Лекция 3.

Итерационные методы решения линейных систем Известно, что всякая квадратная матрица $A = \{a_{ij}, ij = \overline{1,n}\}$ определяет оператор отображающий n-мерное векторное пространство само в себя $A : R_n \to R_n$ и уравнение $Ax = f$ можно рассматривать как операторное уравнение I-рода. Для решения таких уравнений можно применять принцип сжимающих отображений. **Принцип сжимающих отображений** Пусть V-полное метрическое пространство с метрикойρ, $A : V \to V$ сжимающее отображение с постоянной сжатия $\alpha, 0 \leq \alpha < 1$:

Тогда 1) оператор A имеет единственную неподвижную точку x^*, т.е.

$$Ax^* = x^*$$

2) для любого элемента $x_0 \in V$ последовательность $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ образованная по рекурентному правилу

$$x^{n+1} = Ax^n$$

сходится к неподвижной точке x^*.

3) имеет место оценка

$$\rho(x^n, x^*) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x^0, x^1)$$

Определение Оператор A-сжимающий, если имеет место оценка для любых элементов $x_1, x_2 \in V$

$$\rho(Ax_1, Ax_2) \leq \alpha\rho(x_1, x_2), 0 \leq \alpha < 1$$

n-мерное векторное пространство является полным метрическим пространством т.е. любая фундаментальная последовательность в этом пространстве сходится к элементу этого пространства.

Метрика в R_n -задается различным образом. Приняты следующие метрики

1) кубическая

$$\rho_k(x, y) = max_{0 \leq i \leq n}|x_i - y_i|$$

2) октаэдрическая $\rho_o(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

3) эвклидова(сферическая)

$$\rho_s(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$$

Идея применения принципа сжимающих отображений состоит в преобразовании исходного уравнения первого рода $Ax = f$ к уравнению второго рода $x = Bx + \phi$. Это преобразование может быть выполнено различными способами, на пример,

$$Ax = f, \to x - x + ax = f, \to x = (E - A)x + f, \to B = E - A,$$

E-тождественное преобразование Здесь $B : R_n \to R_n$ и последовательность строится по правилу $x^{k+1} = Bx^k + \phi, k \to \infty$

Достаточные условия сходимости метода:

Если отображение B сжимающее т.е. $0 \leq \alpha(b) < 1$ тогда последовательность $x^{k+1} = Bx^k + \phi, k \to \infty$ сходится к решению уравнения

$$x = Bx + \phi$$

Действительно,

$$\rho(Bx_1 + \phi, Bx_2 + \phi) = \rho(Bx_1, Bx_2) \leq \alpha_b\rho(x_1, x_2)$$

и, следовательно, применим принцип сжимающих отображений.

Признаки сжимаемости отображения $B = \{b_{ij}, i, j = \overline{1,n}\}$ различных метриках

1) кубическая метрика

$$\alpha_k(B) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| = ||B||_k < 1$$

Для $x, y \in R_n$

$$\rho(Bx, By) = \max_{1\le i\le n} |\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}y_j| \le$$

$$\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}||x_j - y_j| \le \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}| \max_{1\le j\le n}|x_j - y_j| =$$

$$\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|\rho(x, y)$$

2)октаэдрическая метрика

$$\alpha_o(B) = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|b_{ij}| = ||B||_o < 1$$

Для $x, y \in R_n$

$$\rho(Bx, By) = \sum_{i=1}^{n}|\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}y_j| \le \sum_{i=1}^{n}|\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x_j - y_j)| \le$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|b_{ij}||x_j - y_j| = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|b_{ij}|\sum_{j=1}^{n}|x_j - y_j| =$$

$$\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|b_{ij}|\rho(x, y)$$

3) сферическая метрика

$$\alpha_c(B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|^2 > ||B||_c < 1$$

Для $x, y \in R_n$

$\rho(Bx, By) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}[\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}y_j]^2} =$

$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}[\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x_j - y_j)]^2} \le$

$\{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\}$

$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}[\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2 \sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2]^2} =$

$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2}\rho_c(x, y)$

Методы построения итерационных последовательностей Множество итерационных методов для решения линейных систем можно представить в канонической форме

$B_k\frac{x^{k+1} - x^k}{\tau_k} + Ax^k = f, k = 0, 1, \cdots, x^0 \in R_n$

Здесь A-матрица исходной системы, τ_k - итерационный параметр, $B_k : R_n \to R_n$ - матрица, имеющая обратную B_k^{-1} ($A^{-1}A = E, AA^{-1} = E$)

Опр. Если $B_k = E$ итерационный метод называют явным с канонической формой

$\frac{x^{k+1} - x^k}{\tau_k} + Ax^k = f, k = 0, 1, \cdots, x^0 \in R_n$

в противном случае неявным

Для неявного метода на каждом итерационном шаге необходимо решать относительно x^{k+1} линейную систему

$B_k x^{k+1} = B_k x^k - \tau_k A x^k + f, k = 0, 1, \cdots, x^0 \in R_n$

Отсюда требование - объем вычислений для решения этой системы должен быть не очень большим. Желательно иметь B_k - треугольной.

Опр. Итерационный метод называют стационарным, если $B_k = B, \tau_k = \tau$, в противном случае метод называют нестационарным

1. **Метод простой итерации** (множество вариантов) С помощью невырожденного преобразования С $det(C) \neq 0$ можно описать следующим образом

$Ax = f|C \to 0 = CAx + Cf \to x - x = -CAx - Cf \to$

$x = (E - CA)x + Cf$

И далее к полученному уравнению второго рода применяют принцип сжимающих отображений т.е. строят итерационную последовательность по правилу

$x^{k+1} = (E - CA)x^k + Cf, k = 0, 1, 2 \cdots, x^0 \in R_n$ С достаточными условиями сходимости

$\alpha(E - CA) < 1$

Метод явный $B_k = E$ и стационарный $\tau_k = 1$ Преобразование С выбирают так, чтобы выполнялись достаточные условия сходимости, как правило, это достигается подбором

а) $C = D^{-1}$ где $D = \{d_{ij} = 0, d_{ii} = a_{ii}, i, j = \overline{1, n}\}$

$x^{k+1} = (E - D^{-1}A)x^k + D^{-1}f, k = 0, 1, 2 \cdots, x^0 \in R_n$

или в координатной форме

$x_i = -\frac{a_{i1}}{a_{ii}}x_1 - \cdots - \frac{a_{ii-1}}{a_{ii}}x_{i-1} - \frac{a_{ii+1}}{a_{ii}}x_{i+1} - \cdots - \frac{a_{in}}{a_{ii}}x_n + \frac{f_i}{a_{ii}}$

ß $= \overline{1, n}$

Условия сходимости в кубической метрике:

$\max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1, k \neq i}^{n} |\frac{a_{ik}}{a_{ii}}| < 1$

октаэдрической метрике:

$\max\limits_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1, k \neq i}^{n} |\frac{a_{ik}}{a_{ii}}| < 1$

сферической метрике:

$\sum\limits_{i=1}^{n} \sum_{k=1, k \neq i}^{n} |\frac{a_{ik}}{a_{ii}}|^2 < 1$

а) $C = E$

$x^{k+1} = (E - A)x^k + f, k = 0, 1, 2 \cdots, x^0 \in R_n$

б) $C = \tau E$

$x^{k+1} = (E - \tau A)x^k + \tau f, k = 0, 1, 2 \cdots, x^0 \in R_n$

Пример

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

а)

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + 1 \\ x_2 = -0.5x_1 + 0.5 \end{cases}$$

$$B = E - D_1A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha_k(B) = 1$, $\alpha_j(B) = 1$, $\alpha_c(B) = 1 + 0.25$, т.е. о сходимости процесса

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = -x_2^k + 1 \\ x_2^{k+1} = -0.5x_1^k + 0.5 \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

сказать ничего нельзя б)

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + 1 \\ x_2 = -x_1 - x_2 + 1 \end{cases}$$

$$B = E - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\alpha_k(B) = 2$, $\alpha_j(B) = 2$, $\alpha_c(B) = 3$, т.е. сходимости нет с)

$$\left\{ \begin{array}{r} x_1 = (1-\tau)x_1 - \tau x_2 + \tau \\ x_2 = -\tau x_1 + (1-2\tau)x_2 + \tau \end{array} \right.$$

$$B = E - \tau A = \begin{pmatrix} 1-\tau & -\tau \\ -\tau & 1-2\tau \end{pmatrix}$$

$\alpha_c(B) = (1-\tau)^2 + \tau^2 + \tau^2 + (1-2\tau)^2 = 7\tau^2 - 6\tau + 2 < 1, \rightarrow \frac{3-\sqrt{2}}{7} < \tau \frac{3+\sqrt{2}}{7}$ сходимость имеет место для процесса

$$\left\{ \begin{array}{r} x_1^{k+1} = (1-\tau)x_1^k - \tau x_2^k + \tau \\ x_2^{k+1} = -\tau x_1^k + (1-2\tau)x_2^k + \tau \end{array} \right.$$