ z(0) &= \delta u, \quad \lambda = -f'_u(t, \zeta) \end{aligned}$$

Если $f_u < 0 \rightarrow \lambda > 0 \rightarrow z = \delta u \exp(-\lambda t) \rightarrow$ решение задачи Коши устойчиво (локально) по отношению к возмущению правой части и начальных данных. Аналогично поступим и для исследования устойчивости разностных схем

1. Схема Эйлера

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u_i + \tau f(t_i, u_i), \\ u_0 &= u^0, \quad i = 0, n-1 \end{aligned}$$

Рассмотрим возмущенную разностную схему

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i+1} &= \bar{u}_i + \tau \bar{f}(t_i, \bar{u}_i), \\ \bar{u}_0 &= \bar{u}^0, \quad i = 0, n-1 \end{aligned}$$

Вычитая из второй задачи первую для $z = \bar{u}_i - u_i$, будем иметь

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= z_i + \tau \bar{f}(t_i, z_i + u_i) - f(t_i, u_i), \\ z_0 &= \bar{u}^0 - u_0, \quad i = 0, n-1 \end{aligned}$$

Используя формулу конечных приращений, получим

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= z_i + \tau f'(\dots) z_i = (1 - \lambda \tau) z_i, \quad \lambda = -f'_u \\ z_0 &= \bar{u}^0 - u_0, \quad i = 0, n-1 \end{aligned}$$

Видим, что устойчивость разностной схема сводится к локальной устойчивости, т.е. устойчивости линейной разностной Эйлера в окрестности некоторой точки

Очевидно, что для устойчивости в этом случае достаточно, чтобы $|1 - \lambda \tau| < 1 \rightarrow \tau \lambda < 2, \lambda > 0$

Для исследования устойчивости остальных схем, будем рассматривать линеаризованное уравнение

2. Неявная схема Эйлера

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u_i - \tau \lambda u_{i+1}, \\ u_0 &= u^0, \quad i = \overline{0, n-1} \end{aligned}$$

$$u_{i+1} = \frac{1}{1+\tau\lambda} u_i \rightarrow \left| \frac{1}{1+\tau\lambda} \right| < 1 \rightarrow \text{устойчивость для любых } \tau, \lambda > 0$$

3. Схема Рунге с весами

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u_i - \lambda \tau [\alpha u_{i+1} + (1-\alpha)u_i], \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \\ u_0 &= u^0, \quad i = \overline{0, n-1} \end{aligned}$$

$$u_{i+1} = \frac{1-\tau\lambda(1-\alpha)}{1+\tau\lambda\alpha} u_i \rightarrow$$

$\left| \frac{1-\tau\lambda(1-\alpha)}{1+\tau\lambda\alpha} \right| < 1$ откуда следует, что схема безусловно устойчива (для всех τ) для $\alpha \geq 0.5$ и устойчива при $\tau = \frac{1}{(0.5-\alpha)\lambda}, \lambda > 0$

4. Схема предиктор-корректор

$$\begin{aligned} u_{i+1}^* &= u_i - \tau \lambda u_i, \\ u_{i+1} &= u_i - \frac{\tau \lambda}{2} [u_i + u_{i+1}^*], \\ u_0 &= u^0, \quad i = \overline{0, n-1} \end{aligned}$$

$$u_{i+1} = u_i [1 - \tau \lambda + \frac{\tau^2 \lambda^2}{2}] \rightarrow$$

$$\left| 1 - \tau \lambda + \frac{\tau^2 \lambda^2}{2} \right| < 1 \rightarrow \tau \lambda < 2, \lambda > 0$$

5. Схема Рунге-Кутты 4-го порядка

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u_i - \frac{\tau}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ u_0 &= u^0, \quad i = \overline{0, n-1} \end{aligned}$$

$$k_1 = f(t_i, u_i) = -\lambda u_i,$$

$$k_2 = f(t_i, 0.5\tau, u_i + 0.6\tau k_1) = -\lambda [u_i + 0.5\tau k_1] = [0.5\tau \lambda^2 = \lambda] u_i$$

$$k_3 = f(t_i, u_i + 0.5\tau k_2) = u_i [\lambda + \frac{\tau}{2} \lambda^2 - \frac{\tau^2}{4} \lambda^2]$$

$$k_4 = f(t_i, u_i + \tau k_3) = u_i [\lambda + \tau \lambda^2 - \frac{\tau^2}{2} \lambda^3 + \frac{\tau^3}{8} \lambda^4]$$

$$u_{i+1} = u_i [1 - \tau \lambda + \frac{\tau^2 \lambda^2}{2} - \frac{\tau^3 \lambda^3}{6} + \frac{\tau^4 \lambda^4}{24}]$$

$$\left| 1 - \tau \lambda + \frac{\tau^2 \lambda^2}{2} - \frac{\tau^3 \lambda^3}{6} + \frac{\tau^4 \lambda^4}{24} \right| < 1 \rightarrow$$

$$\tau \lambda < 278, \lambda > 0$$