

Теорема. Если  $f(x)$  непрерывна вместе с производными  $f', f''$  в некотором замкнутом шаре  $S(x_0, r)$  и выполнены условия:

1) в точке  $x \in S(x_0, r)$  существует  $(f')^{-1}$  и  $\|(f')^{-1}\| < M_0$ .

2)  $\|f(x_0)\| \leq \delta$ ,

3)  $\sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k} \right| < M_2, \quad \forall i, j = \overline{1, n}, \quad \forall x \in S(x_0, r)$

4)  $h = 2nM_0^2\delta M_1 \leq 1$

5)  $r' = M_0\delta \sum_{k=0}^{\infty} h^{2^k-1} < r$

Тогда уравнение  $f(x) = 0$  имеет решение  $x^* \in S(x_0, r)$  к которому сходится процесс Ньютона с начальным приближением  $x_0$  и имеет место оценка

$$\|x^k - x^*\| \leq M_0\delta \frac{h^{2^k-1}}{1-h^{2^k}}$$

Проверять условия теоремы затруднительно и имеет значение утверждение, что при приближении к корню системы скорость сходимости квадратична.

На практике очень часто процесс Ньютона заменяют процессом Ньютона-Рафсона

$x^{k+1} = x^k - (f(x_0)')^{-1}f(x^k)$ , в котором матрицу Якоби обращают один раз и тем самым уменьшают объем вычислений. Есть и другие модификации.