Конспект лекций по методам математической физики, 4 семестр

Зайцев Ю.В., лектор – Кошелев В.Н.

20 июня 2006 г.

Аннотация

Данные лекции читались В.Н. Кошелевым на радиофизическом факультете ННГУ им. Лобачевского в четвертом семестре 2006 учебного года. Конспект включает в себя только те темы, которые вошли в экзаменационную программу за 2006 год, а именно: теорию Штурма-Лиувилля, метод разделения переменных Фурье для уравнений гиперболического типа, функции Бесселя, метод функций Грина (в т.ч. для уравнений параболического типа), интегральные преобразования, уравнения эллиптического типа и, наконец, интегральные уравнения.

Конспект не претендует на подробность изложения материала, однако включает в себя достаточно детальный обзор всех разделов программы и может оказать, вкупе с рекомендованной лектором литературой (“Уравнения математической физики” А.Н. Тихонова и А.А. Самарского, “Методы математической физики и специальные функции” В.Я. Арсенина, “Сборник задач по математической физике” Б.М. Будака и др.) неоценимую помощь при подготовке к экзамену.

Для удобства, непосредственно перед началом конспекта вставлена программа по математической физике за 2006 год, составленная самим В.Н. Кошелевым. Кроме того, приведена примерная программа практических занятий по курсу. В качестве задачника использовался означенный выше задачник Будака, соответственно, нумерация идет по нему. В скобках указаны исключенные из рассмотрения номера. Советую, однако, не ограничиваться рассмотрением лишь программных задач, а также не брезговать кратким теоретическим введением, приводимым в задачнике непосредственно перед решениями задач по выбранной теме.

План практических занятий по методам математической физики на 4 семестр д/о

Занятие 1. Свободные колебания в среде без сопротивления.

Глава II: (100), 101, 107. На дом: (97), 99, 103, 106.

Занятие 2. Свободные колебания в среде без сопротивления.

Глава II: 109, 111. На дом: 104, 110.

Занятие 3. Свободные колебания в среде с сопротивлением.

Глава II: 119, 120. На дом: 118, 121.

Занятие 4. Вынужденные колебания (стационарная неоднородность).

Глава II: 128, 132. На дом: 126, 127.

Занятие 5. Вынужденные колебания (общий случай). Решение методом, указанным в задаче 149.

Глава II: 146, 149. На дом: 147, 148.

Занятие 6. Колебания под действием гармонических возбуждений. Явление резонанса. Решение методом, указанным в задаче 149.

Глава II: 136, 138. На дом: 135, 139.

Занятие 7. Телеграфные уравнения.

Глава II: 125, 143. На дом: 130, 144.

Занятие 8. Поперечные колебания прямоугольной мембраны.

Глава VI: 49, 51. На дом: 47, 52.

Занятие 9. Поперечные колебания круглой мембраны.

Глава VI: 62, 61. На дом: 60, 63, 64.

Занятие 10. Метод Фурье для уравнений параболического типа.

Глава III: 26. Глава V: 9. На дом: III.24, V.10.

Занятие 11. Метод функций Грина для уравнений параболического типа.

Глава III: 23, 25, 33, 36. На дом: 27, 28, 35.

Занятие 12. Распространение тепла в круглом цилиндре.

Глава V: 29. На дом: 27, 28.

Занятие 13. Метод интегральных преобразований для уравнений параболического типа.

Глава III: 55, 56, 57. На дом: 54, 58.

Занятие 14. Метод разделения переменных для уравнений эллиптического типа.

Глава IV: 65, 67-б), 80, 83. На дом: 66, 67-а), 86.

Вопросы
к экзамену по математической физике (2курс, д/о)

Теория Штурма—Лиувилля

Теория Штурма-Лиувилля. Основные понятия функционального анализа (метрическое пространство, предел последовательности в метрическом пространстве, фундаментальная последовательность, полное метрическое пространство, линейное пространство, нормированное пространство, сходимость в среднем, банахово пространство, скалярное произведение, гильбертово пространство, ортонормированная система в гильбертовом пространстве, полная ортогональная система элементов). Линейный оператор. Симметричный оператор. Положительный оператор. Собственные числа и собственные значения оператора. Свойства собственных чисел и собственных значений симметричного оператора (4 теоремы). Ортогональность двух непрерывных функций на сегменте $[a, b]$. Норма непрерывной функции. Дифференциальные линейные операторы второго порядка. Необходимое и достаточное условие симметричности дифференциального оператора. Ортогональность функций с весом. Самосопряженная и несамосопряженная задачи для дифференциального оператора. Сведение несамосопряженной задачи к самосопряженной (отыскание весовой функции). Определение задачи Штурма-Лиувилля. Пример решения задачи Штурма-Лиувилля. Свойства оператора Штурма-Лиувилля и его собственных чисел и собственных функций (5 теорем). Понятие кратного и простого собственного значения. Экстремальные свойства собственных значений задачи Штурма-Лиувилля (понятие квадратичного функционала и 2 теоремы). Теоремы сравнения для собственных значений задачи Штурма-Лиувилля (3 теоремы). Ряд Фурье по системе собственных функций задачи Штурма-Лиувилля. Частичная сумма ряда Фурье. Остаток ряда Фурье. Сходимость в среднем ряда Фурье. Свойство остатка ряда Фурье. Теорема Стеклова.

Метод Фурье

Общая схема метода разделения переменных. Задача о свободных колебаниях стержня (случай свободных концов). Анализ полученного решения. Решение неоднородного гиперболического уравнения при нулевых условиях. Неоднородная задача для гиперболического уравнения (общий случай). Решение задачи для гиперболического уравнения в случае стационарной неоднородности. Колебания прямоугольной мембраны.

Функции Бесселя

Определение и основные свойства гамма-функции. Уравнение Бесселя. Отыскание решения уравнения Бесселя в виде обобщенного степенного ряда. Функции Бесселя первого рода. Функции Бесселя целого порядка. Функции Неймана. Общее решение уравнения Бесселя. Ортогональность функций Бесселя. Норма функции Бесселя. Рекуррентные соотношения для функций Бесселя. Колебания круглой мембраны.

Функция Грина

Определение функция Грина для гиперболической смешанной задачи. Ее физический смысл. Решение смешанной задачи для гиперболического уравнения с помощью функции Грина. Функция Грина уравнения колебаний для ограниченной области. Явление резонанса (исследование с помощью функции Грина). Функция Грина для параболического уравнения. Ее физический смысл. Решение смешанной задачи для параболического уравнения с помощью функции Грина. Функция Грина параболического уравнения для ограниченной области. Задача о конвективном теплообмене на поверхности стержня.

Интегральные преобразования

Двустороннее (комплексное) прямое и обратное преобразования Фурье. Прямое и обратное синус-преобразование. Прямое и обратное косинус-преобразование. Вывод формулы Даламбера с помощью преобразования Фурье. Функция Грина уравнения параболического типа для прямой. Построение функции Грина параболического уравнения для пространства любой размерности. Построение функции Грина параболического уравнения для полупрямой для граничных условий первого и второго типа.

Уравнения эллиптического типа

Уравнение Лапласа и уравнение Пуассона. Три рода краевых задач для уравнений эллиптического типа. Первая и вторая формулы Грина. Определение и примеры гармонической функции. Свойства гармонических функций (интегральное представление, поток градиента гармонической функции через границу замкнутой области, связь с аналитической функцией комплексного переменного, теорема о среднем для гармонической функции, теорема о максимуме и минимуме гармонической функции (4 следствия из этой теоремы). Метод электростатических отображений построения функции Грина. Построение функции Грина для полупространства и решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в верхнем полупространстве. Несобственные кратные интегралы (определение, интегралы от неотрицательных функций, эталонный интеграл, признак сравнения сходимости). Несобственные кратные интегралы, зависящие от параметра (определение, поточечная и равномерная сходимость). Определение и свойства объемного потенциала (5 свойств и следствие). Поверхность Ляпунова. Определение и свойства потенциала простого слоя (5 свойств). Определение и свойства потенциала двойного слоя (6 свойств). Гауссов потенциал. Определение потенциалов в случае плоской области. Применение потенциалов для решения краевых задач (на примерах задачи Дирихле для уравнения Пуассона и задачи Неймана для уравнения Лапласа).

Интегральные уравнения

Классификация линейных интегральных уравнений (однородные и неоднородные уравнения, ядро уравнения, уравнение Фредгольма первого, второго и третьего рода, уравнение Вольтера). Уравнение Фредгольма с вырожденным ядром. Решение уравнения с вырожденным ядром.

Задачи по темам

1. Свободные колебания в среде без сопротивления.

2. Свободные колебания под действием удара (импульса).

3. Свободные колебания в среде с сопротивлением.

4. Колебания под действием стационарных сил.

5. Колебания под действием переменных сил. Явление резонанса.

6. Колебания прямоугольной мембраны.

7. Распространение тепла в стержне (метод Фурье).

8. Распространение тепла в параллелепипеде.

9. Метод функций Грина для уравнения теплопроводности.

10. Метод разделения переменных для эллиптических уравнений.

1 Теория Ш.-Л. 15.06.06

Метрическое пр-во: X - метрическое пространство, если в нем введена метрика, т.е. каждой его паре элементов поставлено в соответствие действительное число, удовлетворяющее аксиомам метрики: $x \in X$, $y \in X \to d(x,y)$ 1

1) $d(x,y) \geq 0$ и $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2) $d(x,y) = d(y,x)$
3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ → нер-во треуг.

Предел последовательности в метр пр-ве X_d

Пусть $x_0 \in X$, $\{x_n\} \subset X$

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} x_0 \Leftrightarrow d(x_n, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{R} 0$$

Фундаментальная последовательность

$\{x_n\} \in X$ - фундаментальная последовательность, если $d(x_m, x_n) \to 0$ при $\begin{matrix} n\to\infty \\ m\to\infty \end{matrix}$

Полное метрическое пространство.

Пространство X_d называется полным, если каждая его фундаментальная последовательность сходится к элементу этого же пространства

Линейным пространством называется множество E, являющееся Абелевой группой относительно операции сложения

I $\forall x, y \in E \quad x + y \in E$

1) $x + y = y + x$

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$

3) $x + \theta = x \quad (\exists \theta)$

4) $x + (-x) = \theta$

II $x, y, z \in E, \quad \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$

$\lambda x \in E$

5) $\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y$

6) $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$

7) $\lambda (\mu x) = (\lambda \mu) x$

8) $1 \cdot x = x \quad (\exists 1)$

Нормированное пр-во

Нормированным называется линейное пр-во E, если в нём введена норма $x \in E \to \|x\| \in \mathbb{R}$:

1) $\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

3) $\|\lambda x\| = \lambda \|x\|$

Сходимость в среднем

Говорят, что $x_n \to x_0$ в среднем, если $\|x_n - x_0\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Банахово пространство

Полное нормированное простр. называется Банаховым.

Скалярное произведение

(x, y) - называют скалярным произведением на линейном комплексном пространстве, если оно ставит в соответствие паре элементов комплексное число и выполнены аксиомы (x, y):

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$
2) $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$
3) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$
4) $(x, x) \geq 0$ и $(x, x) = 0 \iff x = \theta$

Гильбертово пространство.

Гильбертовым пространством H называют полное нормированное (Банахово) пространство, норма в котором порождена скалярным произведением

$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$

Ортонормированная система в Гильбертовом пространстве.

Конечная или счетная система элементов H $\{h_n\} \subset H$ называется ортонормированной, если

$$(h_n, h_m) = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases}$$

Полная ортогональная система элементов.

Ортогональная система полная в H, если не существует элемента, отличного от нуля, ортогонального всем элементам системы.

Линейный оператор

4 Оператор $y = Ax$ — линейный, если:

1) $\forall x, y \in X \quad A(x+y) = Ax + Ay$
2) $\forall x, y \in X, \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \ (\lambda \in \mathbb{C})$

$A \lambda x = \lambda A x$

$A(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = \lambda_1 A x + \lambda_2 A y$

Симметричный оператор

$y = Ax$ симметричен, если $(\forall x, y) \in \Omega_H \quad (Ax, y) = (x, Ay)$

Положительный оператор

Симметричный оператор $y = Ax$ положительный, если $(Ax, x) \geq 0$.

Собственные числа оператора.

λ — собственное число оператора A, если $(\exists x \in H)(x \neq \theta): \ Ax = \lambda x$

x — собственный элемент A.

Теоремы о свойствах с.ч.

Т1 С.ч. симметричного оператора действительны.

Док-во: Пусть λ - с.ч. A, $Ax=\lambda x$, $x \neq \theta$

$(Ax, x) = (x, Ax)$ - т.к. симметричен A.

$\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (Ax, \lambda x) = \bar\lambda (Ax, x) =$

$= \bar\lambda (x, Ax) = \bar\lambda (x, \lambda x) = \bar\lambda^2 (x, x)$

$\lambda^2 = \dfrac{\|Ax\|^2}{(x,x)} = \dfrac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2} \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \in R$

5

Т2 С.ч. - положительные у положительного! симметричного оператора. Док-во: $x \neq \theta$

$(Ax, x) = (\lambda x, x) = \lambda \underbrace{(x, x)}_{>0 \text{ по}}$

$(x, Ax) = (x, \lambda x) = \lambda (x, x)$

$(Ax, x) = (x, Ax) \geq 0 \xrightarrow{\text{аксиоме } (x,y)} \lambda \geq 0$

Т3 Собственные значения, соответствующие различным собственным числам всегда ортогон.

Док-во: $Ax = \lambda_1 x$, $x, y \neq \theta$

$Ay = \lambda_2 y$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$(Ax, y) = (\lambda_1 x, y) = \lambda_1 (x, y) \Rightarrow \lambda_1 (x,y) - \lambda_2 (x,y) =$

$(x, Ay) = (x, \lambda_2 y) = \lambda_2 (x, y) \quad = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\lambda_1 \neq \lambda_2} \underbrace{(x, y)} =$

$= (Ax, y) - (x, Ay) = 0$, т.к. оператор симметричен $\Rightarrow (x, y) = 0$

Т4 Собственные значения, соответствующие разным собственным числам симметричного оператора различны. Док-во: $\lambda_1 \neq \lambda_2$, допустим $x = y$

Тогда $(Ax, y) = \lambda_1 (x, y)$ $\qquad \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}(x, y) = 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$(x, Ay) = \lambda_2 (x, y)$ $\qquad \Rightarrow (x, y) = 0$, но $x = y$

Против. с $D \neq \theta$! $\qquad \Rightarrow (x, x) = 0$

Ортогональность двух непрерывных функций на сегменте $[a,b]$

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные функции на $[a,b]$. $f(x)$ и $g(x)$ ортогональны,

если $(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0$.

6

Норма непрерывной функции

$$\| y(x) \| = \sqrt{(y(x), y(x))} = \sqrt{\int_a^b y^2(x)\,dx}$$

Дифференциальные линейные операторы 2-го порядка.

Рассмотрим класс функций M, удовлетворяющих условиям:

1) $y(x) \in C^2_{[a,b]}$

2) $\forall\, y_1(x)$ и $y_2(x) \in M$ – определено скалярное произв. $(y_1(x), y_2(x))$

3) $\forall\, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0 \end{cases}$$

Определим на этом классе ДЛО 2-го порядка

$$\mathcal{L} y = a_0(x) y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y \qquad a_0(x) \neq 0$$

$a_0(x) \neq 0$, $a_0(x) \in C'_{[a,b]}$

$a_1(x), a_2(x) \in C_{[a,b]}$

Необходимое и достаточное условие симметричности дифференциального оператора.

Ly — симметричен на $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $a_0'(x) \equiv a_1(x)$ (7)

1) $\Rightarrow$ L — симметричный оператор

$(Lu, v) = (u, Lv) \Rightarrow (Lu, v) - (u, Lv) = 0$

$$(Lu,v) - (u, Lv) = \int_a^b (a_0 u'' + a_1 u' + a_2 u) v\,dx -$$
$$- \int_a^b (a_0 v'' + a_1 v' + a_2 v) u\,dx = \int_a^b a_0 u'' v\,dx - \int_a^b a_0 u v''\,dx +$$
$$+ \int a_1 (u'v - v'u)\,dx = a_0 v u' \Big|_a^b - \int_a^b u' \frac{d(a_0 v)}{dx}\,dx -$$
$$- a_0 v' u \Big|_a^b + \int_a^b v' \frac{d(a_0 u)}{dx}\,dx + \int_a^b a_1 (u'v - v'u)\,dx =$$
$$= a_0 (v u' - u v') \Big|_a^b - \int_a^b a_0' u' v\,dx + \int_a^b a_0' v' u\,dx +$$
$$+ \int_a^b a_1 (u'v - v'u)\,dx = a_0(b) \{ v(b) u'(b) - \overset{0}{\overline{\overline{u(b) v'(b)}}} \} -$$
$$- a_0(a) \{ \overset{0}{\overline{\overline{v(a) u'(a)}}} - u(a) v'(a) \} + \int_a^b (a_1 - a_0')(u'v - v'u)\,dx$$

$\Rightarrow a_1 = a_0'$

$\Leftarrow$ $a_0'(x) = a_1(x)$. Тогда из рассуждения выше следует, что $(Lu, v) - (u, Lv) = 0$

$\Rightarrow (Lu, v) = (u, Lv)$

Ортогональность функций с весом.

Пусть $f(x)$, $g(x)$ неортогональны на $[a,b]$ и можно указать такое $\rho(x) > 0$, что

$$(\rho(x) f(x), g(x)) = (f(x), g(x)\rho(x)) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x)\, dx$$

8 $\Rightarrow$ они ортогональны с весом $\rho(x)$.

Самосопряженная и несамосопряженные задачи для лин. дифф. оп.

$$\begin{cases} L y = \lambda y \\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y(a) = 0 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y(b) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0 \end{matrix}$$

Если L — симметричный, задачу называют самосопряженной; если не симметричен — не самосопряженной.

Сведение не самосопряженной задачи к самосопряженной.

Всякую несамосопряженную задачу можно свести к самосопряженной.

$$\rho(x) = C e^{\int \frac{a_1(x) - a_0'(x)}{a_0(x)} dx}, \quad C > 0$$

$\rightarrow$ вес ортогональности С.Ф.

Доказательство:

$$\begin{cases} \rho L y = \lambda \rho y \\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y(a) = 0 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y(b) = 0 \end{cases} \qquad \rho L y = \rho a_0 y'' + \rho a_1 y' + \rho y$$

Оператор ρL симметричен, если

7 $\underbrace{(\rho a_0)'}_{\text{стр. коэф.}} = \underbrace{\rho a_1}_{\text{2 кор}}$ $\rho' a_0 + \rho a_0' = \rho a_1$

$\rho(a_0' - a_1) = -\frac{d\rho}{dx} a_0$ $\int \frac{(a_1 - a_0')}{a_0} dx = \int \frac{1}{\rho} d\rho$

$\ln \rho = \int \frac{a_1 - a_0'}{a_0} dx$ $\boxed{\rho(x) = e^{\int \frac{a_1 - a_0'}{a_0} dx}}$

$$\begin{cases} \rho L y_1 = \lambda_1 \rho y_1 \ \Big|, y_2) \\ \rho L y_2 = \lambda_2 \rho y_2 \ \Big| (y_1 \ldots \end{cases}$$

Функции y_1 и y_2 ортогональны с весом ρ на отрез. $\neq 0$

$$-\begin{matrix} \rho(Ly_1, y_2) = \lambda_1 (\rho \ y_1, y_2) \\ \rho(y_1, Ly_2) = \lambda_2 (\rho y_1, \ y_2) \end{matrix}$$

$\Rightarrow 0 = (\lambda_1 - \lambda_2)(\rho y_1, y_2)$

$\Rightarrow (\rho y_1, y_2) = 0$

Определение задачи Штурма-Лиувилля

$Ly = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)\, y$ — ЛДУ-Ш-Л

$p(x) \in C^1_{[a,b]}$ $p(x), q(x) \geq 0$ 9

$q(x) \in C_{[a,b]}$

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)\, y = \lambda \rho(x)\, y & (1) \\ h_1 y(a) - h_2 y'(a) = 0 & (2) \\ H_1 y(b) + H_2 y'(b) = 0 & (3) \end{cases}$$

$\rho(x) > 0$ $h_i \geq 0$ $H_i \geq 0$ } Г.У. невырожденные.

$h_1 + h_2 > 0$, $H_1 + H_2 > 0$

Область определения L обозначаем M:

1) $y(x) \in C^2_{[a,b]}$

2) $\rho(x) > 0$, $(\rho y_1, y_2) = (y_1, \rho y_2) = \int_a^b y_1(x) y_2(x) \rho(x) dx$

3) работаем условие (2) и (3).

Задача (1)-(3) называется задачей Ш-Л

Пример решения задачи Ш-Л

$p(x) = p > 0, \quad q(x) = q > 0 \qquad \rho(x) = \rho > 0$

$h_2 = H_2 = 0.$

$$\begin{cases} -py'' + qy = \lambda \rho y \\ y(a) = y(b) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'' + \mu y = 0 \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$$

$\mu = \frac{\lambda\rho - q}{p}.$

1) $\mu < 0$

$y = C_1 e^{-\sqrt{-\mu} x} + C_2 e^{\sqrt{-\mu} x}$

$$\begin{cases} y(a) = C_1 e^{-\sqrt{-\mu} a} + C_2 e^{+\sqrt{-\mu} a} = 0 \\ y(b) = C_1 e^{-\sqrt{-\mu} b} + C_2 e^{+\sqrt{-\mu} b} = 0 \end{cases}$$

10

$\Delta = \left\{ e^{\sqrt{-\mu}(b-a)} - e^{\sqrt{-\mu}(a-b)} \right\} \neq 0$

$a \neq b \Rightarrow C_1 = C_2 = 0. \Rightarrow y(x) = 0.$

2) $\mu = 0. \quad y'' = 0 \Rightarrow y' = C_1 \Rightarrow y(x) = C_1 x + C_2$

$C_1 a + C_2 = 0$

$C_1 b + C_2 = 0$

$\Delta = (a - b) \to a \neq b \Rightarrow \Delta \neq 0$

$C_1 = C_2 = 0. \quad y(x) = 0$

3) $\mu > 0. \quad y = A \cos\sqrt{\mu} x + B \sin\sqrt{\mu} x$

$$\begin{cases} A \cos\sqrt{\mu} a + B \sin\sqrt{\mu} a = 0 \\ A \cos\sqrt{\mu} b + B \sin\sqrt{\mu} b = 0 \end{cases}$$

$\Delta = \cos\sqrt{\mu} a \sin\sqrt{\mu} b - \sin\sqrt{\mu} a \cos\sqrt{\mu} b = \sin\sqrt{\mu}(b-a)$

$\sqrt{\mu}(b-a) = n\pi \quad \mu_n = \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2 \quad n = 1, 2 \ldots$

$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2 \rho} p + \frac{q}{\rho}$

$y_n(x) = A_n \cos\frac{n\pi}{b-a} x + B_n \sin\frac{n\pi}{b-a} x$

Свойства оператора Ш-Л, с.ч. и с.ф.

11

1) L - симметричный оператор.

Док-во: $Ly = -p(x)y'' - p'(x)y' + q(x)y$

$a_0(x) = -p(x) \qquad a_1(x) = -p'(x)$

$a_1(x) = a_0'(x)$

2) С.Ф., отвечающие различным λ, ортогональны с $\rho(x)$

3) Оператор Ш-Л положительный оператор, т.е. $(\forall y(x) \in M)$, $(Ly, y) \geq 0$

$$(Ly, y) = \int_a^b \left(-\frac{d}{dx}(py') + qy\right) y\,dx = -pyy'\Big|_a^b + \int_a^b (py'^2 + qy^2)dx =$$

$$= p(a)y(a)y'(a) - p(b)y(b)y'(b) + \int_a^b (py'^2 + qy^2)dx =$$

$$= \int_a^b (py'^2 + qy^2)dx + \underbrace{\frac{h_1}{h_2} p(a) y^2(a)}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{H_1}{H_2} p(b) y^2(b)}_{\geq 0} \geq 0$$

4) Собственные числа задачи Ш-Л $\boxed{\lambda \geq 0}$ (следует из положительности оператора)

5) С.ч. λ называется R-кратными, $R \geq 2$, если число всех линейно независ. С.Ф., которые им соответствуют $= R$. Если $R = 1$ — λ - простое.

Все С.Ч. задачи Ш-Л простые. Док-во:

$y_1(x)$, $y_2(x)$ — с.ф. $\to \lambda$. Тогда

$$\begin{cases} h_1 y_1(a) - h_2 y_1'(a) = 0 \\ h_1 y_2(a) - h_2 y_2'(a) = 0 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} y_1(a) & y_1'(a) \\ y_2(a) & y_2'(a) \end{vmatrix} = W(a) =$$

$$= y_1(a)y_2'(a) - y_1'(a)y_2(a) = +\frac{h_2}{h_1} y_1'(a)y_2'(a) - \frac{h_2}{h_1} y_1'(a)y_2'(a) = 0$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_1'(x) \\ y_2(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y_1(x) \text{ и } y_2(x)$$

линейно зависимы

Экстремальные свойства С.З. зад. Ш-Л.

12

Теорема 1. Если $\mu = \inf\limits_{y\in M} \frac{(Ly,y)}{\|y\|}$ достигается на некоторой функции $y_1(x)$, то $y_1(x)$ – СФ, а $\mu=\lambda_1$ – соответствующее ей собственное значение.

Док-во. $(\forall y \in M): \frac{(Ly,y)}{\|y\|^2} - \mu \geq 0.$

$J[y] = (Ly,y) - \mu\|y\|^2 \geq 0$

$J[y_1] = (Ly_1,y_1) - \mu\|y_1\|^2 = 0$

Введем $\varphi(\varepsilon) = J[y_1(x)+\varepsilon h(x)]$, $h(x)\in M$

Очевидно, что $\varphi'(0) = 0 = J[y_1(x)]$

$$\varphi'(0) = \frac{d}{d\varepsilon}\{(L(y_1(x)+\varepsilon h(x)), y_1(x)+\varepsilon h(x)) - \mu\|y_1(x)+\varepsilon h(x)\|^2\}_{\varepsilon=0}$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon}\{(Ly_1+\varepsilon Lh, y_1+\varepsilon h) - \mu(\rho y_1+\varepsilon\rho h, y_1+\varepsilon h)\}_{\varepsilon=0} = \underbrace{(Ly_1,h)+(Lh,y_1)}_{\text{симметр}} -$$

$$-\mu((\rho h, y_1)+(\rho y_1,h)) =$$

$$= (Ly_1-\mu\rho y_1, h) \overset{def}{=} \int_a^b (Ly_1-\mu\rho y_1)\, h\, dx = 0$$

$$\Rightarrow Ly_1 - \mu\rho y_1 = 0 \Rightarrow Ly_1 = \mu\rho \underbrace{y_1}_{\text{СФ}}$$

Теорема 2. Все собственные значения задачи Ш-Л. могут быть расположены в бесконечно возрастающую последовательность

$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$

Док-во. Пусть $\lambda_1 = \mu = \inf\limits_{y\in M}\frac{(Ly,y)}{\|y\|^2}$

$M_2: \{y\in M, (\rho y(x), y_1(x))\}$

$\lambda_2 = \mu_2 = \inf\limits_{y\in M_2} \frac{(Ly,y)}{\|y\|^2} \geq \lambda_1$

$$\lambda_3 = \rho_3 = \inf_{y \in M_2} \frac{(L y, y)}{\|y\|^2}, \quad M_2 : \{ y \in M_1, (\varphi y_1, y_2) \}$$

13

и $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 - - -$

Теорема сравнения для собств. значений задачи Ш-Л

Теорема 1. С ростом $p(x)$ или $q(x)$ собственные значения $L y$ не убывают.

Док-во: $p_1(x) \geq p_2(x)$: $\lambda_n^{(1)} \geq \lambda_n^{(2)}$ (допустим)

$$\frac{(L^{(1)} y, y)}{\|y\|^2} \geq \frac{(L^{(2)} y, y)}{\|y\|^2} \Rightarrow \lambda_1^{(1)} = \inf_{y \in M} \frac{(L^{(1)} y, y)}{\|y\|^2} \geq \inf_{y \in M} \frac{(L^{(2)} y, y)}{\|y\|^2} = \lambda_1^{(2)}$$

Теорема 2. С ростом весовой функции собственные значения $L y$ не возрастают.

Док-во: $\rho_1(x) \geq \rho_2(x)$: $\lambda_n^{(1)} \leq \lambda_n^{(2)}$

$$\|y\|^2_{\rho_1} = \int_a^b y^2(x)\, \rho_1(x)\, dx \geq \int_a^b y^2(x)\, \rho_2(x)\, dx = \|y\|^2_{\rho_2}$$

Тогда: $\frac{(L y, y)}{\|y\|^2_{\rho_1}} \leq \frac{(L y, y)}{\|y\|^2_{\rho_1}} \Rightarrow \lambda_1^{(1)} \leq \lambda_1^{(2)}$

Теорема 3. Собственные значения $L y \to \infty$, как n^2

Док-во: $L y = -\frac{d}{dx}(p(x) y') - q(x) y + \lambda \rho(x) y = 0$

λ') $p_1 y'' + (\lambda \rho_2 - q_1) y = 0$ Тут p_1, q_1, ρ_1 – наименьшие,

λ_n'') $p_2 y'' + (\lambda \rho_1 - q_2) y = 0$ p_2, q_2, ρ_2 – наибольшие зн. p, q, ρ

$y(a) = y(b) = 0$, $\lambda_n' \leq \lambda_n \leq \lambda_n''$

$$\lambda_n' = \frac{n^2 \pi^2}{\rho_2 (b-a)} p_1 + \frac{q_1}{\rho_2}$$

$$\Rightarrow \lambda \to n^2$$

$$\lambda_n'' = \frac{n^2 \pi^2}{\rho_1 (b-a)} p_2 + \frac{q_2}{\rho_1}$$

14

Ряд Фурье по системе с.ф. задачи Ш-Л

$y_1(x), y_2(x) \dots y_n(x)$, $x \in [a,b]$ – ортонормированная система собственных функций

$(\rho y_i, y_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$. Пусть $f(x) \in M$

$f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k y_k(x)$, $a_k = (f(x), \rho y_k(x)) = \int_a^b f(x) \cdot y_k(x) \cdot \rho(x)\, dx$ – ряд Фурье по системе с.ф. задачи Ш.-Л.

Частичная сумма ряда Фурье

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k y_k(x)$, $a_k = \int_a^b f(x)\, \rho(x)\, y_k(x)\, dx$.

Остаток ряда Фурье

$R_n = f(x) - S_n(x) = f(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k y_k(x)$

Сходимость в среднем ряда Фурье

Ряд Фурье сходится в среднем, если $\|R_n(x)\| \to 0$ при $n \to \infty$

Свойство остатка ряда Фурье

$R_n(x)$ с весом $\rho(x)$ ортогонален первым n собственным функциям $y_1(x) \dots y_n(x)$.

Док-во: $(R_n(x), \rho(x)\, y_i(x)) = \left(f(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k y_k(x), \rho(x)\, y_i(x)\right) = (f(x), \rho(x) \cdot y_i(x)) - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k (y_k, \rho y_i) = (f, \rho y_i) - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \delta_{ki} = a_i - a_i = 0$.

Теорема Стеклова. Ряд Фурье, составленный для $f(x) \in M$ по системе с.ф. задачи Ш-Л сходится в среднем к $f(x)$.

Док-во: $f(x) \in M$, $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$

$$(Lf(x), f(x)) = (L S_n(x) + L R_n(x), S_n(x) + R_n(x)) =$$

$$= (L S_n(x), S_n(x)) + (L R_n(x), R_n(x)) + 2(L S_n(x), R_n(x)) =$$

$$(L S_n, R_n) = \left(L \sum a_k y_k, R_n\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k (L y_k, R_n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda_k (\rho y_k, R_n) = 0$$

$$(L S_n, S_n) = \left(L \sum_{k=1}^{n} a_k y_k, \sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right) =$$ 15

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_k a_k a_i (\rho_k y_k, y_i) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k^2$$

$$(L R_n, R_n) = (L f(x), f(x)) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k^2$$

$\le$!

$R_n(x) \in M_n$, $M_n = \{ y(x) \in M, (\rho y, y_i) = 0 \quad i = 1 \dots n \}$

$$\Rightarrow \lambda_{n+1} = \inf_{y \in M_n} \frac{(Ly, y)}{\|y\|^2} \le \frac{(L R_n, R_n)}{\|R_n\|^2}$$

$$\|R_n\|^2 \le \frac{1}{\lambda_{n+1}} (L f(x), f(x)) \Rightarrow \|R_n\|^2 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

2) Метод Фурье

Общая схема разделения переменных

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x) u \qquad 0 < x < l$$

$p(x) \in C^1_{[0,l]}$, $\rho(x), q(x) \in C_{[0,l]}$ $\qquad 0 < t < \infty$

$p(x), \rho(x), q(x) > 0.$ $\qquad h_1 + h_2 > 0$, $H_1 + H_2 > 0$

$$L[u] = -\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x) u \qquad h_i \ge 0, \; H_i \ge 0$$

ГУ
$$\begin{cases} l[u(0,t)] = h_1 u(0,t) - h_2 u'_x(0,t) \\ l[u(l,t)] = H_1 u(l,t) - H_2 u'_x(l,t) \end{cases}$$

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -L[u]$$ Задача о свободных колебаниях (свободные колебания) $\qquad 0 < x < l$

ГУ
$$\begin{cases} l[u(0,t)] = 0 \\ l[u(l,t)] = 0 \end{cases}$$
НУ
$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ u'_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

$u(x,t) = X(x)\, T(t)$

$\rho(x)\, X(x)\, T''(t) = -T(t)\, L[X(x)]$

$$-\frac{L[X(x)]}{\rho(x)\, X(x)} \equiv \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda$$

16

$$\begin{cases} (1)\ L[X(x)] = \lambda \rho(x) X(x) \\ (4)\ T''(t) + \lambda T(t) = 0 \\ (2)\ L_1[X(0)] = 0 \\ (3)\ L_2[X(l)] = 0 \end{cases}$$

(1-3) – задача Ш-Л.

1) λ_n – собств. числа

$\tilde{X}(x)$ – с. ф.

$\left(\tilde{X}_n(x), \rho(x) \tilde{X}_m(x)\right) = \int_0^l \rho(x) X_n(x) X_m(x)\, dx = \delta_{mn}$

2) $T_n''(t) + \lambda_n T_n(t) = 0 \to T_n(t)$.

3) $u_n(x,t) = X_n(x)\, T_n(t)$

4) $u(x,t) = \sum_{n=n_0}^{\infty} T_n(t)\, \tilde{X}_n(t)$.

5) Начальные условия

$u(x,0) = \varphi(x) \to \sum_{n=n_0} T_n(0)\, \tilde{X}_n(x) = \varphi(x)$

$u_t'(x,0) = \psi(x) \to \sum_{n=n_0}^{\infty} T_n'(0)\, \tilde{X}_n(x) = \psi(x)$

$T_n(x) = (\varphi(x), \rho(x) \tilde{X}_n(x)) = \varphi_n$

$T_n'(x) = (\psi(x), \rho(x) \tilde{X}_n(x)) = \psi_n$

6) Ответ: $u(x,t) = \sum_{n=n_0}^{\infty} T_n(t)\, \tilde{X}_n(x)$

Решение неоднородного гиперболического уравнения при нулевых условиях.

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f(x,t) \qquad \begin{matrix} 0 < x < l \\ 0 < t < \infty \end{matrix}$$

Г.У. $\begin{cases} L_1 u(0,t) = \mu_1(t) \\ L_2 u(l,t) = \mu_2(t) \end{cases}$

Н.У. $\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$

Избавляемся от неоднородности в Г.У.

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

$$\rho(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \rho(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -Lv - Lw + f(x,t)$$

$$\begin{cases} h_1 v(0,t) + h_1 w(0,t) = \mu_1(t) \\ h_2 v(l,t) + h_2 w(l,t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

17

$$\begin{cases} v(x,0) + w(x,0) = \varphi(x) \\ v_t(x,0) + w_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\rho(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -Lv + \bar f(x,t), \quad \bar f(x,t) = f(x,t) - Lw - \rho(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

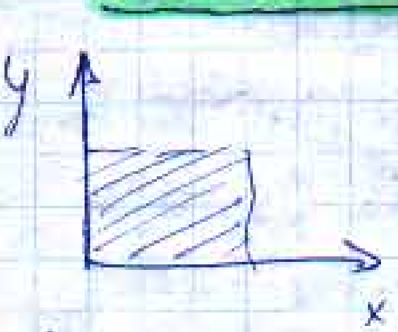
$$\begin{cases} L_1[v(0,t)] = 0 \\ L_2[v(l,t)] = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v(x,0) = \varphi(x) - w(x,0) = \bar\varphi(x) \\ v'_t(x,0) = \psi(x) - w'_t(x,0) = \bar\psi(x) \end{cases}$$

$$v(x,t) = \bar v(x,t) + \bar w(x,t)$$

$$\begin{cases} \rho(x)\frac{\partial^2 \bar v}{\partial t^2} = -L[\bar v] \\ L_1[\bar v(0,t)] = 0 \\ L_2[\bar v(l,t)] = 0 \quad (3) \\ \bar v(x,0) = \bar\varphi(x) \\ \bar v'_t(x,0) = \bar\psi(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho(x)\frac{\partial^2 \bar w}{\partial t^2} = -L[\bar w] + \bar f(x,t) \\ L_1[\bar w(0,t)] = 0 \\ L_2[\bar w(l,t)] = 0 \quad (4) \\ \bar w(x,0) = 0 \\ \bar w'_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

$$\bar v_n(x,t) = X_n(x)\cdot T_n(t) \qquad \bar w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde X_n(x)\cdot T_n(t)$$

Колебания прямоугольной мембраны



$$u = u(x,y,t) \qquad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u \qquad \begin{cases} 0 \le x \le l_1 \\ 0 \le y \le l_2 \\ 0 \le t < \infty \end{cases}$$

ГУ
$$\begin{cases} L_1 u(0,y,t) = h_1 u(0,y,t) - h_2 u'_x(0,y,t) \\ L_2 u(l_1,y,t) = H_1 u(l_1,y,t) - H_2 u'_x(l_1,y,t) \\ L_3 u(x,0,t) = h_3 u(x,0,t) - h_4 u'_x(x,0,t) \\ L_4 u(x,l_2,t) = H_3 u(x,l_2,t) - H_4 u'_x(x,l_2,t) \end{cases}$$

НУ
$$\begin{cases} u(x,y,0) = \varphi(x,y) \\ u'_t(x,y,0) = \psi(x,y) \end{cases} \qquad h_i \ge 0, \quad H_i \ge 0 \qquad h_1 + h_2 > 0, \; H_1 + H_2 > 0, \; h_3 + h_4 > 0, \; H_3 + H_4 > 0$$

18

$$u(x,y,t) = T(t)\, V(x,y) \Rightarrow T'' V = a^2 T \Delta V$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda$$

$$\begin{cases} \Delta V + \lambda V = 0 \\ L_1 V(0,y) = L_2 V(l_1,y) = 0 \\ L_3 V(l,0) = L_4 V(x,l_2) = 0 \end{cases}$$ — двумерная задача Ш.-Л.

$$V(x,y) = X(x)\, Y(y) \qquad \begin{cases} X'' + \mu X = 0 \\ L_1 X(0) = L_2 X(l) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \lambda = 0$$

$$\tilde{V}_{mn} = \tilde{X}_m(x)\, \tilde{Y}_n(y) \qquad \begin{cases} Y'' + \nu Y = 0 \\ L_3 Y(0) = L_4 Y(l_2) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_{mn} = \mu_m + \nu_n$$

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}(t) \cdot \tilde{V}_{mn}(x,y)$$

$$T''_{mn} + \omega_{mn} T = 0 \qquad \omega_{mn} = a\sqrt{\lambda}$$

$$T_{mn}(t) = a_{mn}\cos\omega_{mn} t + b_{mn}\sin\omega_{mn} t$$

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{mn}\cos\omega_{mn} t + b_{mn}\sin\omega_{mn} t\right)\tilde{X}_{mn}$$

$$\varphi(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\tilde{V}_{mn}(x,y)$$

$$a_{mn} = \left(\varphi(x,y), \tilde{V}_{mn}(x,y)\right) = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \varphi(x,y) \cdot \tilde{V}_{mn}(x,y)\,dx\,dy$$

$$\psi(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}\omega_{mn}\tilde{V}_{mn}(x,y)$$

$$b_{mn} = \frac{1}{\omega_n}\left(\psi(x,y), V_{m,n}(x,y)\right)$$

3 Функции Бесселя

Определение и основные свойства Г-функции.

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty t^{\nu-1} e^{-t}\, dt$$

Свойства: 1) Функция $\Gamma(\nu)$ определена и непрерывна в обл. $0<\nu<\infty$

3) $\Gamma(\nu+1) = \nu\,\Gamma(\nu)$ 2) $\Gamma(\nu)$ не имеет нулей

$$\Gamma(a+k) = (a+k-1)(a+k-2)\ldots(a+1)\Gamma(a)$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1$$ 19

4) $\Gamma(k+1) = k!$ $\Gamma(+\infty) = \lim\limits_{\nu\to+\infty}\Gamma(\nu) = +\infty$

$$\Gamma(0) = \lim_{\nu\to 0}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\nu} = +\infty$$

5) Г-функцию можно распространить и на отрицательные значения ν по формуле $\nu = -n+a$

$$\Gamma(-n+a) = \Gamma(\nu) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\nu} = \frac{\Gamma(a-n+1)}{a-n} = \qquad 0<a<1$$

$$= \frac{\Gamma(a-n+2)}{(a-n)(a-n+1)} = \frac{\Gamma(a)}{(a-n)(a-n+1)\ldots(a-1)}$$

При $a=0$ $\Gamma(-n) = \dfrac{\Gamma(0)}{(-n)(-n+1)\ldots(-1)} = \pm\infty$ → не огранич.

Уравнение Бесселя

$$\begin{cases} \text{I} & y'' + \dfrac{1}{x}y' + \left(1-\dfrac{\nu^2}{x^2}\right) = 0 \\ \text{II} & y''x^2 + xy' + (x^2-\nu^2) = 0 \end{cases}$$

Уравнения Бесселя ν-го порядка

Отыскание решения у. Б. в виде обоб. ср.

$$y = x^\sigma(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots),\ a_0 \neq 0.$$

$$y'x = x^\sigma\big(a_0\sigma + a_1(\sigma+1)x + a_2(\sigma+2)x^2 + \ldots\big)$$

$$y''x^2 = x^\sigma\big(a_0\sigma(\sigma-1) + a_1(\sigma+1)\sigma x + a_2(\sigma+2)(\sigma+1)x^2 + \ldots\big)$$

$$x^{\sigma}\left[a_0\sigma^2 - a_0\nu^2\right] + x^{\sigma+1}\left[a_1(\sigma+1)^2 - a_1\nu^2\right] +$$
$$+ x^{\sigma+2}\left[a_2(\sigma+2)^2 - a_2\nu^2 + a_0\right] +$$
$$\ldots + x^{\sigma+n}\left[a_n(\sigma+n)^2 - a_n\nu^2 + a_{n-2}\right]\ldots = 0$$

Чтобы выражение было $\equiv 0$ надо

$a_0\left[\sigma^2 - \nu^2\right] = 0 \Rightarrow \sigma = \pm\nu$. Пусть $\sigma = \nu$, $a_0 \neq 0$

$a_1\left[(\sigma+1)^2 - \nu^2\right] = 0 \Rightarrow a_1 = 0$.

20

$a_2\left[(\sigma+2)^2 - \nu^2\right] + a_0 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{a_n = \dfrac{-a_{n-2}}{(\sigma+n)^2 - \nu^2}}$

— — — —

$a_n\left[(\sigma+n)^2 - \nu^2\right] + a_{n-2} = 0$ $\boxed{a_n = \dfrac{-a_{n-2}}{(2\nu+n)n}}$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}(\nu+k)(\nu+k-1)\ldots(\nu+1)k!}, \quad a_{2k+1} = 0$$

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+\nu+1)\,\Gamma(k+1)}$$

↳ Функция Бесселя 1го рода

Если $\nu = n$, n-целое, то

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+n}}{\Gamma(k+n+1)\,\Gamma(k+1)}$$

↳ Функция Бесселя целого порядка

Общее решение ур-я Бесселя

Если ν — не целое, то

(1) от замены $(\nu) \to (-\nu)$ ничего не изм.

(2) J_ν и $J_{-\nu}$ линейно независимы.

Общее решение: $\boxed{y_\nu(x) = C_1(\nu) J_\nu(x) + C_2(\nu) J_{-\nu}(x)}$

(2): одна из них J_ν в окрестн. $z=0$ как x^ν, а $J_{-\nu}$ — $x^{-\nu}$

Если $\nu = n$ - целое, то

$J_{-n}(x) \equiv (-1)^n J_n(x)$ Доказательство:

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k-n}}{\Gamma(k-n+1)\Gamma(k+1)} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k-n}}{\Gamma(k-n+1)\Gamma(k+1)}$$

при отриц. целом арг. $\Gamma(x) = \infty$, $\Gamma(k-n+1)$, $k = 0, 1, 2 \dots n-1$

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} (x/2)^{2s+n}}{\Gamma(s+1)\Gamma(s+n+1)} = (-1)^n J_n(x)$$

т.е. $J_{-n}(x)$ и $J_n(x)$ - линейно зависимы.

Тогда вводим Функцию Неймана

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$$ (21)

Для $\nu = n$: $$N_n(x) = \lim_{\nu\to n} N_\nu(x) = \lim \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$$

$$\boxed{y_\nu(x) = C_1(\nu) J_\nu(x) + C_2(\nu) N_\nu(x)}$$

Ортогональность Функций Бесселя

Функции Бесселя $J_\nu(\mu x)$ обладают свойством ортогональности с весом $\rho(x) = x$, т.е $\forall \nu > -1$

$$\int_0^l x J_\nu(\mu_1 x) J_\nu(\mu_2 x)\, dx = 0,$$ где

μ_1 и μ_2 - веществ. корни ур-я $\alpha J_\nu(\mu) + \beta\mu J'_\nu(\mu) = 0$ $\quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha+\beta > 0$

Норма Функций Бесселя

$$\|J_\nu(\mu_1 x)\|^2 = \int_0^1 x J_\nu^2(\mu_1 x)\, dx = \frac{1}{2}\left\{ [J'_\nu(\mu_1)]^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_1^2}\right) J_\nu^2(\mu_1)\right\}$$

$\mu \neq 0$, $t = \mu x$

$$x^2 y'' + x y' + (\mu^2 x^2 - \nu^2) y = 0 \qquad J\left(\mu\frac{x}{2}\right)$$

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + (t^2 - \nu^2) y = 0$$

$$X: \left| x^2 \frac{d^2 J_\nu(\mu x)}{dx^2} + x\frac{dJ_\nu(\mu x)}{dx} + (\mu^2 x^2 - \nu^2) J_\nu(\mu x) = 0\right.$$

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_\nu(\mu x)}{dx}\right] + \left(\mu^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right) J_\nu(\mu x) = 0$$

$$-\int_0^1 \left| \frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_\nu(\mu_1 x)}{dx}\right] + \left(\mu_1^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right) J_\nu(\mu_1 x) = 0 \right| J_\nu(\mu_2 x)$$

$$\int_0^1 \left| \frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_\nu(\mu_2 x)}{dx}\right] + \left(\mu_2^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right) J_\nu(\mu_2 x) = 0 \right| J_\nu(\mu_1 x)$$

22

$$\underbrace{-\int_0^1 \frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_\nu(\mu_2 x)}{dx}\right] J_\nu(\mu_1 x)\,dx + \int_0^1 \frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_\nu(\mu_1 x)}{dx}\right] J_\nu(\mu_2 x)\,dx}_{\text{ЛЧ}}$$

$$\underbrace{-(\mu_1^2 - \mu_2^2)\int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x) J_\nu(\mu_2 x)\,dx}_{\text{ПЧ}} = 0$$

$\int$ по частям

$$\text{ЛЧ} = x\frac{dJ_\nu(\mu_1 x)}{dx} J_\nu(\mu_2 x)\Big|_0^1 - x\frac{dJ_\nu(\mu_2 x)}{dx} J_\nu(\mu_1 x)\Big|_0^1 -$$

$$- \int_0^1 x\frac{dJ_\nu(\mu_1 x)}{dx}\cancel{\frac{dJ_\nu(\mu_2 x)}{dx}}\,dx + \int_0^1 x\frac{dJ_\nu(\mu_2 x)}{dx}\cancel{\frac{dJ_\nu(\mu_1 x)}{dx}}\,dx =$$

(из-за $\frac{dJ}{dx} = \mu\frac{dJ}{d\mu x}$)

$$= \left(x\left[\mu_1 J_\nu'(\mu_1 x) J_\nu(\mu_2 x) - \mu_2 J_\nu'(\mu_2 x) J_\nu(\mu_1 x)\right]\right)\Big|_0^1$$

но $\alpha J_\nu(\mu_1) + \beta \mu_1 J_\nu'(\mu_1) = 0$

$\alpha J_\nu(\mu_2) + \beta \mu_2 J_\nu'(\mu_2) = 0$

$$\Delta = \mu_2 J_\nu(\mu_1) J_\nu'(\mu_2) - \mu_1 J_\nu(\mu_2) J_\nu'(\mu_1) = 0$$

$$\Rightarrow \text{ЛЧ} = 0 \Rightarrow \int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x) J_\nu(\mu_2 x)\,dx = 0$$

$$\|J_\nu(\mu x)\|^2 = \int_0^1 x J_\nu^2(\mu x)\,dx = \lim_{\mu_2\to\mu_1} \frac{\mu_1 J_\nu(\mu_2) J_\nu'(\mu_1) - \mu_2 J_\nu(\mu_1) J_\nu'(\mu_2)}{\mu_2^2 - \mu_1^2} =$$

$$= \frac{1}{2} J_\nu'(\mu_1)^2 - \frac{1}{2\mu} J_\nu(\mu_1)\times\left[J_\nu'(\mu_1) - \mu_1 J_\nu''(\mu_1)\right]$$

из ур-я $J_\nu''(\mu_1) + \frac{1}{\mu_1} J_\nu'(\mu_1) = -\left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_1^2}\right) J_\nu(\mu_1)$

$$\|J_\nu(\mu x)\|^2 = \frac{1}{2}\left\{ \left[J_\nu'(\mu)\right]^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right) J_\nu^2(\mu)\right\}$$

Рекуррентные соотношения для ф Бесселя

(1) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}$$

(2) $$\frac{d}{dx}\left(x^\nu J_\nu(x)\right) = x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

(23)

(3) $$\frac{2\nu J_\nu(x)}{x} = J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x)$$

Колебания круглой мембраны

$$u = u(r, \varphi, t)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right) \\ u(r_0, \varphi, t) = 0 \\ u(r, \varphi, 0) = f_1(r, \varphi) \\ u'_t(r, \varphi, 0) = f_2(r, \varphi) \end{cases} \qquad u = T(t)\, V(r, \varphi)$$

$$T'' V = a^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right) T(t)$$

$$\frac{T''(t)}{a\,T(t)} = \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}}{V(r, \varphi)} = -\lambda$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right) + \lambda V(r, \varphi) = 0 \\ V(r_0, \varphi) = 0 \end{cases} \qquad V(r, \varphi) = \Phi(\varphi) R(r)$$

$$\Phi(\varphi)\left(R''(r) + \frac{1}{r} R'(r)\right) + \frac{1}{r^2}\Phi''(\varphi) R(r) + \lambda \Phi(\varphi) R(r) = 0$$

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\frac{R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \lambda R(r)}{\frac{1}{r^2} R(r)} = -k$$

1) $\underbrace{\Phi''(\varphi) + k\Phi(\varphi) = 0 \qquad \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)}$

2) $$\begin{cases} R''(r) + \dfrac{1}{r} R' + \left(\lambda - \dfrac{k}{r^2}\right) R(r) = 0 \\ R(r_0) = 0 \end{cases}$$

---

1) $$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + k\Phi(\varphi) = 0 \\ \Phi(2\pi + \varphi) = \Phi(\varphi) \end{cases}$$

а) $k<0$ $\quad \Phi(\varphi)=C_1 e^{\sqrt{-k}\,\varphi}+C_2 e^{-\sqrt{-k}\,\varphi}$

б) $k=0$ $\quad \Phi(\varphi)=C_1\varphi+C_2 \quad \Phi(\varphi)\equiv C_2$

$\Phi_0(\varphi)=C_0$

в) $k>0$ $\quad \Phi(\varphi)=C_1\cos\sqrt{k}\,\varphi+C_2\sin\sqrt{k}\,\varphi$

24

$$\begin{cases}\Phi_n=C_{1n}\cos\sqrt{k}\,\varphi+C_{2n}\sin\sqrt{k}\,\varphi, & k=1,2\ldots\\ \Phi_0=C_0, & k=0\end{cases} \qquad n^2=k$$

2) $R_n''+\frac{1}{r}R_n'+\left(\lambda-\frac{n^2}{r^2}\right)R_n=0$

Ур-е Эйлера

а) $\lambda=0$ Замена $r=e^t$ $\quad \boxed{p=\frac{d}{dt}}$

$p(p-1)R_n(t)+pR_n(t)-n^2R_n(t)=0$

$(p^2-n^2)R_n(t)=0 \quad p_{1,2}=\pm n$

$R_n(t)=C_n^{(1)}e^{nt}+C_n^{(2)}e^{-nt}$

$R_n(r)=C_n^{(1)}r^n+C_n^{(2)}\frac{1}{r^n}$ $\quad$ 1) $|R_n(0)|<\infty \Rightarrow C_n^{(2)}=0$.

2) $R_n(r_0)=0 \Rightarrow C_n^{(1)}=0 \Rightarrow R_n(r)\equiv 0$.

б) $\lambda>0$ $\quad R_n(r)=C_n^{(1)}J_n(\sqrt{\lambda}\,r)+C_n^{(2)}Y_n(\sqrt{\lambda}\,r)$

$|R_n(0)|<\infty \Rightarrow C_n^{(2)}=0$.

$\Rightarrow R_n(r)=C_n^{(1)}J_n(\sqrt{\lambda}\,r) \quad J_n(\sqrt{\lambda}\,r_0)=0$.

$\lambda_{nm}=\left(\frac{\mu_{nm}}{r_0}\right)^2 \quad J_n(\mu)=0 \quad \mu_{n1}<\mu_{n2}<\ldots<\mu_{nm}<$

$R_{nm}(r)=C_n^1 J_n\left(\mu_{nm}\frac{r}{r_0}\right)$ $\quad n=0,1\ldots$ $\quad m=1,2\ldots$

$\|R_{nm}\|^2=C_n^{(1)2}\int_0^{r_0} r\,J_n^2\left(\frac{\mu_{nm}}{r_0}r\right)dr=\left[x=\frac{r}{r_0}\right]=$

$=C_n^{(1)2}r_0^2\int_0^1 x J_\nu^2(\mu_{\nu m}x)\,dx=C_n^{(1)2}r_0^2\frac{1}{2}\Big\{[J_\nu'(\mu_{\nu m})]^2+$

$+\left(1-\frac{\nu^2}{\mu_{\nu m}^2}\right)\underbrace{J_\nu^2(\mu_{\nu m})}_{=0}\Big\}=C_n^{(1)2}\frac{r_0^2}{2}\left[J_\nu'(\mu_{\nu m})\right]^2$ $\quad \nu=n$

$$\tilde{R}_{nm}(r)=\frac{\sqrt{2}}{r_0 J_\nu'(\mu_{\nu m})}J_n\left(\frac{\mu_{\nu m}}{r_0}r\right)$$

Временная задача: $T''_{mn} + a^2 \lambda_{mn} T_{nm} = 0$

$$T_{mn} = a_{nm} \cos(\omega_{nm} t) + b_{nm} \sin(\omega_{nm} t)$$

$$\omega_{nm} = a\sqrt{\lambda_{nm}}$$

$$u_{n,m}(r, \varphi) = (C_{1n} \cos\varphi + C_{2n} \sin\varphi) \tilde{R}_{nm}(r)$$

$$u_{nm}(r, \varphi, t) = \sum_{\substack{n=0 \\ m=1}}^{\infty} (a_{nm} \cos\omega_{nm} t + b_{nm} \sin\omega_{nm} t) \times$$

$$\times (C_{1n} \cos n\varphi + C_{2n} \sin n\varphi) \tilde{R}_{nm}(r) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Big\{ C_{1n} \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha^{(1)}_{nm} \cos\omega_{nm} t + \alpha^{(2)}_{nm} \sin\omega_{nm} t) \tilde{R}_{nm}(r) \cos n\varphi +$$

$$+ C_{2n} \sum_{m=1}^{\infty} (\beta^{(1)}_{nm} \cos\omega_{nm} t + \beta^{(2)}_{nm} \sin\omega_{nm} t) \tilde{R}_{nm}(r) \sin n\varphi \Big\}$$

$$u_{nm}(r, \varphi, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big\{ C_{1n} \Big(\sum_{m=1}^{\infty} \alpha^{(1)}_{nm} \tilde{R}_{nm}(r) \Big) \cos n\varphi +$$

$$+ C_{2n} \Big(\sum_{m=1}^{\infty} \beta^{(1)}_{nm} \tilde{R}_{nm}(r) \Big) \sin n\varphi \Big\} = f_1(r, \varphi) =$$

$$= \frac{A_0^{(1)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{ A^{(1)}_n \cos n\varphi + B^{(1)}_n \sin n\varphi \}$$

25

$$A^{(1)}_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(r, \varphi) \cos n\varphi \, d\varphi \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

$$B^{(1)}_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(r, \varphi) \sin n\varphi \, d\varphi \qquad n = 1, 2 \ldots$$

$$u'_{nm}(r, \varphi, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big\{ C_{2n} \sum_{m=1}^{\infty} \beta^{(1)}_{nm} \tilde{R}_{nm}(r) (\cos n\varphi) \omega_{nm}$$

$$+ C_{2n} \sum_{m=1}^{\infty} \beta^{(1)}_{nm} \omega_{nm} \tilde{R}_{nm}(r) \sin n\varphi \Big\} = -f_2(r, \varphi)$$

$$A^{(2)}_n = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(r, \varphi) \cos n\varphi \, d\varphi \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

$$B^{(2)}_n = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(r, \varphi) \sin \varphi \, d\varphi \qquad n = 1, 2 \ldots$$

$$\alpha^{(1) \to 2}_{nm} = \frac{1}{\omega_{nm}} \int_0^{r_0} r A^{(1) \to 2}_n(r) \tilde{R}_{nm}(r) \, dr$$

$$\beta^{(1) \to 2}_{nm} = \frac{1}{\omega_{nm}} \int_0^{r_0} r B^{(2) \to 2}_n(r) \tilde{R}_{nm}(r) \, dr$$

Определение функции Грина для гиперболической смешанной задачи

26

$u = u(\bar{x}, t) = u(x_1, x_2, x_3 \dots x_n, t)$

$$
\mathrm{I}\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(\vec{x}, t), & \vec{x} \in D \subset \mathbb{R}^k \\
\left(\alpha u + \beta \dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_S = 0 & t \in R_+ \\
u(\vec{x}, 0) = \varphi(\vec{x}) & \alpha \geq 0 \\
u_t(\vec{x}, 0) = \psi(\vec{x}) & \beta \geq 0
\end{cases}
$$

$\alpha + \beta > 0$

Функция Грина $G(\vec{x}, \xi, t)$, $\vec{x} \in D$, $\vec{\xi} \in D$, $t \in R_+$ задачи I называется решением ур-я $\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = a^2 \Delta G$, $\vec{x} \in D \subset \mathbb{R}^k$, $t \in R_+$ удовлетворяющего граничным условиям $\left(\alpha G + \beta \frac{\partial G}{\partial n}\right)_S = 0$ и Н.У. $G(\vec{x}, \vec{\xi}, 0) = 0$

Если струна возбуждена $G'_t(\vec{x}, \vec{\xi}, 0) = \delta(\vec{x} - \vec{\xi})$ распределённым импульсом I, то по зак. Н. $dI = dM \cdot u_t(x, 0)$, $I = \int_0^l u_t(x,0)\,\rho(x)\,dx$

В точке ξ действует $u_t(x, 0) = \frac{I}{\rho(\xi)} \cdot \delta(x - \xi)$

Физический смысл функции Грина.

Ф.Г. для гиперболического ур-я – реакция физической системы на мгновенно переданный ей импульс в $t = 0$ в т. $x = \xi$

Решение смешанной задачи для гиперб. ур-я с помощью функции Грина

Если решение задачи I существует во всём пространстве, то оно представимо как

$$u(x,t) = \int_D \psi(\xi)\, G(x, \xi, t)\, d\xi + \int_D \varphi(\xi)\, G'_t(x, \xi, t)\, d\xi + \int_0^t \int_D f(\xi, \tau)\, G(x, \xi, t - \tau)\, d\tau\, d\xi$$

Док-во: $\frac{\partial u}{\partial t} = \int_D \varphi(\xi)\frac{\partial G}{\partial t}d\xi + \int_D \psi(\xi)\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}d\xi +$

$+ \int_D f(\xi,t)G(x,\xi,0)d\xi + \int_0^t\int_D f(\xi,\tau)G'_t(x,\xi,t-\tau)d\tau d\xi$

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \int_D \varphi(\xi)\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}d\xi + \int_D \psi(\xi)\frac{\partial^3 G}{\partial t^3}d\xi +$

$\int_D f(\xi,t)G'_t(x,\xi,0)d\xi + \int_0^t\int_D f(\xi,\tau)G'_{tt}(x,\xi,t-\tau)d\tau d\xi$

$+ \int_D f'_t(\xi,t)G(x,\xi,0)d\xi$

$$\begin{cases}(\alpha G + \beta\frac{\partial G}{\partial n})|_S = 0\\ G(x,\xi,0) = 0\\ G'_t(x,\xi,0) = \delta(x-\xi)\end{cases}$$

$\Delta u = \int_D \varphi(\xi)\Delta G d\xi + \int_D \psi(\xi)\Delta G'_t d\xi +$

$+ \int_0^t\int_D f(x,t)\Delta G(x,\xi,t-\tau)d\tau d\xi$

27

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta u = \int_D \varphi(\xi)\underbrace{\left(\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - a^2\Delta G\right)}_{=0}d\xi +$

$+ \int_D \psi(\xi)\underbrace{\left(\frac{\partial^3 G}{\partial t^3} - a^2\Delta G'_t\right)}_{=0}d\xi + \int_0^t\int_D f(\xi,\tau)\underbrace{\left(\frac{\partial^2 G(x,\xi,t-\tau)}{\partial t^2} - a^2\Delta G(x,\xi,t-\tau)\right)}_{=0} + \int_D [f(\xi,t)G'_t(x,\xi,0) -$

$- f'_t(\xi,t)G(x,\xi,0)]d\xi$

$= \int_D f(\xi,t)\delta(x-\xi)d\xi - \underbrace{\int_D f'_t(\xi,t)\cdot 0\, d\xi}_{=0} \boxed{= f(x,t)}$!

Граничные, начальные условие

$\boxed{(\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial n})|_S} = \int_D \varphi(\xi)(\alpha G + \beta\frac{\partial G}{\partial n})|_S d\xi + \int_D \psi(\xi)\frac{\partial}{\partial t}(\alpha G + \beta\frac{\partial G}{\partial n})|_S d\xi +$

$+ \int_0^t\int_D f(\xi,\tau)\times(\alpha G + \beta\frac{\partial G}{\partial n})|_S d\tau d\xi \boxed{= 0}$

$\boxed{u(x,0)} = \int_D \varphi(\xi)G(x,\xi,0)d\xi + \int_D \psi(\xi)\underbrace{G'_t(x,\xi,0)d\xi}$ $=$

$= \int_D \varphi(\xi)\delta(x-\xi)d\xi \overset{=0}{=} \boxed{\varphi(x)}$

$\boxed{u'_t(x,0)} = \int_D \varphi(\xi)G_t(x,\xi,0)d\xi + \int_D \psi(\xi)\frac{\partial^2 G(x,\xi,0)}{\partial t^2}d\xi =$

$= \int_D \psi(\xi)\delta(x-\xi)d\xi - \int_D \varphi(\xi)a^2\Delta G(x,\xi,0)d\xi \boxed{= \psi(x)}$

Функция Грина ур-я колеб. для огранич. обл.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = a^2 \Delta G \\ \left(\alpha G + \beta \frac{\partial G}{\partial n}\right)\Big|_S = 0 \\ G(x,\xi,0) = 0 \\ G'_t(x,\xi,0) = \delta(x-\xi) \\ D \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$G = T(t)\, V(x)$

$T''(t)\, V(x) = a^2 T(t)\, \Delta V(x)$

$$\frac{\Delta V(x)}{V(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda$$

$$\begin{cases} \Delta V(x) + \lambda V(x) = 0 \\ \left(\alpha V + \beta \frac{\partial V}{\partial n}\right)\Big|_S = 0 \end{cases}$$

$\lambda_0 = 0, \quad \tilde{V}_0(x)$

$\omega_n = a\sqrt{\lambda_n}$

$\lambda_n > 0, \quad \tilde{V}_n(x), \; n = 1, 2 \ldots$

$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0$

28

$T_0(t) = a_0 + b_0 t$

$T_n(t) = a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t$

$$G(x,\xi,t) = (a_0 + b_0 t)\tilde{V}_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\omega_n t + b_n \sin\omega_n t)\tilde{V}_n(x)$$

$G(x,\xi,0) = 0 \qquad a_0 \tilde{V}_0(x) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{V}_n(x) = 0$

$\Rightarrow a_0 = 0, \quad a_n = 0.$

$$\delta(x-\xi) = b_0 \tilde{V}_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n \tilde{V}_n(x)$$

$b_0 = (\delta(x-\xi), \tilde{V}_0(x))$

$\omega_n = a\sqrt{\lambda_n}$

$$b_n = \frac{1}{\omega_n}(\delta(x-\xi), \tilde{V}_n(x)) = \frac{\tilde{V}_n(\xi)}{\omega_n}$$

$$G(x,\xi,t) = t\tilde{V}_0(x)\tilde{V}_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\omega_n t}{\omega_n} \tilde{V}_n(x)\tilde{V}_n(\xi)$$

Явление резонанса (исследование с ФГ)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{A}{\rho} \sin \omega t \qquad \begin{matrix} 0 < x < l \\ 0 < t < \infty \end{matrix}$$

$$\begin{cases} u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = u'_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

Построим функ. Грина:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \qquad \lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \qquad \tilde{X}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\omega_n t}{\omega_n} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right)$$

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^l \frac{A}{\rho} \sin\omega\tau\, G(x,\xi,t-\tau)\, d\xi\, d\tau =$$

$$= \frac{2A}{\rho l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sin\omega_n(t-\tau)\sin\omega\tau\, d\tau \int_0^l \sin\frac{n\pi}{l}\xi\, d\xi \, \sin\frac{n\pi}{l}x$$

Если $\omega_n \neq \omega$:

$$\Rightarrow \frac{1}{\omega_n}\int_0^t \sin\omega_n(t-\tau)\sin\omega\tau\, d\tau = \frac{1}{2\omega_n}\int_0^t \Big(\cos[\omega_n t - (\omega_n+\omega)\tau] -$$

$$- \cos[\omega_n t - (\omega_n - \omega)\tau]\Big) d\tau = \frac{1}{2\omega_n}\Big(-\frac{\sin[\omega_n t - (\omega_n+\omega)\tau]}{\omega_n+\omega} +$$

$$+ \frac{\sin[\omega_n t - (\omega_n-\omega)\tau]}{\omega_n - \omega}\Big)\Big|_0^t = \frac{1}{2\omega_n}\Big[\frac{\sin\omega t}{\omega_n+\omega} + \frac{\sin\omega t}{\omega_n-\omega} +$$

$$+ \frac{\sin\omega_n t}{\omega_n+\omega} - \frac{\sin\omega_n t}{\omega_n - \omega}\Big) = \frac{1}{2\omega_n(\omega_n^2-\omega^2)}\left(\omega_n\sin\omega t - \omega\sin\omega_n t\right)$$

Если $\omega_n = \omega$ (29)

$$\Rightarrow \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega(t-\tau)\sin\omega\tau\, d\tau = \frac{1}{2\omega}\int_0^t \big(\cos(\omega t - 2\omega\tau) -$$

$$- \cos\omega t\big)\, d\tau = \frac{1}{2\omega}\Big(-\frac{\sin(\omega t - 2\omega\tau)}{2\omega} - \tau\cos\omega t\Big)\Big|_0^t =$$

$$= \frac{1}{2\omega}\Big(\frac{\sin\omega t}{2\omega} - t\cos\omega t + \frac{\sin\omega t}{2\omega}\Big) = \frac{1}{2\omega^2}\left[\sin\omega t - \omega t\cos\omega t\right]$$

$$\Rightarrow \int_0^l \sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi = -\frac{l}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{l}\xi\Big|_0^l = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \dfrac{2l}{(2k+1)\pi}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{4A}{\rho\pi}\sum_{\substack{k=0\\ k\neq k_0}}^{\infty}\Big\{\frac{1}{(2k+1)}\frac{1}{\omega_{2k+1}(\omega_{2k+1}^2-\omega^2)}\cdot\big(\omega_{2k+1}\sin\omega t -$$

$$- \omega\sin\omega_{2k+1}t\big)\sin\frac{(2k+1)\pi}{l}x\Big\} + \frac{A}{\omega^2}\frac{1}{(2k_0+1)\rho\pi}\left(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t\right)\sin\frac{(2k_0+1)}{l}\pi x$$

Функция Грина смешанной ∇ для параболического ур-я.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u + f(x,t) \\ \left(\alpha u + \beta\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_S = 0 \quad \text{IV} \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

$u(x,t) = u(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, t)$

$x \in D \subset \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}_+$

$\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0 \quad \alpha+\beta > 0$

Функция Грина для задачи IV называется решение $G(x,\xi,t)$ уравнения.

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a^2 \Delta G, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

30

$$\left(\alpha G + \beta \frac{\partial G}{\partial n}\right)\Big|_S = 0$$

$$G(x, \xi, 0) = \delta(x - \xi)$$

Физический смысл ФГ

ФГ для уравнения теплопроводности является описанием нагрева на помещение в момент $t = 0$ в точку ξ точечного источника тепла $Q - Cg$

$$dQ = C \rho u(x, 0)\, dV \quad Q = \int u(x,0)\, C(x,0) \rho(x)\, dV$$

$$Q = \left(A \delta(x-\xi), C(x)\rho(x)\right) \Rightarrow u(x,0) = \frac{Q}{C(\xi)\rho(\xi)} \delta(x-\xi)$$

$$G(x, \xi, 0) = \delta(x - \xi).$$

$$u(x,t) = \int_D G(x,\xi,t)\varphi(\xi)\, d\xi + \int_0^t \int_D G(x,\xi,t-\tau) \times$$

$$\times f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau$$

Для смешанной задачи + конвективный т/о

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u - h u + f(x,t) \\ \left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_S = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

Решение записывается в виде

$$u(x,t) = \int_D \tilde{G}(x,\xi,t)\varphi(\xi)\, d\xi + \int_0^t \int_D \tilde{G}(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial t} = a^2 \Delta \tilde{G} - h\tilde{G} \\ \left(\alpha \tilde{G} + \beta \frac{\partial \tilde{G}}{\partial n}\right)\Big|_S = 0 \\ \tilde{G}(x,0) = \delta(x-\xi) \end{cases}$$

← где $\tilde{G}$ – решение вот такой задачи.

$-h(u - u_0)$ – конвективный обмен через поверхность

$$\tilde{G}(x,\xi,t) = e^{-ht} G(x,\xi,t)$$

$$-h \cancel{e^{-ht}} G + \cancel{e^{-ht}} \frac{\partial G}{\partial t} = a^2 \cancel{e^{-ht}} - h \cancel{e^{-ht}} G$$

Док-во $\Rightarrow \tilde{G}$ действительно $= G(x,\xi,t)$

Док-во

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u + hx = \int_D \varphi(\xi)\left(\frac{\partial \tilde{G}}{\partial t} - a^2 \Delta \tilde{G} + h\tilde{G}\right) d\xi +$$

$$+ \int_D \int_0^t f(\xi,\tau)\left(\frac{\partial \tilde{G}}{\partial t} - a^2 \Delta \tilde{G} + h\tilde{G}\right) d\xi\, d\tau + \int_D f(\xi,t)\tilde{G}(x,\xi,0)\, d\xi =$$

$$= \int_D f(x,t)\,\delta(x-\xi) = f(x,t)$$

Функция Грина для параболического уравнения в ограниченной области

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial t} = a^2 \Delta G \\ \left(\alpha G + \beta \dfrac{\partial G}{\partial n}\right)\Big|_S = 0 \\ G(x, \xi, 0) = \delta(x-\xi) \end{cases}$$

$G = T(t)\, V(x)$

$T'(t) V(x) = a^2 T(t) \Delta V(x)$

$\dfrac{\Delta V(x)}{V(x)} = \dfrac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda$

$$\begin{cases} \Delta V(x) + \lambda V(x) = 0 \\ \left(\alpha V + \beta \dfrac{\partial V}{\partial n}\right)\Big|_S = 0 \end{cases} \to \tilde{V}_n(x),\ \lambda_n$$

$n = 1, 2, \ldots$

$\lambda_0,\ \tilde{V}_0(x)$

$T_n'(t) + a^2 \lambda_n T_n(t) = 0, \quad \lambda_n \geq 0$

$T_n(t) = a_n e^{-a^2 \lambda_n t} \qquad G = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e^{-a^2\lambda_n t} \tilde{V}_n(x)$

$G(x, \xi, 0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{V}_n(x) = \delta(x-\xi)$

31

$a_n = (\delta(x-\xi), \tilde{V}_n(x)) = \tilde{V}_n(\xi)$

$G(x, \xi, t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n a^2 t}\, \tilde{V}_n(x)\, \tilde{V}_n(\xi)$

5 Интегральные преобразования

Двусторонние прямое и обратное комплексное преобразование Фурье.

Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ абсолютно интегрируема на каждом конечном отрезке $(-\infty, +\infty)$

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty$, тогда определены прямое и обратное пр. Фурье:

$$\tilde{f}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega)\, e^{ikx}\, dk$$

$f(x)$ – прообраз

$\tilde{f}(k)$ – Фурье-образ.

прямое

обратное

Вывод формулы Даламбера с помощью преобразований Фурье

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -\infty < x < +\infty \\ & 0 < t < +\infty \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u'_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

32

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} e^{-ikx} dx = a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} e^{-ikx} dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} e^{-ikx} dx = \frac{d}{dt^2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-ikx} dx = \frac{\partial^2 \bar{u}(k,t)}{\partial t^2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} e^{-ikx} dx = \left[\begin{matrix} U = e^{-ikx} & dU = -ike^{-ikx} dx \\ dV = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & V = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} e^{-ikx} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + ik \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} e^{-ikt} dx =$$

$$= \left[\begin{matrix} U = e^{-ikt} & dU = -ike^{-ikt} \\ dV = \frac{\partial u}{\partial x} dx & V = u(x,t) \end{matrix} \right] = i^2 k^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-ikx} dx = -k^2 \bar{u}(k,t)$$

подставим в ур-е

$$\frac{d^2 \bar{u}(k,t)}{dt^2} + \underbrace{k^2 a^2}_{\omega^2} \bar{u}(k,t) = 0$$

$$\bar{u}(k,0) = \bar{\varphi}(k) = ? \qquad \bar{\varphi}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-ikx} dx$$

$$\bar{u}'_t(k,0) = \bar{\psi}(k) = ? \qquad \bar{\psi}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-ikx} dx$$

$$\bar{u}(k,t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \qquad \omega = ak$$

$$\bar{u}(k,0) = \bar{\varphi}(k) \Rightarrow C_1 = \bar{\varphi}(k)$$

$$\bar{u}'_t(k,0) = C_2 \underset{= ak}{\omega} = \bar{\psi}(k) \qquad C_2 = \frac{\bar{\psi}(k)}{ak}$$

$$\bar{u}(k,t) = \bar{\varphi}(k) \cos \omega t + \frac{\bar{\psi}(k)}{ak} \sin \omega t$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{u}(k,t) e^{ikx} dk =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar\varphi(\omega)\cos\omega t\, e^{ikx}\,dk}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar\psi(k)}{ak}\sin\omega t\, e^{ikx}\,dk}_{I_2}$$

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar\varphi(k)\cos(\omega t)\cdot e^{ikx}\,dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar\varphi(k)\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}e^{ikx}\,dk$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar\varphi(k)e^{i(\overset{ka}{\omega t}+kx)}\,dk + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar\varphi(k)e^{i(kx-\overset{ka}{\omega t})}\,dk\right) = \boxed{\frac{\omega}{k}=a}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\varphi\left(\frac{\omega}{k}t+x\right)+\varphi\left(-\frac{\omega}{k}t+x\right)\right) = \frac{\varphi\left(x+\frac{\omega}{k}t\right)+\varphi\left(x-\frac{\omega}{k}t\right)}{2}$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\bar\psi(k)}{ak}\sin\omega t\, e^{ikx}\,dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\bar\psi(k)}{ak}\left(\frac{e^{iakt}-e^{-iakt}}{2i}\right)e^{ikx}\,dk$$

$$= \frac{1}{2a}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar\psi(k)\frac{e^{i(x-at)k}-e^{-i(x+at)k}}{ik}\,dk = \frac{1}{2a}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar\psi(k)\int_{x-at}^{x+at}e^{ik\xi}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}d\xi\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar\psi(k)e^{ik\xi}\,dk = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi}$$

Прямые и обратные синус и косинус преобразования Фурье. 33

Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – кусочно-гладкая функция на каждом конечном отрезке оси и абсолютно интегрируема на полупрямой от 0 до $+\infty$

$$f_s(k) = \bar f(k) = \int_0^{+\infty} f(x)\sin kx\,dx$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\bar f(k)\sin kx\,dk$$

$$f_c(k) = \bar f(k) = \int_0^{+\infty} f(x)\cos kx\,dx$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\bar f(k)\cos kx\,dx$$

<u>sin</u> – преобразование для решения задач с условиями $u(0,t) = \varphi(t)$

<u>cos</u> – преобразование $\to u'_x(0,t) = \psi(t)$

Функция Грина уравнения параболического типа для прямой.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) & -\infty < x < +\infty \\ & 0 < t < +\infty \\ u(x,0) = f(x) & u(x,t) = ? \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} & -\infty < x < \infty \\ & 0 < t < \infty \\ G(x,\xi,0) = \delta(x-\xi) \end{cases}$$

Функция Грина для такой задачи

34

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G}{\partial t} e^{-ikx}\,dx = a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} e^{-ikx}\,dx$$

$$ak = \omega$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{G}(k,t)}{dt} + a^2k^2\,\overline{G}(k,t) = 0 \\ \overline{G}(k,0) = e^{-ik\xi} \leftarrow \overline{G}(k,0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-\xi) e^{-ikx} = e^{-ik\xi} \end{cases}$$

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{G}(k,t) e^{ikx}\,dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2k^2t} e^{ik(x-\xi)}\,dk =$$

$$\Rightarrow J(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2k^2} e^{ik\beta}\,dk \quad (a>0) = ?$$

$$J(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2k^2}\,dk = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \qquad \begin{cases} J'(\beta) = -\dfrac{\beta}{2a^2} J(\beta) \\ J(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{a} \end{cases}$$

$$J'(\beta) = i\int_{-\infty}^{+\infty} k e^{-a^2k^2} e^{ik\beta}\,dk = \begin{bmatrix} u = e^{ik\beta} & du = i\beta e^{ik\beta}dk \\ dv = ke^{-a^2k^2} & v = -\frac{1}{2a^2} e^{-a^2k^2} \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{-\frac{i}{2a^2} e^{-a^2k^2} e^{ik\beta}\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0,\ \text{т.к. } |e^{ik\beta}| = 1} - \frac{\beta}{2a^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2k^2} e^{ik\beta}\,dk$$

$$J(\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{\beta^2}{4a^2}} \Rightarrow \boxed{G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}$$

$$[\beta = x-\xi;\ \alpha^2 = a^2 t]$$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) G(x,\xi,t)\,d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi,\tau) \times$$

$$\times G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi,\tau)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a(t-\tau)^2}}\,d\xi\,d\tau$$

Построение функции Грина для параболического ур-я на полупрямой, усл. I и II рода

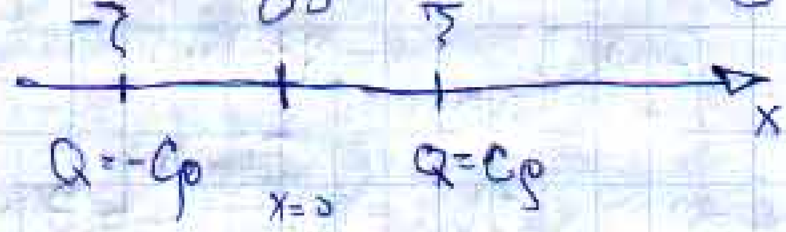
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) \qquad 0 < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty$$

$$\mathrm{I}\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u(0,t) = 0 \end{cases} \qquad \mathrm{II}\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u'_x(0,t) = 0 \end{cases}$$

35

sin - преобразование   cos - преобразование

Воспользуемся методом отражений:



$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \\ G(0,\xi,t) = 0 \\ \mathrm{I}.\ G(x,\xi,0) = \delta(x-\xi) - \delta(x+\xi) \\ \mathrm{II}.\ G(x,\xi,0) = \delta(x-\xi) + \delta(x+\xi) \end{cases}$$

Тогда для зд. I:

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right)$$

Для зд. II: $G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right)$

Построение функции Грина параболического уравнения для пространства любой размерности.

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial t} = a^2 \Delta G \\ G(\bar{x},\bar{\xi},0) = \delta(\bar{x}-\bar{\xi}) \end{cases} \qquad \bar{x}, \bar{\xi} \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

Лемма. Есть задача

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u \\ u(\bar{x},0) = \varphi(\bar{x}) \\ \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

, тогда $\varphi(\bar{x})$ и $u(\bar{x},t)$ представимы в виде:

$$\varphi(\bar{x}) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i)$$

$$u(\bar{x},t) = \prod_{i=1}^{n} u_i(x_i,t)$$

Док-во: для $n=2$!

$$a^2 \Delta u(u_1 u_2) = a^2\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} u_2 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} u_1\right) = \frac{\partial u_1}{\partial t} u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial t} u_1 = \frac{\partial (u_1 u_2)}{\partial t}$$

$$\delta(\bar{x}-\bar{\xi}) = \prod_{i=1}^{n} \delta(x_i - \xi_i) \qquad \frac{\partial G}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 G_i}{\partial x_i^2} \qquad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < \infty$$

$$G(\bar{x},\bar{\xi},t) = \prod_{i=1}^{n} G_i(x_i,\xi_i,t) \qquad G_i(x_i,\xi_i,0) = \delta(x_i - \xi_i)$$

$$G_i(x_i,\xi_i,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x_i-\xi_i)^2}{4a^2 t}}$$

$$G(\bar{x},\bar{\xi},t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{1}{4a^2 t}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\xi_i)^2}$$

6. Уравнения эллиптического типа

Уравнения Лапласа и Пуассона.

1) $\Delta u = \rho(\bar{x})$, $\bar{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ур-е Пуассона.

2) $\Delta u = 0$ – ур-е Лапласа.

Три рода краевых задач для ур-й эл. типа.

1) Задача Дирихле: $u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x)$
на границе →

2) Задача Неймана: $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = \psi(x)$

3) Задача Краснова: $\left(\alpha(x)\, u + \beta(x)\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{\partial\Omega} = \theta(x)$
$\alpha(x)\,\beta(x) \neq 0.$

Задача Неймана не всегда разрешима.
Условие разрешимости: $\displaystyle\underbrace{\iint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = \iint_{\partial\Omega} (\operatorname{grad} u, \bar{n})\, dS}_{} = 0$

1я и 2я формулы Грина.

Ω – область, $\partial\Omega = S$

36

$\bar{A}(\bar{r})$, $\bar{r} = (x, y, z)$

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} \bar{A}\, d\Omega = \iint_S (\bar{A}, \bar{n})\, dS \quad (*)$$

Пусть $\bar{A} = u\nabla v = u \operatorname{grad} v$, тогда

$(\bar{A}, \bar{n}) = u(\nabla v, \bar{n}) = u\dfrac{\partial v}{\partial n}$

$\operatorname{div} \bar{A} = (\nabla, u\nabla v) = (\nabla u, \nabla v) + u(\nabla, \nabla v) =$
$= u\Delta v + (\nabla u, \nabla v)$. Подставим в $(*)$.

$$(1)\quad \iiint_\Omega u\Delta v\, d\Omega = \iint_S u\frac{\partial v}{\partial n}\, dS - \iiint_\Omega (\nabla u, \nabla v)\, d\Omega$$

$$(2)\quad \iiint_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\, d\Omega = \iint_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS$$

↳ получается заменой $u \rightleftarrows v$ в (1) и вычитанием одной формулы из другой.

Определение и примеры гармонической функции.

Функция называется гармонической в области $\Omega \subset \mathbb{R}^k (k \geq 1)$, если она дважды дифференцируема в ней и удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots = 0$

Примеры: 1) линейная функция $- \mathbb{R}^k, k \geq 1$

2) $f(r) = \frac{1}{|r|}, |r| \neq 0$. в $\mathbb{R}^3$ $\quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

3) $f(r) = \ln \frac{1}{|r|}$ в $\mathbb{R}^2$, $|r| \neq 0$. $\quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Свойства гармонических функций.

1) Интегральное представление г. ф.

$k = 3, \mathbb{R}^3 \quad V(\xi) = \frac{1}{|\xi - r|} = \frac{1}{r_{x\xi}}$

37

Лемма: $\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(|r|)$. Согласно лемме $\Delta V(\xi) = -4\pi \delta(|r - \xi|)$. Берем любую $u(x)$, гармоническую в области Ω, по 2ой формуле Грина $-4\pi u(x) = \iint\limits_S \left[u(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi}\left(\frac{1}{r_{\xi x}}\right) - \frac{1}{r_{\xi x}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n_\xi} \right] dS \Rightarrow$

$$\boxed{u(x) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left[\frac{1}{r_{\xi x}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n_\xi} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi}\left(\frac{1}{r_{x\xi}}\right) \right] dS}$$

2) Поток градиента гармонической функции через границу замкнутой области равен нулю.

$\iint\limits_S (\nabla u, \bar{n})\, dS = \iint\limits_S \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} dS, = 0$. это следует из 2ой формулы Грина $\Rightarrow v(x) \equiv 1 \Rightarrow \boxed{0 = -\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} dS}$

3). Связь с аналитической ФКП: всякая гармоническая функция 2^х переменных x и y является Re или Im аналитической функции ФКП.

$u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$ или $u(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$

$f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$. Вып. усл. Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \qquad \Rightarrow \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0$$

4) Теорема о среднем для гарм. функций.

Для $\forall x \in \Omega$, где Ω - область гармонич. и любой сферы $S = \{\xi : |x - \xi| = a\}$ целиком в Ω

$$u(x) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_S u(\xi)\, dS_\xi$$

По интегральному представлению

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\frac{1}{r_{\xi x}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi}\left(\frac{1}{r_{\xi x}}\right)\right] dS$$

$$r_{\xi x} = a \Rightarrow u(x) = \cancel{\frac{1}{4\pi a} \underbrace{\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS}_{=0 \text{ нет источника}}} - \frac{1}{4\pi} \iint_S u(\xi) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2} \iint u(\xi)\, dS$$

38

5) Теорема о минимуме и максимуме гармонической функции.

Максимальное и минимальное значение функции в замкнутой области достигается на границе этой области

$U(M) = U_{max} \quad |U(\xi)| < U_{max}$

$$U_{max} = U(M) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_S u(\xi) dS < \frac{U_{max}}{4\pi a^2} \iint_S dS =$$

$$= \frac{U_{max}}{\cancel{4\pi a^2}} \cancel{4\pi a^2} = U_{max} \qquad U_{max} < U_{max} ?$$

$\Rightarrow U_{max}$ на границ.

4 следствия из теоремы о максимуме и минимуме.

1) Если на границе области гармоническая функция $u(x) \equiv 0$, то она $u(x) \equiv 0$ во всей области.

2) Если на границе области гарм. функции $u_1(x)\big|_S = u_2(x)\big|_S$, то $u_1(x) \equiv u_2(x)$ во всей $S + \Omega$.

3) Если $\left.\begin{matrix} (u_1(x) - u_2(x))\big|_S < \varepsilon \\ u_{max} < \varepsilon \end{matrix}\right\} \Rightarrow |u_1(x) - u_2(x)|_\Omega \le u_{max} < \varepsilon$

4) Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона единственно и непрерывно зависит от граничного условия

$\begin{cases} \Delta u = f(x) \\ u\big|_S = \varphi(x) \end{cases}$ Единственность $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — решения ур-я Пуассона и $u_1(x)\big|_S \equiv u_2(x)\big|_S = \varphi(x)$

Тогда $u_1(x) \equiv u_2(x)$, $x \in \Omega$

Корректность: пусть ищутся 2 функции:
$u_1\big|_S = \varphi(x)$, $u_2\big|_S = \psi(x)$, $|\varphi(x) - \psi(x)| < \varepsilon$,
$\forall x \in \Omega: |u_1(x) - u_2(x)| < \varepsilon$

Метод электростатических отображений для построения функции Грина.

$\begin{cases} \Delta u = f(x) \\ u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x) \end{cases} \xRightarrow{\text{Дирихле}} \begin{cases} \Delta G = -\delta(x - \xi) \\ G\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$ реакция на точечный заряд

$\begin{cases} \Delta u = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = \psi(x) \end{cases} \xRightarrow{\text{Нейман}} \begin{cases} \Delta G = -\delta(x - \xi) \\ \frac{\partial G}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$

$$u(x) = -\iint\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial n} \varphi(\xi)\, dS_\xi + \iint\limits_{\partial\Omega} \psi(\xi) G(x,\xi)\, dS_\xi - \iiint\limits_\Omega f(\xi) G(x,\xi)\, d\xi$$

$$\begin{cases}\Delta u = f(x) \\ \left.\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_S = \varphi(x)\end{cases} \quad \begin{cases}\Delta G = -\delta(x-\xi) \\ \left.\left(\alpha G + \beta \frac{\partial G}{\partial n}\right)\right|_S = 0\end{cases}$$

$$u(x) = \iint_S \frac{\varphi(\xi)}{\beta(\xi)} G(x,\xi)\, dS - \iiint_\Omega G(x,\xi) f(\xi)\, d\Omega$$

$$G(x,\xi) = \frac{1}{4\pi r_{x\xi}} + V(x,\xi)$$

$$\Delta\left(\frac{1}{4\pi r_{x\xi}}\right) + \Delta(V(\xi)) = -\delta(x-\xi)$$

40

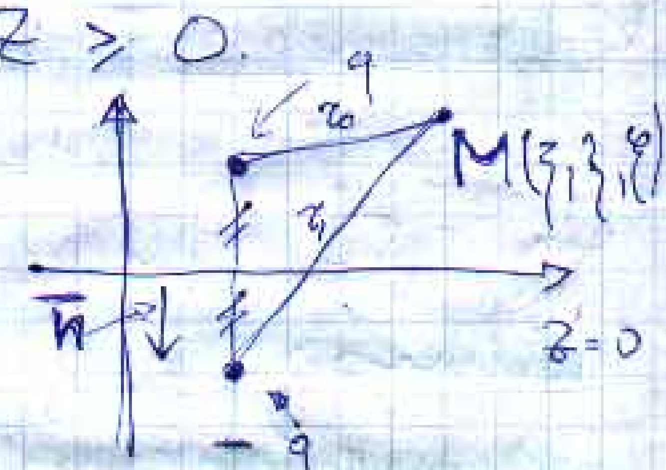
$$\begin{cases}\Delta V(\xi) = 0, \quad \xi \in \Omega \\ \left.\left(\alpha V + \beta \frac{\partial V}{\partial n}\right)\right|_{\partial\Omega} = \underbrace{-\frac{1}{4\pi} \times \left(\alpha \frac{1}{r_{x\xi}} + \beta \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{x\xi}}\right)\right)}_{\text{индуцированный заряд}}\end{cases}$$

Таким образом индуцированный на границе металлизированной области из соображений симметрии заменяем на заряд вне области.

Построение функции Грина для полупр. и решение задачи Дирихле для ур-я Лапласа в верхнем полупространстве.

$$\begin{cases}\Delta u = 0 \\ u(x,y,z)\big|_{z=0} = \varphi(x,y,z)\end{cases} \qquad z \geq 0.$$

$$\begin{cases}\Delta G = 0 \\ G(x,y,z)\big|_{z=0} = 0\end{cases}$$



$$G = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta+z)^2}}\right)$$

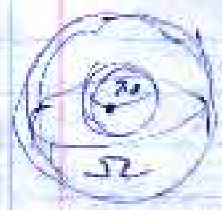
$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{z=0} = -\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0} = -\frac{1}{4\pi}\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\zeta}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2\right]^{3/2}}$$

$$u(x,y,z) = -\iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(\xi,\eta)\frac{\partial G}{\partial n}\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(\xi,\eta)\cdot z\,\frac{1}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right]^{3/2}}\, d\eta\, d\xi$$

Несобственные кратные интегралы.

Определение. Рассмотрим $F(\xi)$, $\xi \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, непрерывную во всех точках, кроме $x_0 \in \Omega$ (особая точка), в которой она не ограничена.



В любой окрестности $O(x_0) \subset \Omega$ $\exists$ интеграл

$$\iiint\limits_{\Omega \setminus O(x_0)} F(\xi) d\xi, \text{ где } d\xi = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = J$$

41

Пусть $\{O_\varepsilon(x_0)\}$ - окрестность x_0, для которой $\operatorname{diam} O_\varepsilon(x_0) \to 0$ при $\varepsilon \to +0$

Если $\exists \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \iiint\limits_{\Omega \setminus O_\varepsilon} F(\xi) d\xi = J$, то говорят, что интеграл $\iiint\limits_{\Omega} F(\xi) d\xi$ сходится и равен J.

Для неотрицательных функций достаточно найти одно семейство интегралов, остальные будут вести себя аналогично.

Эталонный интеграл и признак сравнения.

1) $$\iiint\limits_{|\xi|<1} \frac{d\xi}{|\xi|^\alpha} = \begin{cases} \alpha < 3 - \text{сходится} \\ \alpha \geq 3 - \text{расходится}. \end{cases}$$

2) Если $|F(\xi)| < \varphi(\xi)$, при этом $\iiint\limits_{\Omega} \varphi(\xi) d\xi$ - сходится, то и $\iiint\limits_{\Omega} F(\xi) d\xi$ - сходится.

$$\iiint\limits_{|\xi|<1} \frac{d\xi}{|\xi|^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0} \iiint\limits_{\varepsilon<|\xi|<1} \frac{d\xi}{|\xi|^\alpha} = \lim_{\xi \to +0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \cdot$$

$$\cdot \int \frac{r^2 dr}{r^\alpha} = 4\pi \lim_{\xi \to 0} \int_{\xi}^{1} r^{2-\alpha} dr = \begin{cases} +\infty, & \alpha \geq 3 \\ \frac{4\pi}{3-\alpha}, & \alpha < 3 \end{cases}$$

Несобственные интегралы, зависящие от пар.

$F(x,\xi)$, $x \in \mathbb{R}^3$, $\xi \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, $J(x) = \iiint\limits_{\Omega} F(x,\xi) d\xi$ равномерно сходится в т. x_0

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall O(x_0), \operatorname{diam} O(x_0) < \delta) \left| \iiint\limits_{O(x_0)} F(x_0,\xi) d\xi \right| < \varepsilon$

Определение и св-ва объемного потенциала

Пусть $\rho(\xi)$ – непрерывна в области $\Omega \in \mathbb{R}^3$, т.е. $\rho(\xi) \in C(\Omega)$, тогда 12

$U(x) = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(\xi) d\xi}{r_{x\xi}}$ – называется объемным ρ потенциалом по обл Ω с об. заряд.

Свойства: 1) функция $U(x)$ определена и непрерывна во всем $\mathbb{R}^3$

2) $U(x)$ непрерывно дифференцируема

3) $U(x)$ является гармонической вне области расположения объемных зарядов. $\Delta U(x) = 0$, $x \notin \Omega$

4) Если $x \in \Omega$, то функция удовлетворяет уравнению Пуассона $\boxed{\Delta U = -4\pi \rho(x)}$

5) $U(x) \to 0$ $|x| \to +\infty$

(издали любая область выглядит как точечный заряд и спадает как $\frac{1}{r} \to 0$)

Поверхность Ляпунова. Определение и свойства потенциала простого слоя.

Поверхность S в $\mathbb{R}^3$ называется поверхностью Ляпунова, если:

1) В каждой точке $\xi \in S$ $\exists$ касательная плоскость с $\vec{n}_\xi$

2) $\forall \xi \in S$ найдется такая окрестность, что прямая, проходящая параллельно вектору нормали $\vec{n}_\xi$ через произвольную точку данной площади пересечет поверхность лишь в данной точке.

3) для угла γ между $\vec{n}_\xi$ и $\vec{n}_\eta$ справедлива оценка: $\gamma \le C r_{\xi\eta}^{\delta}$ $(0 < \delta \le 1)$

Определение и свойства потенц. прост.-слоя

Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная поверхность Ляпунова, а $\mu(\xi)$ – ограниченная непрерывная функция на S. Тогда интеграл

$V(x) = \iint\limits_S \frac{\mu(\xi)}{r_{x\xi}} dS_\xi$ называется потенциалом простого слоя с поверхностной плотностью зарядов $\mu(\xi)$

43

Свойства: 1) п.п.с определен в $\mathbb{R}^3$

2) п.п.с. непрерывен в $\mathbb{R}^3$

3) Градиент $V(x)$ существует и непрерывен вне поверхности, а на самой поверхности терпит скачок $4\pi\mu(x)$.

$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)\Big|_e = \frac{\partial V}{\partial n} - 2\pi\mu(x)$; $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)\Big|_i = \frac{\partial V}{\partial n} + 2\pi\mu(x)$

4) Если $x \notin S$, то $\Delta V = 0$ (гармонич.)

5) Если S - огранич., то $\lim\limits_{|x| \to \infty} V(x) = 0$.

Определение и свойства потенциала двойного слоя.

Пусть S - двусторонняя поверхность Ляпунова с выбранным направлением нормали $\bar{n}_\xi$, $\nu(\xi)$ - непрерывная функция. Интеграл: $W(x) = \iint\limits_S \nu(\xi) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{x\xi}}\right) dS_\xi$ – п. д. с.

1) П.д.с. определен в $\mathbb{R}^3$. 2) п.д.с. непр. в $\mathbb{R}^3$, $x \notin S$

3) сам потенциал $W(x)$ $\exists$ и непр., на самой пов. терпит разрыв 1-го рода скачок $W_e - W_i = 4\pi\nu(x)$

4) Если $x \notin S$ - $\Delta W = 0$ (функция гармонич.)

5) Потенциал 2-го слоя исчезает на ∞

Гауссов потенциал

В частном случае, когда $\nu(\xi) = \nu_0 = const$

$$W(x) = \nu_0 \iint_S dw_{x\xi}$$

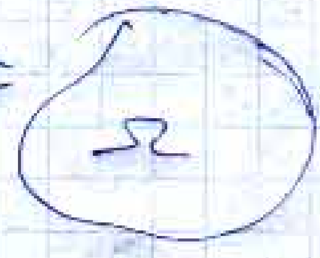
Для замкнутой ограниченной поверхности, обладающей тем свойством, что любой луч пересекает её конечное число раз, Гауссов потенциал равен

$$W(x) = \begin{cases} -4\pi \nu_0, & x \in \Omega \\ -2\pi \nu_0, & x \in S \\ 0, & x \notin \Omega \end{cases}$$

$u(x) = \frac{e}{r}$ в $\mathbb{R}^3$

$u(x) = e \ln \frac{1}{r}$ в $\mathbb{R}^2$

Потенциалы на плоскости



$$u(x) = \iint_\Omega \rho(\xi) \ln \frac{1}{r_{x\xi}} d\xi$$

$d\xi = d\xi_1 d\xi_2$

$$v(x) = \int_C \mu(\xi) \ln \frac{1}{r_{x\xi}} d\xi$$

$$W(x) = \int_C \nu(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{x\xi}} \right) d\xi$$

44

Применение потенциалов для решения краевых задач.

Задача Дирихле для ур-я Пуассона

$$\begin{cases} \Delta u = f(x) \\ u|_S = \varphi(x) \end{cases}$$

$u(M)$ — непр. в $\bar{\Omega} = \Omega + S$

Частное решение — объём. потенц.

$$u_1(x) = \frac{-1}{4\pi} \iiint_\Omega \frac{f(\xi)}{r_{x\xi}} d\xi.$$

Ищем решение в виде $u(x) = u_1(\xi) + u_2(\xi)$

$$\begin{cases} \Delta u_2 = 0 \\ u_2|_S = \varphi(x) - u_1(x)|_S = F(x) \end{cases}$$

Ищем решение в виде потенциала двойного слоя.

$$u_2(x) = W(x) = \iint \nu(\xi) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{x\xi}}\right) dS_\xi$$

По формуле $W(x) + 2\pi \nu(x) = F(x)$ (45)

$$\Rightarrow \iint_S \nu(\xi) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{x\xi}}\right) dS_\xi + 2\pi \boxed{\nu(x)} = F(x)$$

отсюда

можно найти $\nu(x)$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \beta(x) \end{cases}$$

Задача Неймана для ур-я Лапласа. $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$

Решение ищем в виде потенциала простого слоя $u(x) = V(x) = \iint_{\partial\Omega} \mu(\xi) \frac{1}{r_{x\xi}} dS_\xi$

Из граничных условий:

$$\left(\frac{\partial V(x)}{\partial n}\right)\Big|_i = \frac{\partial V(x)}{\partial n} + 2\pi \mu(x) = \beta(x)$$

$$\iint_{\partial\Omega} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{x\xi}}\right) dS_\xi + 2\pi \mu(x) = \beta(x)$$

можно найти из этого уравн.

7) Интегральные уравнения. Классификация линейных интегральных уравнений.

Пусть $D(x)$ - заданная функция, $y: [a, b] \to \mathbb{R}$ - неизвестная функция, $x, s \in [a, b]$, $f(x)$ - заданная неоднородн.

$$D(x) \cdot y(x) + \int_a^b K(x, s)\, y(s)\, ds = f(x)$$

→ уравнение Фредгольма; $K(x, s)$ - ядро

$f(x) \equiv 0$ - однородное, $f(x) \not\equiv 0$ - неоднородн.

Когда $K(x,s) = 0$ при $x < s < b$, $D(x)\, y(x) + \int_a^x K(x, s)\, y(s)\, ds = f(x)$

Это уравнение Вольтерра

Уравнения Фредгольма

1) Первого рода: $D(x) = 0$

$$\int_a^b K(x,s)\,y(s)\,ds = f(x)$$

2) Второго рода: $D(x) = 1$

$$y(x) + \int_a^b K(x,s)\,y(s)\,ds = f(x)$$

3) Третьего рода: $D(x) \neq 0$

$D(x) \neq 1$

$$D(x)\,y(x) + \int_a^b K(x,s)$$

46

Ур-е Фредгольма с вырожд. ядром

Ядро вырождено, если $K(x,s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) b_i(s)$

$a_i(x)$ – линейно независимые функции

$$y(x) + \lambda \int K(x,s)\,y(s)\,ds = f(x)$$

$$y(x) = -\lambda \int_a^b \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\,b_i(s)\cdot y(s)\,ds + f(x)$$

$$y(x) = -\lambda \sum_{i=1}^{n} \left\{\int_a^b (b_i(s)\,y(s))\,ds\right\}\cdot a_i(x) + f(x)$$

$$y(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i\,a_i(x) + f(x)$$

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} c_i\,a_i(x) + \cancel{f(x)} + \lambda \int_a^b \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda c_i a_i(s) + f(s)\right\} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\,b_j(s)\,\}\,ds = \cancel{f(x)}$$

$$c_i = \lambda \sum c_j\,\alpha_{ij} + \beta_i$$

$$\alpha_{ij} = \int_a^b b_i(s)\cdot a_j(s)\,ds$$

$$\beta_i = \int_a^b b_i(s)\cdot f(s)\,ds$$

$$\sum_{j=1}^{n}(\delta_{ij} - \lambda a_{ij})\,c_j = \beta_i$$

$$A(\lambda) = E - \lambda a = \|\delta_{ij} - a_{ij}\|$$

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{ij=1}^{n} A_{ij}^{-1}(\lambda)\,\beta_j\,a_i(x)$$