Рис. 1: $x = \varphi(x), \quad 0 < \varphi' < -1$

Численные методы решения нелинейных систем

$f(x) = 0, x = (x_1, \dots, x_n), f = (f_1, \dots, f_n)$ Как и в случае линейных систем отсутствует единый алгоритм нахождения корней и более того, как правило, нет единственности. 1. Скалярное уравнение $f(x) = 0$

т. Если 1) $f(x) \in C^2_{[a,b]}$

2) $f(a)f(b) < 0$

3) $f \ll 0$ или $f'' > 0$

тогда уравнение $f(x) = 0$ имеет единственное решение

Наиболее надежными и действенными методами в этом случае

а) метод деления отрезка пополам, т.е. отделения отрезка $[a_1, b_1] \in [a, b]$, содержащего корень уравнения пользуясь правилом $c_1 = \frac{b-a}{2}, f(c_1)f(a) < 0 \to a_1 = a, b_1 = c_1, f(c_1)f(a) > 0, a_1 = c_1, b_1 = b$ $\to |c_n - x^*| < \frac{|b-a|}{2^{n+1}}$

б) метод хорд

В этом случае точка c выбирается как точка пересечения хорды, соединяющей точки $(a, f(a))$,$(b, f(b))$ с осью абсцисс т.е.

$c_n = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{b_n - a_n}$

Заметим, что правило нахождения точки c можно задавать и другими способами.

В реализации же наиболее простыми методами являются все же итерационные методы, основанные на принципе сжимающих отображении

т. Если отображение $\varphi(x)$ на некотором отрезке $R = \{|x - x_0| < r\}$ удовлетворяет

а) условию Липшица $\forall x', x'' \in R \ |\varphi(x') - \varphi(x'')| \le \alpha |x' - x''|$ с постоянной α, удовлетворяющей условию $0 < \alpha < 1$

б) в точке x_0 имеет место неравенство

$|x_0 - \varphi(x_0)| \le (1 - \alpha) r$,

тогда на отрезке R уравнение $x = \varphi(x)$ имеет единственный корень $x = x^*$, который может быть найден как предел последовательности построенной по рекуррентному правилу $x^{k+1} = \varphi(x^k), x^0 \in R$ и имеет место оценка

$|x^k - x^*| \le \frac{\alpha}{1-\alpha} |x^k - x^{k-1}|$, которая фактически является критерием окончания итерационного процесса для нахождения решения с заданной точностью.

Док-во:

а)Покажем, что отображение $\varphi : R \to R$. Пусть $x \in R$, тогда $|\varphi(x) - x_0| = |\varphi(x) \pm \varphi(x_0) - x_0| \le |\varphi(x) - \varphi(x_0)| + |\varphi(x_0) - x_0| \le \alpha |x - x_0| + (1 - \alpha) r \le r$

б) покажем, что отображение φ сжимающее т.е. $\forall x, y \in R, |\varphi(x) - \varphi(y)| \le \alpha |x - y|$ - фактически это условие Липшица. И следовательно из принципа сжимающих отображений следует сходимость последовательности $\{x^{k+1} = \varphi(x^k)\} \to_{k \to \infty} x^* = \varphi(x^*)$

в) критерий окончания:

$x^k = \varphi(x^{k-1} \ x^* = \varphi(x^*)$, вычитая из второго равенства первое будем иметь

$|x^* - x^k| = |\varphi(x^*) - \varphi(x^{k-1}| \le \alpha |x^* - x^{k-1}|$, с другой стороны $|x^* - x^{k-1}| = |\varphi(x^*) - x^{k-1} + x^k - x^k| = |\varphi(x^{k-1})| \le |x^k - x^{k-1}| + |\varphi(x^*) - \varphi(x^{k-1})| \le |x^k - x^{k-1}| + \alpha |x^* - x^{k-1}| \to$

$|x^* - x^{k-1}| \le \frac{|x^k - x^{k-1}|}{1-\alpha}$

$|x^* - x^k| \le \alpha |x^* - x^{k-1}| \le \frac{\alpha}{1-\alpha} |x^k - x^{k-1}|$, таким образом из неравенства

$|x^k - x^{k-1}| \le \frac{1-\alpha}{\alpha} \epsilon \to |x^* - x^k| \le \epsilon$

Замечание: неравенство Липшица выполнено если $|\varphi'| \le \alpha < 1$, следствие формулы конечных приращений Лагранжа.

Геометрическая интерпретация:

Пример: $x = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}), x^* = \sqrt{x}, a \in (0.5, 1), R = [a, 1], x^0 = \frac{1+a}{2}, r = \frac{1-a}{2}, \varphi(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}), \alpha = ?, \alpha = \max_{x \in [a,1]} |\varphi'(x)| = \max_{x \in [a,1]} |\frac{1}{2}(1 - \frac{a}{x^2})| = \frac{1-a}{2a} \le \frac{1}{2}$,

Рис. 2: $x = \varphi(x), \quad -1 < \varphi' < 0$

$|x^0 - \varphi(x^0)| = |\frac{1+a}{2} - \frac{1}{2}(\frac{1+a}{2} + \frac{2a}{1+a}| = \frac{1}{4}\frac{(1-a^2)}{1+a} = \frac{1-a}{2}\frac{1}{2} = r(1-r)$

Метод Ньютона. Уравнение $f(x)$ представим в виде: $x = x + \lambda f(x), \lambda \neq 0$ и построим последовательность по методу простой итерации $x^{k+1} = x^k + \lambda f(x^k) = \varphi(x^k)$, скорость сходимости будет тем выше, чем меньше $|\varphi' = 1 + \lambda f'(x)|$. Выберем λ из условия $\varphi' = 1 + \lambda f' = 0$, на к-шаге. Следовательно $\lambda = -\frac{1}{f'(x^k)}$

$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$. Итерационный процесс, построенный по этому правилу называют методом Ньютона. Метод имеет простую геометрическую интерпретацию: в точке x^0 к функции $f(x)$ проводим касательную, уравнение которой есть $y = f(x^0) + (x - x^0)f'(x^0)$ и x^1 выбираем из условия пересечения касательной с осью абсцисс. В результате будем иметь $x^1 = x^0 - \frac{f(x^0)}{f'(x^0)}$ и т.д. Геометрически каждый раз мы заменяем отрезок дуги кривой касательной и нахождению точки ее пересечения с осью абсцисс. Из рисунка видно, что последовательность, построенная таким образом сходится к корню уравнения $f(x) = 0$ для выпуклых функций причем монотонно.

Скорость сходимости метода Ньютона.

Опр. Будем говорить, что итерационный процесс сходится к x^* со скоростью "p если имеет место оценка $|x^k - x^*| \leq \alpha |x^* - x^{k-1}|^p, 0 < \alpha < 1$.

Пусть $x*-$ точное решение уравнения $f(x^*) \equiv 0$. Обозначим через ω интервал концами которого являются точки x^0иx^*. Тогда

1) $|f(x^{k-1})| = |f(x^*) - f(x^{k-1})| =$

из формулы конечных приращений Лагранжа =

$f'(\xi)|x^* - x^{k-1}| \geq \min_{\xi\in\omega}|f'||x^* - x^{k-1}|, m_1 = \min_{\xi\in\omega}|f'(\xi)|$

2) $|x^k - x^{k-1}| = |\frac{f(x^{k-1})}{f'(x^{k-1})}| \geq \frac{m_1}{M_1}|x^* - x^{k-1}|, M_1 = \max_{\xi\in\omega}|f'(\xi)|$

3) $|x^* - x^{k-1}| = |x^* - x^k + x^k - x^{k-1}| =$ в силу монотонности последовательности $= |x^* - x^k| + |x^k - x^{k-1}| \to$

$|x^* - x^k| = |x^* - x^{k-1}| - |x^k - x^{k-1}| \leq |1 - \frac{m_1}{M_1})|x^* - x^{k-1}|$, в силу определения постоянных m_1, M_1, $0 < \alpha = (1 - \frac{m_1}{M_1}) < 1$ и следовательно процесс Ньютона сходится к x^*. Покажем, что скорость сходимости процесса Ньютона будет квадратичной в окрестности x^*. Используя формулу Тейлора в окрестности т x^{k-1} имеем $f(x^*) = f(x^{k-1}) + f'(x^{k-1})(x^* - x^{k-1}) + \frac{f''(\xi)}{2}(x^* - x^{k-1})^2, \xi \in \omega \to x^* = x^{k-1} - \frac{f(xk-1)}{f'(x^{k-1})} - (x^* - x^{k-1})^2 \frac{f''(\xi)}{2f'(x^{k-1})}$ Вычитая это равенство из $x^k = x^{k-1} - \frac{f(xk-1)}{f'(x^{k-1})}$ будем иметь $x^k - x^* = (x^* - x^{k-1})^2 \frac{f''(\xi)}{2f'(x^{k-1})} \to$,что $|x^k - x^*| = |x^* - x^{k-1}|^2 |\frac{f''(\xi)}{2f'(x^{k-1})}| \leq \frac{M_2}{2m_1}|x^* - x^{k-1}|, M_2 = \max_{\xi\in\omega}|f''(\xi)|$. Обозначим $\beta = \frac{M_2}{2m_1} =? < 1$. Умножим последнее равенство на β в результате будем иметь $\beta|x^k - x^*| \leq \beta^2 |x^* - x^{k-1}|^2$, откуда следует, что в силу сходимости процесса, начиная с некоторого номера сходимость будет квадратичной. пример: $f(x) = x^2 = 0, x^* = 0$ $x^k = x^{k-1} - \frac{f(x^{k-1})}{f'(x^{k-1})} = x^{k-1} - \frac{(x^{k-1})^2}{2x^{k-1}} = \frac{1}{2}x^{k-1} \to_{k\to\infty} 0$

метод простой итерации в этом случае:

$x^{k+1} = x^k - (x^k)^2$ и если $|\varphi' = (1 - 2x)| < 1$ то процесс будет сходится.

Системы нелинейных алгебраических уравнений

$f(x) = 0, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad f = (f_1, \ldots, x_n)$, $x \in R_n$,$\rho = ||x - y||$,Мн-во: $S(x_0, r) = \{x : ||x - x_0|| \leq r\}$- назовем замкнутым шаром радиуса r с центром в точке x_0. Заметим, что любой замкнутый шар в R_n- образует полное метрическое пространство. Как и в случае скалярного уравнения исходное уравнение приведем к виду

$$x = \varphi(x), \quad \varphi(x) = x - f(x)$$

Теорема. Пусть на замкнутом шаре $S(x_0, r)$ задана вектор функция $\varphi(x)$ удовлетворяющая условиям

1) $\forall x, y \in S, \quad ||\varphi(x) - \varphi(y)|| \leq \alpha ||x - y||, \quad 0 < \alpha < 1$

2) $||\varphi(x)-\varphi(y)|| \le (1-\alpha)r$,

тогда в замкнутом шаре $S(x_0, r)$ существует единственная неподвижная точка x^* отображения φ, т.е. решение уравнения $x^* = \varphi(x^*)$, а последовательность $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ образованная по рекуррентному правилу $x^k = \varphi(x^{k-1})$ сходится к x^* для любого $x^0 \in S$ и имеет место оценка

$$||x^* - x^k|| \le \frac{\alpha}{1-\alpha}||x^* - x^k||$$

Док-во теоремы проводится аналогично док-ву теоремы для скалярного уравнения с заменой символа $|.| \to ||.||$

Замечание. Пусть $x, y \in S(x_0, r)$ и отображение φ дифференцируемо, тогда имеет место формула конечных приращений Лагранжа

$$\varphi_i(x) - \varphi_i(y) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i(\xi)}{\partial x_j}(x_j - y_j), \quad \forall i = \overline{1,n}, \quad \xi \in S(x_0, r)$$

Обозначая

$$\varphi' = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \dots \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \dots \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2} & \dots \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

матрица Якоби И имея ввиду, что из формулы Лагранжа следует неравенство

$$||\varphi(x) - \varphi(y)|| \le ||\varphi'||||x-y||$$

в качестве $\alpha = ||\varphi'||$

Метод Ньютона

Пусть

$$f' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

матрица Якоби для вектор функции $f = (f_1, \dots, f_n$ и пусть далее $\det(f') \ne 0$ и существует обратная матрица $(f')^{-1}$ тогда процесс

$$x^{k+1} = x^k - (f')^{-1} f(x^k)$$

называют процессом Ньютона для решения уравнения $f(x) = 0$

Удобнее процесс Ньютона записать в форме

$$x^{k+1} = x^k + p^k,$$
$$f'(x^k)p^k = -f(x^k)$$

Имеет место теорема

Теорема. Если $f(x)$ непрерывна вместе с производными f', f'' в некотором замкнутом шаре $S(x_0, r)$ и выполнены условия:

1) в точке $x_{\in}S(x_0, r)$ существует $(f')^{-1}$ и $||(f')^{-1}|| < M_0$.

2) $||f(x_0)|| \le \delta$,

3)$\sum_{k=1}^{n} |\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}) < M_2, \quad \forall i, j = \overline{1,n}, \quad \forall x \in S(x_0, r)$

4) $h = 2nM_0^2\delta M_1 \le 1$

5) $r' = M_0\delta\sum_{k=0}^{\infty} h^{2^k-1} < r$

Тогда уравнение $f(x) = 0$ имеет решение $x^* \in S(x_0, r)$ к которому сходится процесс Ньютона с начальным приближением x_0 и имеет место оценка

$$||x^k - x^*|| \leq M_0\delta\frac{h^{2^k-1}}{1-h^{2^k}}$$

Проверять условия теоремы затруднительно и имеет значение утверждение, что при приближении к корню системы скорость сходимости квадратична.

На практике очень часто процесс Ньютона заменяют процессом Ньютона-Рафсона

$x^{k+1} = x^k - (f(x_0)')^{-1}f(x^k)$, в котором матрицу Якоби обращают один раз и тем самым уменьшают объем вычислений. Есть и другие модификации.