Лекция 6.

Нахождение максимального и минимального собственных чисел положительной симметрической матрицы

Вспоминаем, что через эти числа вычисляется сферические нормы прямой и обратной матрицы

$(Ax, y) = (x, Ay), (Ax, x) > 0$ -известно, что спектр таких матриц действительный

Пусть имеется задача $Ax = \lambda x$. Предположим, что эта задача имеет полный набор ортонормированных собственных векторов $\{e_k\}_{k=1}^n, \|e_k\|^2 = 1$ и соответствующих им собственных чисел λ_k Предположим, что собственные числа упорядочены т.е.

$\alpha(A) = \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \lambda_n = \beta(A)$

Для нахождения $\beta(A)$ рассмотрим итерационный процесс

$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), x^{k+1} = A\frac{x^k}{\|x^k\|}, \|x^k\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

x^0- произвольный вектор

Для

$x^{k+1} = A\frac{x^k}{\|x^k\|} = A(A\frac{x^{k-1}}{\|x^{k-1}\|})\frac{1}{\|x^k\|} =$ тут внимательно читаем - формула может содержать ошибки, исходный вариант не компилировался$A^2\frac{x^{k-1}}{\|x^{k-1}\|}\|A\frac{x^{k-1}}{\|x^{k-1}\|}\| =$

$\frac{A^2x^{k-1}}{Ax^{k-1}} = \cdots = \frac{A^kx^0}{\|A^{k-1}x^0\|}$ и следовательно

$\lim\limits_{k\to\infty}\|x^{k+1}\| = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{\|A^kx^0\|}{\|A^{k-1}x^0\|}$

$\{e_k\}_{k=1}^n\}$- полный набор, то

$x^0 = \sum_{i=0}^n c_ie_i$, $A^kx^0 = \sum_{i=0}^n c_i\lambda_i^ke_i$,

$A^{k-1}x^0 = \sum_{i=0}^n c_i\lambda_i^{k-1}e_i$ следовательно для достаточно больших k

$A^kx^0 = \beta^kc_ne_n\{1 + O[\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}]^k\}$

$\frac{\|A^kx^0\|}{\|A^{k-1}x^0\|} = \beta(A) + O[\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}]^k$ и следовательно

$\beta(A) = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{\|A^kx^0\|}{\|A^{k-1}x^0\|}$

Если в качестве начального вектора x^0 будет выбран вектор, являющейся линейной комбинацией собственных векторов, отличающихся от $\lambda_n = \beta(A)$, то указанный выше процесс позволяет получить $\beta(A)$ за счет ошибок округления

Для нахождения $\alpha(A) = \lambda_1$ рассмотрим матрицу $B = \beta(A)E - A$ т.к. $A > 0 \to B > 0$ и матрицы B и A имеют общий базис $\{e_k\}_{k=1}^n$ и следовательно

$\beta(B) = \beta(A) - \alpha(A)$

и с помощью аналогичного выше изложенному процессу, мы найдем $\beta(B) = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{\|B^kx^0\|}{\|B^{k-1}x^0\|}$

§5. Критерий окончания итерационного процесса при неточных входных данных.

До сих пор при рассмотрении методов решения линейных систем мы исходили из того, что матрица и правые части нашей системы заданы точно. Однако в практических задачах входные данные т.е. матрица и правая часть линейной системы заданы приближенно и вместо уравнения

$$Ax = f \tag{1}$$

мы имеем дело с уравнением

$$A_hx_h = f_h, \tag{2}$$

где индекс h указывает на приближенность входных данных, которые зависят либо от случайных ошибок или статистических погрешностей, либо погрешностей появляющихся при вычислениях.

Будем предполагать, что ошибки правой части и матрицы A нам известны т.е. заданы оценки вида

$$||(A - A_h)x|| \leq \varepsilon(h), \quad ||f - f_h|| \leq \eta(h) \tag{3}$$

Следовательно, наша задача состоит в решении уравнения (1) имея в распоряжении уравнение (2) и априорную информацию (3). Для решения уравнения (2) используем метод простой итерации

$$x_h^{j+1} = (E - \tau A_h)x_h^j + \tau f_h, \quad x_h^0 = 0, \quad j \to \infty \tag{4}$$

при выполнении условия, обеспечивающего сходимость

$$||q = E - \tau A_h|| \le 1. \tag{5}$$

Заметим, что изложенные ниже результаты без труда распространяются на изложенные выше методы.

Естественно предположить, что при заданных погрешностях коэффициентов матрицы A и правой части f в виде (3) последовательные приближения следует продолжать до тех пор, пока ошибка итерационного процесса не станет приблизительно равной равной ошибке, появляющейся из-за неточности входных данных. Более того, оказывается если матрица A плохо обусловлена и, следовательно, обратная матрица A_h^{-1} может отличаться от обратной матрицы A^{-1} значительно, то продолжение итерационного процесса (4) приводит не к улучшению, а наоборот, к существенному ухудшению результата.

Для нахождения оптимального числа итераций в итерационном процессе (4) при котором происходит согласование погрешностей из-за неточностей входных данных и из-за невозможности провести бесконечное число итераций проведем следующий анализ.

Уравнения (1) и (2) формально разрешим относительно неизвестных x и x_h

$$x = A^{-1}f, \quad x_h = A_h^{-1}f_h. \tag{6}$$

Вычитая из второго первое и проводя тождественные преобразования получим

$$x_h - x = A_h^{-1}(f_h - f + Ax - A_hA^{-1}f) = A_h^{-1}(f_h - f + (A - A_h)x). \tag{7}$$

Из последнего следует

$$||x_h - x|| \le ||A_h^{-1}||(||f_h - f|| + ||(A - A_h)x||), \tag{8}$$

или с учетом априорных оценок (3)

$$||x - x_h|| \le ||A_h^{-1}||(\varepsilon(h) + \eta(h)). \tag{9}$$

Представим уравнение (2) в виде

$$x_h = (E - \tau A_h)x_h + \tau f_h. \tag{10}$$

Вычитая из (10) (4), получим

$$(x_h - x_h^j) = (E - \tau A_h)(x_h - x_h^j). \tag{11}$$

Используя метод математической индукции нетрудно получить

$$x_h - x_h^j = (E - \tau A_h)^j A_h^{-1} f_h = q^j A_h^{-1} f_h. \tag{12}$$

В силу неравенства треугольника имеем

$$||x - x_h^j|| = ||x + x_h - x_h - x_h^j|| \le ||x_hj - x_h|| + ||x_h - x||, \tag{13}$$

откуда с учетом (9) и (12) получаем

$$||x_h - x_h^j|| = ||q||^j ||A_h^{-1}||||f_h|| + ||A_h^{-1}||(\varepsilon(h) + \eta(h)). \tag{14}$$

Первое слагаемое в последнем неравенстве дает оценку погрешности итерационного процесса (6), а второе слагаемое оценивает погрешность за счет неточностей правой части и матрицы A.

Требуя равенства этих погрешностей получим уравнение для номера итерации j_0 на которой следует закончить итерационный процесс

$$j_0 = \frac{1}{\ln q} \ln \frac{(\varepsilon(h) + \eta(h))}{||f_h||} \tag{15}$$

Следует отметить, что в формуле (15) отсутствует норма обратного оператора, что существенно упрощает вычисление оптимального числа итераций.

Регуляризирующие алгоритмы

Пусть система $Ax = f$ имеет точное решение x^* и пусть далее вместо точного значения правых частей известно ее приближенные значения $f_\delta(A_\delta) : \|f_\delta - f\| \le \delta, \|A_\delta - A\| \le \delta$ тогда регуляризирующим алгоритмом назовем оператор R, ставящий в соответствие паре $(f_\delta, \delta), (A_\delta, \delta)$ элемент x_δ такой, что $x_\delta \to x^*$ при $\delta \to 0$

Пример: $Ax = f$ -A—симметрическая, неотрицательная. Вместо данной системы рассмотрим систему

$(A+\alpha E)x = f$ т.к. $A > 0$- симметрическая, то собственные числа λ_k матрицы A - действительные. Пусть $\lambda_k > 0$ а $\{e_k\}_{k=1}^n$- собственные вектора матрицы A, $\|e_i\|^2 = (e_i, e_i) = 1$

$(e_i, e_j) = 0, i \ne j$

Найдем решение уравнения $Ax = f$- методом Фурье. Представим

$f = \sum_{i=1}^n f_i e_i, \|e_j \to f_i = (f, e_i)$

$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ подставим в исходное уравнение

$A\sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n f_i e_i, \to \sum_{i=1}^n x_i A e_i = \sum_{i=1}^n f_i e_i \to \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i = \sum_{i=1}^n f_i e_i \ \sum_{i=1}^n (x_i\lambda_i - f_i)e_i = 0 \to x_i\lambda_i = f_i, x_i = \frac{f_i}{\lambda_i} = \frac{(f_i, e_i)}{\lambda_i} \to$

$x = \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{\lambda_i} e_i = \sum_{i=1}^n \frac{(f, e_i)}{\lambda_i} e_i$

Аналогично решая уравнение $(A + \alpha E)\underline{x} = f$, получаем $\underline{x} = \sum_{i=1}^n \frac{(f, e_i)}{\lambda_i + \alpha} e_i$

Сравнивая решения, видим, что

$|\underline{x} - x| \sim |\frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_i + \alpha}| = |\frac{\alpha}{\lambda_i(\lambda_i + \alpha)}| \to 0 \to \alpha \to 0$

1) Видим, что введение α не существенно изменяет решение нашей системы

2) Видим, что существенную погрешность в решение вносят члены с малыми $\lambda_i, \frac{1}{\lambda_i} -$, в то же время множитель для малых λ_i $\frac{1}{\lambda_i + \alpha} << \frac{1}{\lambda_i}$ и следовательно регуляризованная система $(A+\alpha E)x = f$ лучше обусловлена, чем исходная