

Лекция 5. Нормированные пространства: Линейное пространство X - нормированно, если определено число $\|x\|$ - называемое нормой и удовлетворяющее условиям

- 1) $\|x\| \geq 0, \forall x \in X$
- 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$

Опр Нормой оператора A , согласованной с нормой элемента $x \in X$ пространства в котором действует оператор, называется число

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \rightarrow \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

Проверим аксиомы нормы 3) аксиома тр-ка $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

$$\|A + B\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \leq \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| + \|B\|$$

Имеет место свойства

$$\|ABx\| \leq \|A\| \|Bx\| \leq \|A\| \|B\| \|x\|$$

$$\|A^k x\| = \underbrace{\|A \cdots Ax\|}_k \leq \|A\|^k \|x\| \rightarrow \|A^k\| \leq \|A\|^k$$

Примеры нахождения норм операторов

$$1. X = C_{[a,b]} : Ax = tx, \|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| : A : C_{[a,b]} \rightarrow C_{[a,b]}$$

$$a) \|Ax\| = \max_{a \leq t \leq b} |tx(t)| \leq b \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| = b \|x\| \leq \{\|x\| \leq 1\} = b$$

$$б) \forall x^0 x^0 = 1 \rightarrow \|Ax^0\| = \max_{a \leq t \leq b} |t| = b;$$

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \geq \|Ax^0\| = b$$

Из неравенств а) и б) заключаем, что $\|A\| = b$

$$2. A : R_n \rightarrow R_n, A = \{a_{ij}, i, j = \overline{1, n}\} \|A\| = ?$$

$$2.1. \|A\|_k \text{ -т.е. норма, согласованная с кубической нормой вектора } \|x\|_k = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$$a) \|Ax\|_k = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \max_i |x_i| =$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \|x\|_k \leq \{$$

$$\forall \|x\|_k = 1 \| \leq 1 \} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right|$$

Пусть $\max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right|$ достигается при $i = i_0$

Обозначим вектор $x^0 = \{sign(a_{i_0 j})\}_{j=1}^n$ с $\|x^0\| = 1$

$$\|A\|_k = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \geq \|Ax^0\|_k = \max_i \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0 \right| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Из этого и предыдущего неравенств следует, что $\|A\|_k = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ и совпадает с кубической постоянной сжатия матрицы

2. Октаэдрическая норма матрицы -

$$\|A\|_o = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

3. Сферическая норма матрицы -

$$\|A\|_c = \sqrt{\max_i |\lambda_i(AA^*)|}$$

Опр. Оператор A^* назовем сопряженным к оператору A , если $\forall x, y \in R_n, (Ax, y) = (x, A^*y)$

Опр. Если $A = A^*$ то оператор A называют самосопряженным.

Опр. Оператор A^*A - называют сингулярным по отношению к оператору A , а его собственные числа сингулярными собственными числами оператора A

Оператор $A^*A \geq 0$ и является симметрическим или самосопряженным Действительно, например

$$0 \leq (Ax, Ax) = (x, A^*Ax) \rightarrow A^*A \geq 0$$

следовательно, оператор A^*A - имеет действительные собственные числа

$$\|A\|_c = \sup_{\|x\|_c \neq 0} \frac{\|Ax\|_c}{\|x\|_c} = \sup_{\|x\|_c \neq 0} \sqrt{\frac{(Ax, Ax)}{(x, x)}} = \sqrt{\sup_{\|x\|_c \neq 0} \frac{(A^*Ax, x)}{(x, x)}} = \sqrt{\max_i |\lambda_i(AA^*)|}$$

Пусть λ_i, e_i - собственные числа и собственные вектора оператора B

$$x = \sum_i x_i e_i, (Bx, x) = (B \sum_i x_i e_i, \sum_i x_i e_i) = (\sum_i \lambda_i x_i e_i, \sum_i x_i e_i) = \sum_i \lambda_i x_i^2 \leq \max_i |\lambda_i| \sum_i x_i^2 = \max_i |\lambda_i| (x, x)$$

$$\text{Аналогично } (Bx, x) \geq \min_i |\lambda_i| (x, x) \rightarrow \sup_{x, \|x\| \neq 0} \frac{(Bx, x)}{(x, x)} = \sqrt{\max_i |\lambda_i|} \|A^{-1}\| = \frac{1}{\sqrt{\min_i |\lambda_i|}}$$

Следствие. Если A - симметрический, то $\lambda(A^*A) = \lambda(A^2) = \lambda^2(A) \rightarrow \|A\|_c = \max_i |\lambda_i(A)|, \|A^{-1}\| = (\min_i |\lambda_i(A)|)^{-1}$

Теорема о достаточных условиях сходимости метода простой итерации

$Ax = f \rightarrow x = Tx + \phi, \{x^{k+1}\}_{k=0}^\infty = \{x^{k+1} = Tx^k + \phi\} \rightarrow_{x \rightarrow \infty} x^* = Tx^* + \phi$ если $\|T\| < 1$ Пусть x^* т.р. $x^* \equiv Tx^* + \phi$ тогда

$$\|x^*\| = \|Tx^* + \phi\| \leq \|Tx^*\| + \|\phi\| \leq \|T\| \|x^*\| + \|\phi\|$$

откуда, следует, что

$\|x^*\| \leq \frac{\|\phi\|}{1 - \|T\|}$, если $\phi = 0$, то и $x^* = 0$ и следовательно однородное уравнение $x = Tx$ ($\|T\| < 1$) имеет единственное решение а следовательно и неоднородное уравнение имеет единственное решение

Пусть $r^k = x^k - x^*$

$$x^k = Tx^{k-1} + \phi$$

$x^* = Tx^* + \phi$ Вычитая из первого второе, будем иметь $x^k - x^* = T(x^{k-1} - x^*) \rightarrow \|r^k\| \leq \|Tr^{k-1}\| \leq \|T\| \|r^{k-1}\| \leq \dots \leq \|T\|^k \|r^0\|$ и т.к. $\|T\| < 1 \rightarrow \|r^k\| \rightarrow 0$

Практическое правило оценки погрешности для решения систем $x = Tx + \phi$ итерационными методами

Если $\|x^k - x^{k-1}\| \leq \epsilon \frac{1 - \|T\|}{\|T\|}$ то $\|x^k - x^*\| \leq \epsilon$

Док-во:

$$x^* = Tx^* + \phi$$

$$x^k = Tx^{k-1} + \phi$$

Вычитая из первого равенства второе имеем $x^* - x^k = T(x^* - x^{k-1}) \rightarrow x^* - x^{k-1} + x^{k-1} - x^k = T(x^* - x^{k-1}) \rightarrow$

$$\|x^* - x^{k-1}\| \leq \|x^k - x^{k-1}\| + \|T(x^{k-1} - x^*)\| \leq \|x^k - x^{k-1}\| + \|T\| \|x^{k-1} - x^*\| \rightarrow \|x^* - x^{k-1}\| \leq \frac{\|x^k - x^{k-1}\|}{1 - \|T\|}$$

С другой стороны $x^k - x^* = T(x^k - x^*) \rightarrow \|x^k - x^*\| \leq \|T\| \|x^{k-1} - x^*\| \leq \|T\| \frac{\|x^k - x^{k-1}\|}{1 - \|T\|} \leq \epsilon \rightarrow$ практическое правило

Погрешности в решении линейных систем при приближенном задании матрицы A и правой части

1. Приближенное задание правой части

(1) $Ax = f$ x - решение

(2) $Ax^* = f + \delta f$, x^* - решение $x^* = x + \delta x \rightarrow A(x + \delta x) = f + \delta f$

Вычитая из (2)-(1), будем иметь

$$A\delta x = \delta f \rightarrow \delta x = A^{-1}\delta f \rightarrow$$

$$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta f\|$$

с другой стороны $f = Ax \rightarrow \|f\| \leq \|A\| \|x\|$

перемножая два последних неравенства, будем иметь

$$\|\delta x\| \|f\| \leq \|A^{-1}\| \|A\| \|\delta f\| \|x\| \rightarrow$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \|A\| \frac{\|\delta f\|}{\|f\|}$$

Опр. Число $\|A^{-1}\| \|A\|$ называют числом обусловленности матрицы A и обозначают через $cond(A)$

2. Приближенное задание матрицы A

(1) $Ax = f$ x -решение

(2) $(A + \delta A)x^* = f$, x^* - решение $x^* = x + \delta x \rightarrow (A + \delta A)(x + \delta x) = f$

Из (1) $\rightarrow x = A^{-1}f$

Из (2) $\rightarrow x + \delta x = (A + \delta A)^{-1}f$

Вычитая из второго первое равенство, имеем

$$\delta x = [(A + \delta A)^{-1} - A^{-1}]f$$

Для матриц имеет место тождество

$$C^{-1} - B^{-1} = B^{-1}(B - C)C^{-1}$$

Тогда для δx имеем

$$\delta x = -A^{-1}\delta A(A + \delta A)^{-1}f = -A^{-1}\delta A(x + \delta x) \rightarrow$$

$$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta A\|\|x + \delta x\| = \|A^{-1}\|\|A\|\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\|x + \delta x\|$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq \|A^{-1}\|\|A\|\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

Здесь $\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$ - мера относительной неопределенности в задании коэффициентов системы, число $cond(A) = \|A^{-1}\|\|A\|$ - ограничивает сверху неопределенность в решении системы

Свойства числа $cond(A) = \|A^{-1}\|\|A\|$

1) $cond(A) \rightarrow 1$ т.к. $A^{-1}A = E \rightarrow \|E\| = 1 \leq \|A^{-1}\|\|A\|$

2) Чем больше число обусловленности, тем больше погрешность в решении линейных систем при неопределенном задании коэффициентов матриц и правых частей иными словами число обусловленности характеризует качество системы по отношению к различным ошибкам.

3) Для вырожденных матриц $cond(A) = \infty$ Иногда величину $\frac{1}{cond(A)}$ рассматривают как расстояние от данной матрицы до множества вырожденных матриц

4) Вычислять число обусловленности удобно в сферической норме

$$cond_c(A) = \sqrt{\frac{\max_i |\lambda_i(A^*A)|}{\min_i |\lambda_i(A^*A)|}}$$

Для симметрических (самосопряженных) матриц $cond_c(A) = \frac{\max_i |\lambda_i(A)|}{\min_i |\lambda_i(A)|}$

Пример 1: диагональная матрица $D = \{d_{ii} = 0.1, i = \overline{1, n}\}$

$$cond(D) = \frac{\max_i |d_{ii}|}{\min_i |d_{ii}|} = 1$$

$det(D) = (0.1)^n$ маленькое число для больших n . Пример показывает, что величина детерминанта к обусловленности матриц не имеет ни какого отношения.

Пример 2:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 \cdots - x_n &= -1 \\ x_2 - x_3 \cdots - x_n &= -1 \\ &\dots \\ x_{n-1} - x_n &= -1 \\ x_n &= 1 \end{aligned}$$

Точное решение этой системы линейных уравнений $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0, 1)$ нетрудно получить методом исключения, начиная с последнего уравнения

Допустим, что при в n - компоненте правой части или, что то же самое при вычислении x_n допущена ошибка $\epsilon = 10^{-15}$!!, достаточно маленькая, т.е. $x_n = 1 + \epsilon$. Иными словами, мы решаем систему

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \bar{x}_3 \cdots - \bar{x}_n &= -1 \\ \bar{x}_2 - \bar{x}_3 \cdots - \bar{x}_n &= -1 \\ &\dots \\ \bar{x}_{n-1} - \bar{x}_n &= -1 \\ \bar{x}_n &= 1 + \epsilon \end{aligned}$$

Вопрос, как различаются решения этих двух систем. Заметим, что исходя из жизненного опыта, мы ожидаем небольшое различие.

Итак $|x - \bar{x}| = ?$

Введем обозначения $\bar{x} = x + \delta$, $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) = ?$.

Для нахождения δ составим систему, полученную вычитанием первой из второй

$$\begin{aligned} \delta_1 - \delta_2 - \delta_3 \cdots - \delta_n &= 0 \\ \delta_2 - \delta_3 \cdots - \delta_n &= 0 \\ &\dots \\ \delta_{n-1} - \delta_n &= 0 \\ \delta_n &= \epsilon \end{aligned}$$

Решая ее методом исключения, начиная с последнего получаем $\delta_n = \epsilon, \delta_{n-1} = \delta_n = \epsilon, \delta_{n-2} = \delta_{n-1} + \delta_n = 2\epsilon$ и т.д. $\delta_1 = 2^{n-2}\epsilon$.

Если $\epsilon = 10^{-15}$, $n=102$, $\implies \delta_1 = 2^{100}10^{-15} \simeq 10^{30}10^{-15} = 10^{15}$!!!!

Оценим число обусловленности матрицы заданной системы

$$\text{cond}(A) \geq \frac{\|\delta x\|/\|x\|}{\|\delta f\|/\|f\|}$$

$$\|\delta f\| = \epsilon, \|f\| = 1, \|\delta x\| = 2^{n-2}, \|x\| = 1 \rightarrow \text{cond}(A) \geq \frac{2^{n-2}\epsilon}{\epsilon} = 2^{n-2}$$

Достаточные условия хорошей обусловленности матриц

$$Ax = f \rightarrow x = (E - A)x + f$$

Пусть $\|E - A\| < 1$ тогда матрица A - хорошо обусловлена т.е. ее число обусловленности достаточно мало

$x = A^{-1}f \rightarrow \|x\| \leq \|A^{-1}\|\|f\|$ из определения нормы следует, что существует $f \neq 0$ такое, что неравенство обращается в строгое равенство

$\|x\| \leq \|E - A\|\|x\| + \|f\| \rightarrow \|x\| \leq \frac{\|f\|}{1 - \|E - A\|}$ - которое обращается в строгое равенство только при $f = 0$ Таким образом из последних двух неравенств следует, что

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{\|f\|}{1 - \|E - A\|}$$

$$\|A\| = \|E - (E - A)\| \leq 1 + \|E - A\| \text{ тогда}$$

$$\text{cond}(A) = \|A^{-1}\|\|A\| \leq \frac{1 + \|E - A\|}{1 - \|E - A\|}$$