Лекция 9. **Дискретизация функциональных пространств** Пусть $f \in H_{[a,b]}$, H- метрическое пространство с метрикой $\rho(x,y) = \|x-y\|$, $f^n = (f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \cdots, f_n^{(n)}) \in R_n$ Для представления элемента $f \in H_{[a,b]}$ элементом $f^n \in R_n$ метрическое пространство $H_{[a,b]}$ заменим последовательностью конечномерных пространств $\{R_k\}_{k=1}^{\infty}$

Опр. Оператор $T_n : H_{[a,b]} \to R_n, T_n H_{[a,b]} = R_n (T_n f = f^n)$ назовем оператором проектирования. Элементы $f^n \in R_n$- будем называть элементами, аппроксимирующими элементы f пространства $H_{[a,b]}$

Таким образом поставленная задача называется задачей дискретизации прстрантсва $H_{[a,b]}$

Близость элементов $f^n \in R_n$ к элементам $f \in H_{[a,b]}$ будем оценивать числом $\rho(f^n, T_n f) = \|f^n - T_n f\|_{R_n}$

Опр. Говорят, что последовательность $\{f^k\}_{k=1}^{\infty}$ T_n - сходится к элементу $f \in H_{[a,b]}$, если

$\rho(f^n, T_n f) = \|f^n - T_n f\|_{R_n} \to_{n\to\infty} 0$ Вообще говоря, предел $T_n f$ последовательности не единствен.

Опр. Говорят, что норма в пространстве R_n согласована с нормой в пространстве $H_{[a,b]}$, если

$\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n x\| = \|x\|_{H_{[a,b]}}$

При согласованности норм предел последовательности единственный.

Пример: 1) $H_{[a,b]} = C_{[a,b]}$,

множество $\omega_n = \{x_i^{(n)} : a \le x_0^{(n)} \le \cdots \le x_n^{(n)}\}$ -будем называть сеткой интервала $[a,b]$ и писать $[a,b] \to \omega_n$, если $x_i^{(n)} = a + ih, h = \frac{b-a}{n}, i = \overline{0,n}$ сетку ω_n -будем называть равномерной.

Вектор $(f_0^{(n)}, f_1^{(n)}, \cdots, f_n^{(n)})$ -называют сеточной функцией сетки ω_n.

Оператор проектирования зададим формулой $T_n f = \{f(x_k^{(n)}\}_{k=0}^{n} = f^n$- вектор пространства R_n

$\lim n \to \infty \max 0 \le i \le n |f(x_i^{(n)})| = \max a \le x \le b |f(x)|$

Согласованность имеет место, если $\max\limits_i |x_{i+1} - x_i| \to \lim\limits_{n\to\infty} 0$

$\{f(x_k^{(n)}\}_{k=0}^{\infty} \to T_n f, \rho(T_n f, f^n) = \max\limits_{0\le i\le n-1} |f_i - f(x_i^{(n)}| \to_{n\to\infty} 0$

2) $H_{[a,b]} = L^2_{[a,b]}$

$T_m f = \{ \frac{1}{2h} \int_{x_i-h}^{x_i+h} f(x) dx$

Задача интерполяции: Пусть на отрезке $[a,b]$ задана сетка $\omega_n = \{x_i^{(n)} : a \le x_0^{(n)} \le \cdots \le x_n^{(n)}\}$ и определена сеточная функция $f^n = (f_0^{(n)}, f_1^{(n)}, \cdots, f_n^{(n)})$ Пусть задан оператор проектирования $T_I F^n = f^I \in H_{[a,b]}$т.е. поставлена задача обратная задаче дискретизации. При этом выполнены условия, что

$f^I(x_i) = f_i, i = \overline{0,n}$

Тогда, поставленную таким образом задачу называют задачей интерполяции.

Заметим, что задача интерполяции имеет множество решений (если не оговорены дополнительные условия) даже в заданном классе функций. (поясняющий рисунок)

Пример: $H_{[a,b]} = C^m_{[a,b]}$

$f_k = f^I(x_k^{(n)}, k = \overline{0,n}$

Оператор проектирования можно построить множеством способов

1)$f^I(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k F_k(x)$, где $F_1(x), F_2, \cdots, F_k$ система линейно независимых функций на интервале $[a,b]$

а) $F_k(x) = x^k$

б) $F_k(x) = \{sin(kx), cos(k,x)\}$

С алгоритмической точки зрения наиболее удобны многочлены Лагранжа

$F_k(x) = l_k(x)^n = \prod\limits_{i=0, i\ne k}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i} =$

$\frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$

Многочлены Лагранжа обладают удобным свойством ортогональности

$$l_k^n(x_i) = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \ne k \end{cases}$$

которое помогает легко найти интерполянту Лагранжа

$\sum_{k=1}^{n} C_k l_k^n(x_i) = f_i, \to C_k = f_k$

$f^L(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k l_k^n(x)$

Если класс функций где ищется интерполянта задан, то можно найти и меру отличия полученной интерполянты от искомой функции.

Например: если $f \in C_{[a,b]}^{n+1}$ то $f(x) - f^L(x) = \frac{f^{n=1}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=1}^{n}(x - x_i), \xi \in [a, b]$

Заметим, что мера отличия - неустранимая есть погрешность при заданном n.

Рисунок

Сплайн-интерполяция Сплайном называют интерполянту сеточной функции, которая с несколькими своими производными непрерывна на интервале $[a, b]$ и на каждом частичном интервале $[x_i, x_{i+1}] \in [a, b]$ сетки ω_n является алгебраическим многочленом. Максимальную степень многочлена называют степенью сплайна

$\{f_i\}_{i=0}^n \in R_n \to^T f^T \in C_{[a,b]}^m$

На практике наибольшее распространение получили линейные и кубические сплайны

Построение кубического сплайна $S_3(x)$

$\{f_i\}_{i=0}^n \in R_n \to^T S_3(x) \in C_{[a,b]}^2$

$S_3(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^2, \forall x \in [x_i, x_{i+1}]$

Уравнения для нахождения коэффициентов $a_, b_i, c_i, d_i$ получаются из условий

1) $S_3(x_i) = f_i, i = \overline{0, n}$ Всего $n + 1-$ условие

2)$S_3(x_i - 0) = S_3(x_i + 0) i = \overline{0, n-1}$ Всего $n - 1-$ условие

3) $S_3'(x_i - 0) = S_3'(x_i + 0) i = \overline{0, n-1}$ Всего $n - 1-$ условие

4) $S_3''(x_i - 0) = S_3''(x_i + 0) i = \overline{0, n-1}$ Всего $n - 1-$ условие

5) $S_3{}''(a) = S_3''(b) = 0$ два дополнительных условия, смысл которых обсудим позднее. Таким образом для определения $4n$ неизвестных коэффициентов $a_, b_i, c_i, d_i$ имеем $n + 1 + (n - 1) + (n - 1) + (n - 1) + 2 = 4n$- условий.

Покажем, что поставленная задача разрешима и хорошо обусловлена. Для построения кубического сплайна видоизменим алгоритм его построения. Заметим, что

$S_3{}''(x) = m_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + m_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i}$

Здесь m_i- коэффициенту подлежащие определению, а $h_i = x_i - x_{i-1}$, $m_k = S_3^{''}(x_k)$ Проинтегрируем два раза $S_3{}''(x)$. В результате будем иметь

$S_3(x) = m_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + m_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i \frac{x_i - x}{h_i} + B_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i}$

где A_i, B_i - постоянные интегрирования. Из условий

$S_3(x_i) = f_i \to m_i \frac{h_i^2}{6} + B_i = f_i$

$S_3(x_{i-1}) = f_{i-1} \to m_{i-1}\frac{h_i^2}{6} + A_i = f_{i-1}$

$S_3(x) = m_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + m_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i}$

$+(f_{i-1} - \frac{m_{i-1}}{6} h_i^2)\frac{x_i - x}{h_i} + (f_i - \frac{m_i}{6} h_i^2)\frac{x - x_{i-1}}{h_i}$

Из последнего равенства следуют равенства, что

$S_3'(x) = -m_{i-1}\frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + m_i \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{m_i - m_{i-1}}{6} h_i$

$S_3'(x_i - 0) = \frac{h_i}{6} m_{i-1} + \frac{h_i}{3} m_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}$

$S_3'(x_i + 0) = -\frac{h_{i+1}}{3} m_i + \frac{h_{i+1}}{6} m_{i+1} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}}$

Из условий непрерывности первой производной $S_3'(x)$ в точках $(x_1, \cdots, x_{n-1}$ получаем $n - 1$-уравнение для определения коэффициентов m_i

$\frac{h_i}{6} m_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3} m_i + \frac{h_{i+1}}{6} m_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}$

$i = \overline{1, n-1}$

Из условий равенства нулю в точках a и второй производной, имеем

$m_0 = 0$ $m_n = 0$

Таким образом, для определения $n + 1$- коэффициентов $m_0, m_1, \cdots, m_n$ имеем систему алгебраических уравнений с матрицей ленточного типа, причем диагональный коэффициент преобладает над суммой под диагонального и над диагонального и следовательно для решения этой системы может быть использован метод прогонки.

Экстремальное свойство кубического сплайна Рассмотрим задачу отыскания интерполянты сеточной функции из класса $W^2_{2[a,b]}$ минимизирующую функционал

$J[u] = \int_a^b [u''(x)]^2 dx$

W_2^2- класс функций суммируемых вместе со второй производной. Утверждается, что функция минимизурующая такой функционал - кубический сплайн.

Рассмотрим

$J[u(x) - S_3(x)] = \int_a^b [u''(x) - S_3{}''(x)]^2 dx = J[u] - J[S_3] - 2\int_a^b (u^{''}(x) - S_3{}''(x)) S_3{}''(x) dx =$ инт. по частям $= J[u] - J[S_3] - 2[(u' - S_3')S_3{}''|_a^b - \int_a^b (u'(x) - S_3{}'(x)) S_3{}'''(x) dx] = \{S_3{}''(a) = S_3{}''(b) = 0\} = J[u] - J[S_3] + 2\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (u'(x) - S_3{}'(x)) S_3{}''' dx$

$S_3{}''' = C_k$- постоянные на интервале $[x_{k-1}, x_k]$, и следовательно

$J[u - S_3] = J[u] - J[S_3] + 2\sum_{k=1}^n C_k (u - S_3)|_{x_{k-1}}^{x_k} = \{$ в узлах сетки т.к. u - интерполянта $u(x_k) = S_3(x_k) = y_k\} = J[u] - J[S_3] \rightarrow$

$J[S_3] = J[u] - J[u - S_3] \leq J[u]$ для любой функции $u \in W_2^2, u(x_k) = y_k, k = \overline{0,n}$. Таким образом минимум функционала $J[u] = \int_a^b [u''(x)]^2 dx$ достигается на кубическом сплайне.

Второе определение кубического сплайна. Функцию из класса $W_2^2[a,b]$ которая принимает в узлах сетки ω_n заданные значения и минимизирует функционал $J[u] = \int_a^b [u''(x)]^2 dx$ называют кубическим сплайном.

С физической точки зрения указанный функционал интерпретируется как аналог потенциальной энергии упругого стержня закрепленного в точках (x_i, y_i) и кубический сплайн реализует минимум этой энергии.

Имеет место следующая теорема. Если функция $f(x) \in C^k_{[a,b]}, k = \overline{0,4}$ то имеет место оценка

$\max\limits_{a \leq x \leq b} |f^{(p)}(x) - S_3^{(p)}| \leq C h^{k-p}, k \geq p$

где $C > 0$- постоянная не зависящая от $h = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|$

Иными словами, если имеется априорная информация о классе востанавливаемых из сеточной функции функций, то можно указать степень погрешности восстановленной функции.