

## Экзамен по математической физике

**1.** Начальный ток в отрезке  $0 \leq x \leq l$  линии без искажений отсутствовал, а напряжение описывалось функцией  $\phi(x)$ . Найти ток в линии и напряжение при  $t > 0$ , если правый конец линии заземлён, а левый - изолирован.

**2.** Отрезок струны с закрепленными концами до начального момента времени находился в состоянии равновесия под действием поперечной силы  $F_0 = const$ , приложенной к точке  $x_0$

Найти колебания струны при  $t > 0$  после снятия силы.

**3.** Правый конец стержня  $x = l$  закреплён упруго, а к левому  $x = 0$  приложена продольная постоянная сила  $F_0(t) = F_0 = const$ , под действием которой стержень покоится.

Найти колебания стержня после внезапного снятия силы в момент времени  $t = 0$ .

**4.** Найти поперечные колебания прямоугольной мембраны  $0 \leq x \leq l_1$ ,  $0 \leq y \leq l_2$  с закрепленной границей, вызванные поперечным сосредоточенным импульсом  $I$ , который сообщается мембране в точке  $(x_0, y_0)$  в начальный момент времени. Сопротивлением среды пренебречь.

**5.** Найти температуру в однородном теплопроводящем стержне длины  $l$ , если правый его конец теплоизолирован, на левом конце поддерживается температура  $\exp(-\frac{t}{4l^2})$ , а начальная температура равна 1.

**6.** Найти продольные колебания однородного упругого стержня длины  $l$ , правый конец которого закреплен, а на левый действует сила

$$F(t) = A \sin \omega_1 t + B \sin \omega_2 t.$$

**7.** Найти напряжение в однородном проводе с параметрами  $R, L, G, C$ , если начальные ток и напряжение равны нулю, конец  $x = l$  закреплен, а к концу  $x = 0$  с момента времени  $t > 0$  приложена ЭДС  $\varepsilon_0$

**8.** Начальная температура тонкого стержня равна нулю, температуры концов равны соответственно  $U_1, U_2$ . На боковой поверхности стержня происходит конвективный теплообмен со средой нулевой температуры. Найти изменение температуры во времени.

**9.** Найти напряжение в однородном проводе с параметрами  $R, L, G, C$ , если начальные ток и напряжение равны нулю, к концу  $x = l$  с момента времени  $t = 0$  приложена ЭДС  $\varepsilon(t) = E_0 \sin \omega t$ , а конец  $x = 0$  изолирован.

**10.** Найти продольные колебания стержня  $0 \leq x \leq l$  в среде без сопротивления под действием силы

$$F(t) = At^m, \quad m > 1,$$

приложенной с момента времени  $t = 0$  к концу  $x = l$ , если другой конец стержня жестко закреплен. Начальные скорость и растяжение стержня нулевые.

**11.** Конец стержня  $x = 0$  закреплен жестко, а к свободному концу  $x = l$  с нулевого момента времени приложена постоянная сила  $F_0$ . Найти продольные колебания стержня, если начальные скорость и растяжение стержня нулевые.

**12.** Однородный стержень висит вертикально в поле силы тяжести и дополнительно растянут грузом массы  $M$ , подвешенным на его конце  $x = l$ . Найти упругие колебания стержня после обрыва груза, если конец  $x = 0$  жестко закреплен.

**13.** Однородный стержень висит вертикально в поле силы тяжести и дополнительно растянут грузом массы  $M$ , подвешенным на его конце  $x = l$ . Найти упругие колебания стержня после обрыва груза, если конец  $x = 0$  закреплен на пружине заданной жесткости.

**14.** Найти закон изменения температуры при  $t > 0$  однородного стержня длины  $l$  с теплоизолированной боковой поверхностью, если начальная температура стержня равна  $u_0(x/l)^2$ .

Левый конец  $x = 0$  теплоизолирован, а на правом конце поддерживается постоянная температура  $u_0$ .

**15.** Струна  $0 \leq x \leq l$  с закрепленными концами находилась до момента времени  $t = 0$  в равновесии под действием поперечной силы  $F_0 = const$ , приложенной в точке  $x = x_0$ . Найти колебания струны после снятия силы.

**16.** Найти колебания полуограниченной струны, закрепленной в точке  $x = 0$ , возбужденной начальным отклонением  $x^2 \sin x$  и начальной скоростью  $x \sin^2 x$ .

**17.** Однородный стержень висит на нитке вертикально в поле силы тяжести и дополнительно растянута грузом массы  $M$ , подвешенным на нитке на его конце  $x = l$ . Найти упругие колебания стержня после обрыва обеих ниток.

**18.** Найти закон распределения температуры однородного линейного стержня  $0 \leq x \leq l$  при  $t > 0$ , если начальная температура нулевая. На правом конце стержня поддерживается нулевая температура, температура правого конца изменяется по закону  $u_0 \exp(\alpha t)$ ,  $u_0, \alpha = \text{const}$ .

Боковая поверхность стержня теплоизолирована.

**19.** Найти стационарное распределение температуры внутри бесконечного цилиндра радиуса  $r_0$ , если на его поверхности поддерживается температура

$$u_0 \sin \phi,$$

где  $u_0 = \text{const}$ ,  $\phi$  - полярный угол.

**20.** Однородная струна длиной  $l$  закреплена на концах. В начальный момент времени она оттянута в точке  $x = l/4$  на малое расстояние  $h$ , затем отпущена без начальной скорости. Найти форму струны при  $0 \leq t \leq \frac{l}{4a}$  (изобразить графически все фазы).

**21.** Найти температуру однородного теплопроводящего цилиндра радиуса  $R$ , если начальная его температура равно 0, а на поверхности задан постоянный нормальный поток тепла  $q$ .

**22.** Найти закон свободных колебаний круглой мембраны радиуса  $r_0$ , закрепленной вдоль контура границы, если все внутренние точки мембраны в начальный момент времени получают одинаковую скорость  $0.01a$ . Начальное отклонение равно нулю.

**23.** Найти температуру однородного теплопроводящего цилиндра радиуса  $R$ , если начальная температура всех его точек одинакова и равна  $u_0$ , а на поверхности происходит теплообмен со средой нулевой температуры.

**24.** Нарисовать все качественно различные фазы колебания при  $t > 0$  отрезка струны  $0 \leq x \leq 3l$  с начальными данными вида:

$$\begin{cases} u_t'(x, 0) = 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} \frac{hx}{l} & , 0 \leq x \leq l, \\ -\frac{h(x-3l)}{2l} & , l \leq x \leq 3l. \end{cases} \end{cases}$$

**25.** Найти закон остывания бесконечного однородного цилиндра радиуса  $r_0$ , если в начальный момент времени температура его была равна  $u_0$ , а на поверхности при  $t > 0$  поддерживается нулевая температура.

**26.** Найти температуру стержня  $0 \leq x \leq l$  при  $t > 0$ , левый конец и боковая поверхность которого теплоизолированы, а на правом конце происходит теплообмен со средой температуры  $u_0$ . Начальная температура стержня нулевая.

**27.** Начальные поперечные колебания круглой мембраны  $0 \leq r \leq r_0$ , вызванные сосредоточенной поперечной силой  $p = p_0 \sin \omega t$ , приложенной к центру пластины (колебания мембраны репродуктора). Край мембраны закреплен.

**28.** Край круглой мембраны  $0 \leq r \leq r_0$  движется по закону

$$u(r_0, t) = A \sin \omega t, \quad t > 0.$$

Найти колебания мембраны при нулевых начальных условиях.

**29.** Найти температуру однородного бесконечного круглого цилиндра радиуса  $r_0$ , если начальная его температура  $U_0 = const$ , а на поверхности происходит конвективный теплообмен со средой нулевой температуры.

**30.** Найти колебания упругого стержня, правый конец которого закреплен, а на левый действует при  $t > 0$  сила

$$F(t) = A \exp(\alpha t).$$

Начальные скорость и растяжение равны нулю.

**31.** Левый конец изолированного по бокам теплопроводящего стержня поддерживается при постоянной температуре  $u_0$ , а на правый подается извне поток тепла

$$A \exp(-\alpha t), \quad t > 0.$$

Найти закон изменения температуры стержня, если начальная температура нулевая.

**32.** Найти решение смешанной задачи

$$\begin{cases} u''_{tt} = a^2 u''_{xx}, & x > 0, t > 0, \\ u^x(0, t) = \nu(t), & t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & x > 0 \\ u'_t(x, 0) = 0, & x > 0. \end{cases}$$

Подобрать физическую задачу, описываемую данной математической моделью.

**33.** Найти колебания отрезка упругого стержня, левый конец которого свободен, а правый - жестко закреплен, если начальная скорость точек стержня нулевая, а начальное отклонение имеет вид

$$A(x - l).$$

**34.** Начальный ток в отрезке  $0 \leq x \leq l$  линии без искажений отсутствовал, а напряжение описывалось функцией  $\phi(x)$ . Найти ток в линии и напряжение при  $t > 0$ , если оба конца линии изолированы.

**35.** Найти стационарное распределение температуры внутри однородного бесконечного цилиндра радиуса  $r_0$ , если на одной половине его поверхности ( $0 \leq \phi \leq \pi$ ) поддерживается температура  $T_1$ , а на другой ( $\pi \leq \phi \leq 2\pi$ ) - температура  $T_1$

**36.** Найти закон остывания бесконечного цилиндра радиуса  $r_0$ , если начальная его температура равна

$$u_0 J_0 \left( \frac{\mu_1^{(0)} r}{r_0} \right),$$

где  $\mu_1^{(0)}$  - первый положительный корень функции Бесселя  $J_0$ . На поверхности цилиндра поддерживается нулевая температура.

**37.** Найти температуру в однородном теплопроводящем стержне длины  $l$ , если на правом его конце поддерживается температура  $\exp(-t)$ , на левом конце - нулевая температура, а начальная температура равна  $\frac{x}{l}$ .

**38.** На струну длины  $l$  действует внешняя сила, распределенная с плотностью

$$f(x, t) = A \sin \frac{\pi at}{l}.$$

Найти закон колебаний струны, если ее концы закреплены, а начальные условия нулевые.

**39.** Однородный стержень висит вертикально в поле силы тяжести и дополнительно растянут грузом массы  $M$ , подвешенным на его конце  $x = l$ . Найдите упругие колебания стержня после обрыва груза, если конец  $x = 0$  закреплен на пружине заданной жесткости.

**40.** Найти температуру однородного теплопроводящего цилиндра радиуса  $R$ , если начальная температура всех его точек одинакова и равна  $u_0$ , а на поверхности происходит теплообмен со средой нулевой температуры.