Лекция 14.

Системы дифференциальных уравнений. Задача Коши. Задача Коши в общем случае заключается в нахождении решения системы уравнений с условиями

$$\begin{cases} \frac{du_k}{dt} = f_k(t, u_1, ..., u_n), \\ t \in [0,T], f_k \in C_G, u_k(0) = u_k^0, \\ G = \{t, u_1, ..., u_n) : t \in [0,T], \\ |u_k - u_k^0| \le U\}, k = \overline{1,N} \end{cases}$$

Решение которой на сетке $\omega_n = \{t_i, t_i = i\tau, i = \overline{0,n}\tau = T/n\}$ эквивалентно решению системы интегральных уравнений

$$\begin{cases} u_k(t_{i+1}) = u(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_k(t, u_1(t), ..., u_n(t))dt \\ k = \overline{1,N}, i = \overline{0,n-1} \\ u_k(0) = u_k^0 \end{cases}$$

Заменяя вычисление интеграла в этой системе квадратурной формулой будем иметь алгоритм для решения задачи Коши

$$\begin{cases} u_k^{i+1} = u_k^i + \tau \sum_{j=1}^M C_j^M f_j^M, \\ k = \overline{1,N}, i = \overline{0,n-1} \\ u_k^0 = u_k^0 \end{cases}$$

Простейшие схемы:

а) Явная схема Эйлера

$$\begin{cases} u_k^{i+1} = u_k^i + \tau f_k(t_i, u_1^i, \ldots, u_N^i), \\ k = \overline{1,N}, i = \overline{0,n-1} \\ u_k^0 = u_k^0 \end{cases}$$

б) Неявная схема Эйлера

$$\begin{cases} u_k^{i+1} = u_k^i + \tau f_k(t_{i+1}, u_1^{i+1}, \ldots, u_N^{i+1}), \\ k = \overline{1,N}, i = \overline{0,n-1} \\ u_k^0 = u_k^0 \end{cases}$$

в) Схема Роте с весами

$$\begin{cases} u_k^{i+1} = u_k^i + \tau((1-\sigma) f_k(t_i, u_1^i, \ldots, u_N^i) + \sigma f_k(t_{i+1}, u_1^{i+1}, \ldots, u_N^{i+1})), \\ 0 \le \sigma \le 1, \quad k = \overline{1,N}, i = \overline{0,n-1} \\ u_k^0 = u_k^0 \end{cases}$$

с) Схема предиктор-корректор

$$\begin{cases} u_k^{i+1} = u_k^i + \tau((1-\sigma) f_k(t_i, u_1^i, \ldots, u_N^i) + \sigma f_k(t_{i+1}, u_1^*, \ldots, u_N^*)), \\ u_k^* = u_k^i + \tau f_k(t_i, u_1^i, \ldots, u_N^i), \\ 0 \le \sigma \le 1, \quad k = \overline{1,N}, i = \overline{0,n-1} \\ u_k^0 = u_k^0 \end{cases}$$

Устойчивость.

Достаточно рассмотреть линеаризованную систему

$$\begin{cases} \frac{dz_k}{dt} = \sum_{j=1}^N a_{jk} z_j + f_k(t), \\ u_k(0) = u_k^0, \quad k = \overline{1,N} \end{cases}$$

или в векторной форме

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = Az + f(t), \\ u(0) = u^0, \end{cases}$$

Если $(Ax,x) > 0, \forall x$ и $\lambda = max_i(\lambda_i(A))$ тогда $||z|| \leq e^{\lambda t}||u^0||$

а) устойчивость явной схемы Эйлера

$$\begin{cases} z^{i+1} = z^i - \tau A z^i + \tau f(t_i), \\ z^0) = z^0, \quad i = \overline{0, n-1} \end{cases}$$

$$||E - \tau A|| < 1$$

б) устойчивость схемы Роте для $\sigma = 1/2$

$$\begin{cases} z^{i+1} = z^i - \frac{\tau}{2}(Az^i + Az^{i+1} + \frac{\tau}{2}(f(t_i) + f(t_{i+1}), \\ z^0) = z^0, \quad i = \overline{0, n-1} \end{cases}$$

$$||(E + \frac{\tau}{2}A)^{-1}(E - \frac{\tau}{2}A)|| < 1$$

Каноническая двухслойная разностная схема

$$\begin{cases} B\frac{z^{i+1} - z^i}{\tau} + Az^i + \varphi_i, \\ z^0) = z^0, \quad i = \overline{0, n-1} \quad A, B : R_N \to R_N \end{cases}$$

Устойчивость канонической разностной схемы

Каноническую схему представим в виде для $z = y + u$

$$\begin{cases} B\frac{y^{i+1} - y^i}{\tau} + y^i, \\ y^0) = y^0, \quad i = \overline{0, n-1} \quad A, B : R_N \to R_N \end{cases}$$

$$\begin{cases} B\frac{u^{i+1} - u^i}{\tau} + Au^i + \varphi_i, \\ u^0) = 0, \quad i = \overline{0, n-1} \quad A, B : R_N \to R_N \end{cases}$$

Определение. Каноническая схема устойчива по начальным данным, если имеет место оценка

$$||y||_{R_N} < M_1||y_0||_{R_N},$$

где $_1$- постоянная, независящая от τ

Определение. Каноническая схема устойчива по правой части, если имеет место оценка

$$||u||_{R_N} < M_2||\varphi||_{R_N},$$

где $_2$- постоянная, независящая от τ

В пространстве R_N где действуют операторы A, B введем скалярное произведение $(x,y)_{R_N} = (Ax, y)_{R_N}$, соответственно $||x|| = \sqrt{(}Ax, x)$ - энергетическая норма.

Так как

$$y_{k+1} = (E - \tau B^{-1}A)y_k$$

тогда каноническая схема устойчива по начальным данным, если

$$||S = (E - \tau B^{-1}A)|| < 1$$

$$||y_k|| < ||y_{k-1}|| < \ldots < ||y_0||$$

Из определения нормы оператора, условие устойчивости можно записать в эквивалентной форме

$$J_A = ||y||^2 - ||Sy||^2 = (Ay, y) - (ASy, Sy) \geq 0$$

Теорема о необходимых и достаточных условиях канонической разностной схемы

Если $A = A^*, (Ax, y) = (x, Ay), \forall x, y$ и $A > 0, (Ax, x) > 0, \forall x$ существует обратный оператор B^{-1} тогда для устойчивости канонической разностной схемы по начальным данным необходимо и достаточно, чтобы $B > \frac{\tau}{2}A, (By, y) > \frac{\tau}{2}(Ay, y)$

Док=во: Убедимся в эквивалентности условия $B > \frac{\tau}{2}A, (By, y) > \frac{\tau}{2}(Ay, y)$ условию $J_A \geq 0$

$J_A = ||y||^2 - ||Sy||^2 = (Ay, y) - (ASy, Sy) = (Ay, y) - (A(E - \tau B^{-1}A)y, (E - \tau B^{-1}A)y) = 2\tau(AB^{-1}Ay, y) - \tau^2(AB^{-1}Ay, B^{-1}Ay)$ Обозначая $B^{-1}Ay = x \rightarrow Ay = Bx$ имеем $J_A = 2\tau(Ax, y) - \tau^2(Ax, x) = 2\tau(x, Ay = Bx) - \tau^2(x, Ax) = 2\tau((Bx, x) - \frac{\tau}{2}(Ax, x)) \geq 0$ следовательно выполнено условие устойчивости

$$||S = (E - \tau B^{-1}A)|| < 1$$

(достаточность)

Если схема устойчива то выполнено условие

$$||y_{k+1}|| < ||y_k||$$

а следовательно и условие

$$||S = (E - \tau B^{-1}A)|| < 1$$

(необходимость)

Теорема очевидна для схемы Эйлера для скалярного уравнения

$$bu'(t) + au(t) = 0, \quad u(0) = u^0$$

$$b\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau} + ay_i = 0, \quad y_0 = u^0$$

$$y_{i+1} = (1 - \tau\frac{a}{b})y_i$$

устойчивость, если $|1 - \tau\frac{a}{b}| < 1 \rightarrow b > \frac{\tau}{2}a$

а) устойчивость явной схемы Эйлера

$B = E, \quad A = A^* > 0$ из неравенства Коши-Буняковского имеем $(Ax, x) \leq ||Ax||||x|| \leq ||A||||x||^2 = ||A||(x, x) \rightarrow A \leq ||A||E$

$$E \geq \frac{A}{||A||}$$

$B - \frac{1}{2}\tau A = E - \frac{\tau}{2}A \geq \frac{A}{||A||} - \frac{\tau}{2}A = (\frac{1}{||A||} - \frac{\tau}{2})A, A \geq 0 \rightarrow$

$$\frac{1}{||A||} - \frac{\tau}{2} \geq 0, \quad \rightarrow \quad \tau < \frac{2}{||A||}$$

б) устойчивость схемы Роте с весами

$B = E + \sigma\tau A$

$B - \frac{1}{2}\tau A = E + (\sigma - \frac{1}{2})\tau A \geq (\frac{1}{||A||} + (\sigma - \frac{1}{2}\tau)A) \geq 0 \rightarrow$

$$1 + (\sigma - \frac{1}{2})||A||\tau \geq 0$$

схема устойчива для любых τ, если $\sigma \geq \frac{1}{2}$ и устойчива условно для $\tau \leq \frac{1}{(0.5-\sigma)||A||}$ если $\sigma < 0.5$

Устойчивость по правой части

Представим выражение для u_{k+1} в форме

$$u_{k+1} = Su_k + \tau B^{-1}\varphi_k, \quad u_0 = 0,$$

$k = 0, 1, \ldots, \quad S = E - \tau B^{-1}A$

$||U_{k+1}|| \leq ||S||||u_k|| + \tau||B_{-1}||||\varphi_k||$

$B \geq \frac{\tau}{2}A$, существует B^{-1} и следовательно $||B^{-1}||$ ограничена $u_0 = 0$,

$||u_n|| \leq ||B^{-1}|| \sum_{k=0}^{n} \tau ||\varphi_k|| \leq ||B^{-1}|| \max_k ||\varphi_k||$ следовательно схема устойчива и по правой части

Замечание

Для устойчивости достаточно условия

$$||S|| \leq 1 + M\tau$$

где M-постоянная, независящая оти τ

$||u_{k+1}|| \leq ||S|| ||u_k|| \leq (1 + M\tau) ||u_k||$

$\leq (1 + m\tau)^k ||u_0|| \leq e^{Mk\tau} ||u_0|| \leq e^{MT} ||u_0||$