

ВВЕДЕНИЕ

Вы приступаете к изучению курса лекций по Основам Векторного и Тензорного Анализа (ОВТА). Это раздел математического анализа, специфическая особенность которого состоит в том, что он имеет дело со свойствами скалярных и векторных функций и полей, кривых и поверхностей в пространстве, скалярных и векторных произведений. Иными словами, главным объектом ОВТА служат функции, определенные на множестве точек пространства. По этой причине большинство понятий ВТА имеет геометрически наглядную интерпретацию. Кроме того, именно на аппарат ВТА опираются в большинстве разделов физики. К примеру, изучение траекторий движения тел в механике, анализ искривления оптических лучей и волновых фронтов, математически строго описывается такими разделами ВТА, как дифференциальное и интегральное исчисление векторных функций и функций векторного аргумента, дифференциальная геометрия. Количественный анализ электромагнитных и гравитационных полей, полей температуры и напряжений, возникающих в физических телах, существенно опирается на подробно изучаемые в курсе ОВТА понятия криволинейных и поверхностных интегралов, тензорный анализ, а также на основной раздел ОВТА – математическую теорию поля. Исследуя математические свойства криволинейных координат, векторных и тензорных полей, ВТА подводит надежный фундамент под важнейшие разделы механики и физики. Уже из сказанного видно, что ВТА – раздел математики, к которому наиболее часто приходится прибегать физикам, изучающим поведение во времени и пространстве полей и волн разной физической природы. После этого краткого введения приступим к непосредственному изучению основ векторного и тензорного анализа.

Глава 1

Необходимые сведения из анализа

В этой главе дан краткий обзор понятий и обозначений из математического анализа, которые будут использованы при изложении основного материала по ОВТА.

1.1 Множества и функции

В любой науке есть исходные объекты и понятия, которые не определяются, а поясняются примерами. В математике подобными первичными понятиями служат понятия *множества* и *элемента множества*. К множествам относятся:

1. Студенты, когда-либо читавшие эти строки. При этом отдельный студент есть элемент данного множества.
2. Рыбы, обитающие в Тихом океане. Тогда каждая рыба Тихого океана будет элементом множества.
3. Четные числа. В этом случае элементом множества служит любое четное число: 2, 4, 128, и так далее.

Будем обозначать множества заглавными буквами \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , \dots , а их элементы – строчными буквами a , b , ω , \dots . **Замечание:** Пожалуй единственное исключение сделаем для точек – элементов окружающего пространства. Их мы будем, как правило, обозначать буквой M , помечая разные точки индексами. Например: M_0 , M_1 , M_k , \dots . \triangle **Замечание:** Спе-

циальное обозначение вводят также для множества действительных чисел, которое в наших целях естественно трактовать как множество точек действительной оси. Его обозначают: \mathbb{R} . Множество же натуральных (бóльших нуля целых) чисел обозначают \mathbb{N} . \triangle Тот факт, что элемент a принадлежит множеству \mathcal{A} , выражают соотношением $a \in \mathcal{A}$. Если все элементы множества \mathcal{A} заодно содержатся и в множестве \mathcal{B} , то говорят, что \mathcal{A} есть *подмножество* множества \mathcal{B} и пишут: $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Запись $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ означает множество, состоящее из n элементов a_1, a_2, \dots, a_n . При математическом описании пространственных соотношений ключевую роль играет понятие *произведения* множеств:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 *Произведением*

$$\prod_{k=1}^n \mathcal{A}_k \equiv \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \times \mathcal{A}_n$$

множеств $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ называют новое множество, элементами которого служат упорядоченные наборы (a_1, a_2, \dots, a_n) длины n , где a_1 пробегает все элементы множества \mathcal{A}_1 , a_2 – все элементы множества \mathcal{A}_2 , \dots , a_n – все элементы множества \mathcal{A}_n . Если перемножаемые множества идентичны: $\mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}_2 \equiv \dots \equiv \mathcal{A}_n \equiv \mathcal{A}$, то произведение множеств $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A}$ называют n -й степенью множества \mathcal{A} , и обозначают: \mathcal{A}^n .

Пример: Произведение множества действительных чисел \mathbb{R} само на себя $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ образует множество упорядоченных пар чисел (x_1, x_2) – так называемую *числовую плоскость*. \star Одним из важнейших математических понятий служит понятие функции:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2 Пусть \mathcal{A} и \mathcal{B} – любые два множества. Пусть каждому элементу $a \in \mathcal{A}$ некоторым способом поставлен в соответствие элемент $b \in \mathcal{B}$. Обозначим его $b = f(a)$, где f символизирует способ установления соответствия. Его называют функцией из \mathcal{A} в \mathcal{B} , или отображением множества \mathcal{A} в \mathcal{B} , и обозначают

$$f : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}.$$

1.1.1 Логические символы

Иногда, для сокращения записи, мы будем использовать следующие логические символы:

- $A \Rightarrow B$. Эта запись означает, что “утверждение A влечет за собой утверждение B ”.
- $A \iff B$ – “утверждения A и B эквивалентны”.
- Символ $:$ используют вместо слов “имеет место свойство”.
- \forall –квантор общности: Применяется вместо слов “Для всех. . .”.
- \exists –квантор существования: Заменяет слово “Существует”.

Утверждения “для всех” и “существует” часто сопровождаются некоторыми ограничениями. Последние обычно записывают в круглых скобках.

Пример: К примеру, определение предела числовой последовательности записывается с помощью логических символов так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n > N) : |p - p_n| < \varepsilon$$

1.2 Линейные пространства

Поскольку ВТА служит математическим инструментом решения физических задач, имеющих дело с поведением в пространстве и времени, главным понятием ВТА является *математическая модель пространства*. Поэтому освежим в памяти определения *линейных* и, в частности, *евклидовых* пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3 *Непустое множество \mathcal{L} элементов $\{x, y, z \dots\}$ называют линейным или векторным пространством, если оно удовлетворяет следующим аксиомам сложения (I) и умножения на число (II): I. Для любых двух элементов $x, y \in \mathcal{L}$ однозначно определен третий элемент $z \in \mathcal{L}$, называемый их суммой, обозначаемый $x + y$, и такой, что справедливы соотношения: 1) $x + y = y + x$ (свойство коммутативности) 2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (свойство ассоциативности) 3) В \mathcal{L} существует такой элемент, обозначаемый \emptyset , что $x + \emptyset = x$ для всех $x \in \mathcal{L}$. 4) Для каждого $x \in \mathcal{L}$ существует элемент $-x$, такой, что $x + (-x) = \emptyset$ (существование противоположного элемента) II. Для любого числа α и любого элемента $x \in \mathcal{L}$ определяется элемент $\alpha x \in \mathcal{L}$ (произведение элемента x на число α), причем 1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ 2) $1 \cdot x = x$ 3) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ 4) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$*

Среди всего множества линейных пространств выделяют наиболее значимое для приложений подмножество *евклидовых пространств*. Обозначим такие пространства буквой \mathbb{E} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4 *Линейное пространство называют евклидовым, если в нем задано скалярное произведение.*

Данное определение повисает в воздухе, пока не дано определение скалярного произведения. Приведем его:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5 *Действительную числовую функцию $(x, y) : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ двух аргументов $x, y \in \mathcal{L}$ называют скалярным произведением, если для нее выполнены равенства: 1) $(x, y) = (y, x)$ 2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ 3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ 4) $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ лишь если $x = \emptyset$*

Замечание: Это не самое общее определение скалярного произведения. В общем случае оно может быть комплексной функцией, перестановка аргументов которой влечет комплексное сопряжение. Но для наших целей удобно пока ограничиться скалярными произведениями, принимающими лишь действительные значения. \triangle Евклидово пространство называют еще *линейным пространством со скалярным произведением*. Другую важную разновидность линейных пространств образуют *линейные нормированные пространства*. К ним относят линейные пространства \mathcal{L} , каждому элементу которых однозначным образом ставится в соответствие число, называемое *нормой* данного элемента. Однако не всякую такую функцию можно назвать нормой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6 *Числовую функцию $\|x\|$, определенную на линейном пространстве \mathcal{L} , называют нормой, если она удовлетворяет следующим аксиомам: 1) $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0$ лишь если $x = \emptyset$ 2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника) 3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ для любых α .*

Вообще говоря, норму элементов некоего пространства иногда удается определить, даже если в нем не существует скалярного произведения. В евклидовом же пространстве \mathbb{E} норма вводится на основе скалярного произведения с помощью формулы

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \quad (1.1)$$

Причем свойства скалярного произведения гарантируют выполнение всех аксиом нормы. Убедимся в этом. Действительно, из 4-го свойства скалярного произведения следует выполнение 1-го свойства нормы:

$$(x, x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \|x\| \geq 0. \quad (1.2)$$

Третье свойство нормы вытекает из 3-го и 1-го свойств скалярного произведения:

$$\begin{aligned} (\lambda x, \lambda x) &= \lambda(x, \lambda x) = \lambda(\lambda x, x) = \lambda^2(x, x) \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \|\lambda x\| &= \sqrt{\lambda^2(x, x)} = |\lambda| \|x\|. \end{aligned}$$

Докажем справедливость второго свойства нормы – знаменитого *неравенства треугольника*. Оно вытекает из не менее знаменитого *неравенства Коши-Буняковского*:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \quad (1.3)$$

которое мы и выведем прежде всего. Возьмем квадратный трехчлен действительного аргумента λ , образованный по правилу:

$$\varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) = \|x\|^2 \lambda^2 + 2(x, y)\lambda + \|y\|^2. \quad (1.4)$$

Поскольку исследуемое выражение представляет собой квадрат нормы некоторого элемента $\lambda x + y \in \mathcal{L}$ нашего линейного пространства, то введенная выше функция неотрицательна: $\varphi(\lambda) \geq 0$, а значит дискриминант квадратного трехчлена удовлетворяет неравенству:

$$\|x\|^2 \|y\|^2 - (x, y)^2 \geq 0.$$

Отсюда сразу следует справедливость неравенства Коши-Буняковского. Приступим теперь, опираясь на неравенство Коши-Буняковского, к доказательству неравенства треугольника, для чего возведем его левую часть в квадрат. Это дает:

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x, y). \quad (1.5)$$

Из неравенства Коши-Буняковского вытекает, что

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2. \quad (1.6)$$

отсюда и из неотрицательности нормы как раз и следует неравенство треугольника. Обладая нормой, *можно ввести метрику пространства* или, другими словами, расстояние между любыми двумя элементами пространства, по формуле:

$$\rho(x, y) = \|x - y\|. \quad (1.7)$$

1.3 Арифметическое пространство

Из всевозможных метрических пространств с введенными в них, с помощью скалярного произведения, нормой и метрикой, выделяют, пожалуй наиболее важный для физических приложений, случай n -мерного арифметического пространства \mathbb{R}^n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7 Элементами n -мерного арифметического пространства \mathbb{R}^n служат упорядоченные последовательности n действительных чисел:

$$\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

—компонент элемента пространства \mathbb{R}^n . Сумма элементов \mathbb{R}^n определяется по правилу покомпонентного сложения:

$$\vec{z} = \vec{x} + \vec{y} = \{x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n\}. \quad (1.9)$$

Аналогичным образом вводится умножение элемента \mathbb{R}^n на число:

$$\alpha \vec{x} = \{\alpha x_1, \dots, \alpha x_n\}. \quad (1.10)$$

Причем скалярное произведение в пространстве \mathbb{R}^n вводится по формуле:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{j=1}^n x_j y_j. \quad (1.11)$$

Нетрудно показать, что скалярное произведение (1.11) удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения. Соответственно, норма и метрика элементов \mathbb{R}^n равны

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}, \quad \rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2}. \quad (1.12)$$

Элементы n -мерного арифметического пространства можно геометрически трактовать как радиус-векторы точек в n -мерной декартовой системе координат. Особенно наглядно в этом смысле пространство \mathbb{R}^3 , изоморфное радиус-векторам 3-х мерного пространства, в котором мы живем. Причем числа $\{x_1, x_2, x_3\}$ естественно отождествлять с *координатами* — проекциями радиус-вектора \vec{x} на три взаимно-перпендикулярные оси некоторой декартовой системы координат. Соответственно, норма оказывается обычной длиной радиус-вектора, а метрика — расстоянием между концами двух радиус-векторов. В дальнейшем будем называть векторами элементы арифметического пространства любой размерности n .

Компоненты же их назовем координатами. Заметим еще, что физики предпочитают обозначать скалярное произведение векторов в 3-х мерном пространстве точкой:

$$(\vec{x}, \vec{y}) \iff (\vec{x} \cdot \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y},$$

наподобие обычного произведения чисел. Мы последуем их примеру, считая все приведенные обозначения равноправными и распространив их на случай произвольных n -мерных арифметических пространств \mathbb{R}^n . Аналогично, геометрическим образом 2-мерного евклидова пространства \mathbb{R}^2 служит множество радиус-векторов на плоскости, заданных своими координатами в некоторой прямоугольной системе координат, а одномерное пространство можно отождествить с точками на числовой оси. Причем норма в этом случае $\|x\| = |x|$ равна расстоянию данной точки от начала координат, а метрика $\rho(x, y) = |x - y|$ — расстоянию между двумя точками оси. В дальнейшем, для краткости, одномерное пространство будем обозначать лишь одной буквой без индекса: $\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathbb{R}^1$. Кроме того, как правило, будем отождествлять элементы одномерного пространства с точками на оси времени (моментами времени) и обозначать буквой t .

1.4 Трехмерное пространство

Выше мы ввели понятие n -мерного арифметического пространства, и уже кратко обсудили его связь с реальным 3-мерным пространством. Поскольку последнее будет играть в дальнейшем изложении выделенную роль, обсудим специфические особенности его описания подробнее. Как уже отмечалось, элементы 3-мерного арифметического пространства $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ можно трактовать как набор декартовых координат точек физического пространства. С другой стороны, пространство существует само по себе, и каждый может указать какую-либо его точку M , не прибегая к декартовой системе координат.

Упомянем еще один, распространенный в физике, способ задания точек пространства, не опирающийся на системы координат. Он требует лишь задания некоторой *центральной* точки пространства и *радиус-вектора* \vec{r} , испущенного из центральной точки, и упирающегося в точку наблюдения M . В тех случаях, когда в пространстве задана декартова система координат, радиус-вектор задается элементом 3-мерного арифметического пространства. Чтобы подчеркнуть специфику координат радиус-вектора в 3-мерном пространстве, будем обозначать их не одинаковыми буквами с разными индексами, как это делалось по отношению к компонентам элементов произвольных n -мерных арифметиче-

ских пространств, а разными буквами: $\vec{r} = (x, y, z)$, как это принято в физических приложениях.

Соответственно будем использовать разные обозначения функций. Так, в общем случае, будем записывать функции в виде $f(M)$, где M символизирует точки пространства. Такая запись функции наиболее универсальна, поскольку требует лишь указания точек, и значений в них функции $f(M)$. Если в пространстве задана центральная точка O , то аргументом функции f естественно брать радиус-вектор, и записывать функцию в виде: $f = f(\vec{r})$. Наконец, если в пространстве задана некоторая система координат, то естественно указывать явную зависимость функции от координат точек пространства. Например, в декартовой системе координат, писать: $f = f(x, y, z)$, где $\{x, y, z\}$ координаты радиус-вектора \vec{r} .

1.5 Область

Напомним еще одно ключевое понятие *области*, относящееся ко всем арифметическим пространствам, но приобретающее прозрачный геометрический смысл в трех и двумерных пространствах. Введем вначале понятие *открытой окрестности*:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8 Точки n -мерного арифметического пространства, координаты которых (x_1, x_2, \dots, x_n) подчиняются неравенству

$$\sum_{k=1}^n (x_k - x_k^0)^2 < a^2$$

образуют открытую сферу радиуса $a > 0$ с центром в точке

$$M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

В свою очередь, множество точек указанной открытой сферы называют (сферической) окрестностью точки M_0 .

Следующее важное понятие, приближающее нас к определению области – понятие *внутренней точки множества*:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9 Точку M называют внутренней точкой множества Ω , если имеется такое $a > 0$, что окрестность точки M радиуса a принадлежит множеству Ω .

Теперь мы готовы дать определения открытой области и ее границы

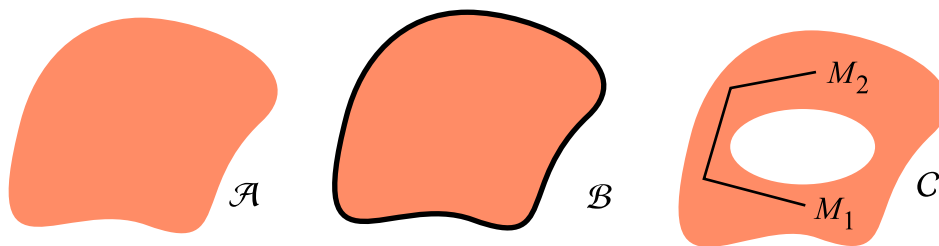


Рис. 1.1: Иллюстрации областей: A -открытая односвязная область; B - замкнутая область, граница которой (выделенная жирной линией) принадлежит области; C -связная область, любые точки которой, например M_1 и M_2 , можно соединить ломаной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.10 Множество, целиком состоящее из внутренних точек, называют открытой областью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.11 Точку M называют граничной точкой области Ω , если в любой ее окрестности содержится хотя-бы одна точка области Ω .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.12 Открытую область, дополненную всеми ее граничными точками, называют замкнутой областью.

Перечислим еще несколько, полезных для понимания дальнейшего, понятий. Если можно найти n -мерную сферу конечного радиуса $R < \infty$, внутрь которой убирается вся область Ω , то область называют *ограниченной*. Область Ω называют *связной*, если любые две ее точки можно соединить ломаной, целиком лежащей в области Ω . Наконец, область называют *односвязной*, если любая другая область \mathcal{G} , граница которой целиком принадлежит области Ω , вся лежит в области Ω : $\mathcal{G} \subset \Omega$.

Примеры двумерных областей, наглядно иллюстрирующие понятия открытой, замкнутой, связной и односвязной областей, даны на рис. 1.1.

Глава 2

Векторные функции

2.1 Определение векторных функций

Освежив в памяти понятие евклидова и арифметического пространств, а также сопутствующих им понятий, приступим к регулярному изучению основных объектов векторного анализа – *векторных функций*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 *Функцию $\vec{f} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ назовем векторной функцией одной переменной и будем обозначать*

$$\vec{f}(x) = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}. \quad (2.1)$$

Как видно из определения, такая функция задается упорядоченным набором n своих компонент. Геометрическим образом векторных функций одного аргумента может служить радиус-вектор движущейся материальной точки, координаты которой меняются с течением времени. При этом, в соответствии с физической традицией, для обозначения аргумента векторной функции используют букву t : $\vec{f}(t)$. В физических приложениях часто имеют дело также с векторными волнами и полями (к примеру – электромагнитными волнами и силовыми полями), меняющимися от точки к точке в трехмерном пространстве. Математическими моделями подобных полей служат векторные функции векторных переменных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2 *Функцию $\vec{f} : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^n$ назовем векторной функцией многих переменных и будем обозначать*

$$\vec{f}(\vec{x}) = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x})\}, \quad (2.2)$$

где $f_j(\vec{x}) = f_j(x_1, x_2, \dots, x_k)$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Иногда векторные функции называют *векторными полями*. Если же $n = 1$, то есть функция отображает векторы в точки числовой оси, то такие функции называют *скалярными функциями векторного аргумента* или просто – *скалярными полями*. Типичным примером скалярных полей может служить поле температур окружающей нас атмосферы.

2.2 Пределы векторных функций

Как и всюду в математическом анализе, в векторном анализе фундаментальную роль играет понятие *пределов векторных функций* и их свойства. Поэтому сформулируем важнейшие определения пределов векторной функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3 (по Коши) Пусть $\vec{f} : (\Omega \subset \mathbb{R}^k) \mapsto \mathbb{R}^n$ – функция, отображающая множество Ω из \mathbb{R}^k в \mathbb{R}^n , и \vec{x}_0 – предельная точка множества Ω . Вектор \vec{A} из \mathbb{R}^n называют пределом функции $\vec{f}(\vec{x})$ при $\vec{x} \mapsto \vec{x}_0$,

$$\lim_{\vec{x} \mapsto \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{A},$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любого \vec{x} из Ω , удовлетворяющего условию $0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_{\mathbb{R}^k} < \delta$, выполняется неравенство $\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{A}\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon$, или на языке символов:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0) (\forall \vec{x} \in \Omega, 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_{\mathbb{R}^k} < \delta) : \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{A}\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon.$$

Другое полезное определение предела векторной функции опирается на понятие сходимости последовательности в пространстве \mathbb{R}^k . Напомним:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4 Последовательность $\{\vec{x}_n\} \mapsto \vec{a}$, если по любому $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N(\varepsilon) < \infty$, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\|\vec{x}_n - \vec{a}\| < \varepsilon.$$

Это определение часто интерпретируют на геометрическом языке: Говорят, что при $n > N(\varepsilon)$ все точки, изображающие элементы последовательности $\{\vec{x}_n\}$, находятся внутри n -мерной сферы радиуса ε с центром в точке \vec{a} . Обещанное определение предела, оперирующее сходящимися последовательностями, таково:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5 (по Гейне) Пусть $\vec{f} : (\Omega \subset \mathbb{R}^k) \mapsto \mathbb{R}^n$ и \vec{x}_0 – предельная точка множества Ω . Вектор \vec{A} из \mathbb{R}^n называют пределом функции $\vec{f}(\vec{x})$ при $\vec{x} \mapsto \vec{x}_0$, если

$$(\forall \{\vec{x}_n\} \subset \Omega, \vec{x}_n \neq \vec{x}_0, \vec{x}_n \xrightarrow{\mathbb{R}^k} \vec{x}_0) : \vec{f}(\vec{x}_n) \xrightarrow{\mathbb{R}^n} \vec{A}.$$

Эквивалентность данных двух определений предела векторной функции вытекает из известной теоремы об эквивалентности определений предела функции, заданной на метрических пространствах. Если же использовать определение предела функции по Гейне и теорему о покоординатной сходимости, то придем к следующей теореме:

ТЕОРЕМА 2.1

Пусть $\vec{f} : (\Omega \subset \mathbb{R}^k) \mapsto \mathbb{R}^n$ и \vec{x}_0 – предельная точка множества Ω , а также $\vec{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ – вектор из \mathbb{R}^n . Тогда

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{A} \iff \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f_j(\vec{x}) = A_j \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Следующая важная для дальнейшего теорема – теорема о пределе суммы двух векторных функций:

ТЕОРЕМА 2.2

Пусть $\vec{f} : (\Omega \subset \mathbb{R}^k) \mapsto \mathbb{R}^n$, $\vec{g} : (\Omega \subset \mathbb{R}^k) \mapsto \mathbb{R}^n$, $h : (\Omega \subset \mathbb{R}^k) \mapsto \mathbb{R}$ – две векторные и одна скалярная функции, определенные на одном и том же множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^k$, \vec{x}_0 – предельная точка этого множества и

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{A}, \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{g}(\vec{x}) = \vec{B}, \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} h(\vec{x}) = c.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} [\vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x})] &= \vec{A} + \vec{B}, \\ \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} h(\vec{x}) \vec{f}(\vec{x}) &= c\vec{A}, \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x}) = \vec{A} \cdot \vec{B}. \end{aligned}$$

Доказательство: Пусть

$$\begin{aligned} \vec{f}(\vec{x}) &= \{f_1(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x})\}, & \vec{g}(\vec{x}) &= \{g_1(\vec{x}), \dots, g_n(\vec{x})\}, \\ \vec{A} &= \{A_1, \dots, A_n\}, & \vec{B} &= \{B_1, \dots, B_n\}, \end{aligned}$$

и c – постоянное число. Тогда

$$\begin{aligned} \vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x}) &= \{f_1(\vec{x}) + g_1(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x}) + g_n(\vec{x})\}, \\ h(\vec{x}) \vec{f}(\vec{x}) &= \{h(\vec{x})f_1(\vec{x}), \dots, h(\vec{x})f_n(\vec{x})\}, \\ \vec{A} + \vec{B} &= \{A_1 + B_1, \dots, A_n + B_n\}, \quad c\vec{A} = \{cA_1, \dots, cA_n\}, \end{aligned}$$

По теореме 2.1 имеем

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f_j(\vec{x}) = A_j, \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g_j(\vec{x}) = B_j, \quad (j = 1, \dots, n),$$

и в силу теоремы о предельных переходах в сумме и произведении для вещественных функций

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} [f_j(\vec{x}) + g_j(\vec{x})] = A_j + B_j, \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} h(\vec{x}) f_j(\vec{x}) = c A_j.$$

Отсюда, вновь используя теорему 2.1, получаем

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} [\vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x})] = \vec{A} + \vec{B}, \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} h(\vec{x}) \vec{f}(\vec{x}) = c \vec{A}.$$

Аналогично

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x}) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \sum_{j=1}^n f_j(\vec{x}) g_j(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n A_j B_j = (\vec{A} \cdot \vec{B}).$$

Теорема доказана. \square

Кроме введенного выше скалярного произведения, в физических приложениях часто встречается *векторное произведение* трехмерных векторов. Для него также справедлива теорема о пределе. Мы сформулируем и докажем ее ниже, но вначале напомним определение векторного произведения, пользуясь при этом геометрической терминологией: Пусть задана декартова система координат с ортонормированным базисом $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ и два векторных поля $\vec{f} : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^3$, $\vec{g} : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^3$, которые запишем в виде явного разложения по нормированному базису

$$\begin{aligned} \vec{f}(\vec{x}) &= f_1(\vec{x}) \vec{i} + f_2(\vec{x}) \vec{j} + f_3(\vec{x}) \vec{k}, \\ \vec{g}(\vec{x}) &= g_1(\vec{x}) \vec{i} + g_2(\vec{x}) \vec{j} + g_3(\vec{x}) \vec{k}. \end{aligned}$$

Их векторным произведением называют векторное поле, образованное по правилу

$$\begin{aligned} [\vec{f}(\vec{x}), \vec{g}(\vec{x})] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} (f_2 g_3 - f_3 g_2) + \vec{j} (f_3 g_1 - f_1 g_3) + \vec{k} (f_1 g_2 - f_2 g_1). \end{aligned} \tag{2.3}$$

В угоду математической и физической традициям, будем считать равноправными следующие три обозначения векторного произведения:

$$[\vec{f}, \vec{g}] \equiv [\vec{f} \times \vec{g}] \equiv \vec{f} \times \vec{g}.$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2.3

Если $\vec{f} : (\Omega \subset \mathbb{R}^k) \mapsto \mathbb{R}^3$, $\vec{g} : (\Omega \subset \mathbb{R}^k) \mapsto \mathbb{R}^3$, $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{B} \in \mathbb{R}^3$, \vec{x}_0 – предельная точка множества Ω и

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{A}, \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{g}(\vec{x}) = \vec{B},$$

то

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x}) = \vec{A} \times \vec{B}.$$

Доказательство: Из (2.3) и из теоремы о покоординатной сходимости следует, что каждая из компонент векторного произведения сходится к соответствующей компоненте векторного произведения постоянных векторов $[\vec{A} \times \vec{B}]$, что и доказывает теорему. \square

2.3 Непрерывность векторных функций

На обсужденное выше понятие предела векторных функций опирается понятие непрерывности векторных функций:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6 Функцию $\vec{f} : (\Omega \subset \mathbb{R}^k) \mapsto \mathbb{R}^n$ называют непрерывной в точке \vec{x}_0 множества Ω , если

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta = \delta(\varepsilon, \vec{x}_0) > 0) (\forall \vec{x} \in \Omega, \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_{\mathbb{R}^k} < \delta) : \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon.$$

В том случае, когда \vec{x}_0 – предельная точка множества Ω , определение непрерывности функции в точке эквивалентно равенству

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_0).$$

Легко сообразить, что в изолированных точках любая функция непрерывна. Поэтому свойства непрерывных функций достаточно изучить лишь в предельных точках. Эти свойства формулирует следующая

ТЕОРЕМА 2.4

1. Пусть $\vec{f} : (\Omega \subset \mathbb{R}^k) \mapsto \mathbb{R}^n$, $\vec{g} : (\Omega \subset \mathbb{R}^k) \mapsto \mathbb{R}^n$, $h : (\Omega \subset \mathbb{R}^k) \mapsto \mathbb{R}$ – непрерывные функции в точке \vec{x}_0 множества Ω . Тогда $\vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x})$, $h(\vec{x}) \vec{f}(\vec{x})$, $\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x})$ – также непрерывные функции в точке \vec{x}_0 .

2. Пусть $\vec{f} : (\Omega \subset \mathbb{R}^k) \mapsto \mathbb{R}^3$ и $\vec{g} : (\Omega \subset \mathbb{R}^k) \mapsto \mathbb{R}^3$ – непрерывные функции в точке \vec{x}_0 множества Ω . Тогда векторное произведение $\vec{f}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x})$ – непрерывная функция в точке \vec{x}_0 .

Доказательство этой теоремы следует из определения непрерывности в точке \vec{x}_0 области Ω и теорем о пределах суммы и произведения векторных (и скалярных) функций.

2.4 Дифференцируемые функции

Напомним, что функцию одного действительного переменного $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ называют дифференцируемой в точке $x_0 \in \Omega$, если ее приращение в окрестности этой точки можно представить в виде

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \quad (2.4)$$

где A — постоянное число, а $\alpha(\Delta x) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$ при $\Delta x \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$. Величину $A \cdot \Delta x$ называют *дифференциалом* функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначают

$$df(x_0) = A \cdot \Delta x. \quad (2.5)$$

Аналогично вводят понятие дифференцируемости скалярных и векторных функций векторных аргументов. Наиболее близко по форме к (2.4) определение дифференцируемой скалярной функции:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7 Скалярную функцию многих переменных $f : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}$ называют дифференцируемой в точке \vec{x}_0 , если ее приращение в окрестности этой точки представимо в виде

$$\Delta f(\vec{x}_0) = \vec{A} \cdot \Delta \vec{x} + \vec{\alpha}(\Delta \vec{x}) \cdot \Delta \vec{x}, \quad (2.6)$$

где $\vec{A} \in \mathbb{R}^k$ — постоянный вектор, называемый *градиентом* функции $f(\vec{x})$ в точке \vec{x}_0 , а векторная функция $\vec{\alpha}(\Delta \vec{x}) \xrightarrow{\mathbb{R}^k} \vec{O}$ при $\Delta \vec{x} \xrightarrow{\mathbb{R}^k} \vec{O}$. Величину $\vec{A} \cdot \Delta \vec{x}$ называют *дифференциалом* функции $f(\vec{x})$ в точке \vec{x}_0 и обозначают

$$df(\vec{x}_0) = \vec{A} \cdot \Delta \vec{x} \quad (2.7)$$

Здесь и выше

$$\Delta \vec{x} = \{\Delta x_1, \dots, \Delta x_k\} = \{dx_1, \dots, dx_k\},$$

а

$$\vec{O} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_k$$

k -мерный нулевой вектор.

Заметим еще, что если известна явная зависимость скалярной функции $f(\vec{x})$ от ее аргументов:

$$f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_k),$$

то градиент этой функции равен

$$\vec{A} = \text{grad } f(\vec{x}_0) = \left\{ \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_k} \right\}, \quad (2.8)$$

а ее дифференциал задан выражением

$$d f(\vec{x}_0) = \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_k} dx_k. \quad (2.9)$$

Данные выше определения дифференцируемости обычной функции $f(x)$ и скалярной функции векторного аргумента $f(\vec{x})$ естественным образом обобщаются на векторные функции одного и нескольких аргументов:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.8 Векторную функцию одного аргумента $\vec{f}: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ называют дифференцируемой в точке x_0 , если ее приращение в окрестности этой точки представимо в виде

$$\Delta \vec{f}(x_0) = \vec{A} \cdot \Delta x + \vec{\alpha}(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где \vec{A} – постоянный вектор из \mathbb{R}^n , а $\vec{\alpha}(\Delta x) \xrightarrow{\mathbb{R}^n} \vec{O}$ при $\Delta x \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$.

Дифференциал векторной функции одного аргумента равен

$$d \vec{f}(x_0) = \vec{A} \cdot \Delta x.$$

Аналогичное, но более громоздкое, определение дифференцируемости имеет место для векторной функции векторного аргумента:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9 Векторную функцию векторного аргумента $\vec{f}: \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^n$ называют дифференцируемой в точке \vec{x}_0 , если ее приращение в окрестности этой точки можно представить в виде

$$\Delta \vec{f}(\vec{x}_0) = \hat{A} \cdot \Delta \vec{x} + \hat{\alpha}(\Delta \vec{x}) \cdot \Delta \vec{x}.$$

Здесь \hat{A} – постоянная прямоугольная матрица

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nk} \end{pmatrix}, \quad \hat{\alpha}(\Delta \vec{x}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nk} \end{pmatrix},$$

и $\alpha_{ij} \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$ при $\Delta \vec{x} \xrightarrow{\mathbb{R}^k} \vec{O}$.

Величину $\hat{A} \cdot \Delta \vec{x}$ называют дифференциалом функции $\vec{f}(\vec{x})$ в точке \vec{x}_0 и обозначают

$$d\vec{f}(\vec{x}_0) = \hat{A} \cdot \Delta \vec{x}.$$

Выше были определены понятия дифференцируемости функций в одной точке. В дальнейшем мы будем оперировать функциями, дифференцируемыми на некотором множестве:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.10 *Функцию называют дифференцируемой на множестве Ω , если она дифференцируема в каждой точке этого множества.*

2.5 Дифференцирование векторной функции одной переменной

С понятием дифференцируемости функций тесно связано понятие их производных. Ниже даны определения производных функций и обсуждены их основные свойства. Начнем с определения производной функции одного аргумента:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.11 *Производной $\vec{f}'(x_0)$ векторной функции $\vec{f}: (a, b) \mapsto \mathbb{R}^n$ в точке $x_0 \in (a, b)$ называют предел*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\vec{f}(x) - \vec{f}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{f}(x_0)}{\Delta x}.$$

Связь производной с дифференцируемостью функции устанавливает следующая

ТЕОРЕМА 2.5

Если функция $\vec{f}: (a, b) \mapsto \mathbb{R}^n$ дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$, то она имеет производную $\vec{f}'(x_0)$, а дифференциал функции равен $d\vec{f}(x_0) = \vec{f}'(x_0) dx$.

Доказательство: Пусть $\vec{f}(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$, то есть имеет место равенство

$$\Delta \vec{f}(x_0) = \vec{A} \cdot \Delta x + \vec{\alpha}(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где $\vec{\alpha}(\Delta x) \xrightarrow{\mathbb{R}^n} \vec{O}$ при $\Delta x \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{f}(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\vec{A} + \vec{\alpha}) = \vec{A} + \vec{O} = \vec{A} = \vec{f}'(x_0),$$

а $d\vec{f}(x_0) = \vec{A} \Delta x = \vec{f}'(x_0) dx$. \square Способ вычисления производной векторной функции одного аргумента указывает

ТЕОРЕМА 2.6

Пусть $\vec{f}(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$, и известны компоненты векторной функции:

$$\vec{f}(x) = \{f_1(x), \dots, f_n(x)\}.$$

Тогда ее производная равна

$$\vec{f}'(x_0) = \{f_1'(x_0), \dots, f_n'(x_0)\}. \quad (2.10)$$

Доказательство: По теореме 2.1. имеем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{f}(x_0)}{\Delta x} \iff \begin{cases} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f_j(x_0)}{\Delta x} = f_j'(x_0), \\ j = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

и, следовательно, справедливо равенство (2.10). \square

Следующая теорема, доказательство которой предлагается провести читателю, устанавливает правила дифференцирования векторной функции:

ТЕОРЕМА 2.7

Если $\vec{f} : (a, b) \mapsto \mathbb{R}^n$, $\vec{g} : (a, b) \mapsto \mathbb{R}^n$, $h : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ — дифференцируемые функции в точке $x_0 \in (a, b)$, то

$$\begin{aligned} (\vec{f} + \vec{g})'(x_0) &= \vec{f}'(x_0) + \vec{g}'(x_0), \\ (h \vec{f})'(x_0) &= h'(x_0) \vec{f}(x_0) + h(x_0) \vec{f}'(x_0), \\ (\vec{f} \cdot \vec{g})'(x_0) &= \vec{f}'(x_0) \cdot \vec{g}(x_0) + \vec{f}(x_0) \cdot \vec{g}'(x_0), \\ \vec{f}'_x(h(x_0)) &= \vec{f}'_h(h(x_0)) h'(x_0). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Кроме того, если $\vec{f} : (a, b) \mapsto \mathbb{R}^3$, $\vec{g} : (a, b) \mapsto \mathbb{R}^3$, $h : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ — дифференцируемые функции в точке $x_0 \in (a, b)$, то

$$[\vec{f} \times \vec{g}]'(x_0) = \vec{f}'(x_0) \times \vec{g}(x_0) + \vec{f}(x_0) \times \vec{g}'(x_0).$$

2.6 Кривые в пространстве

Производная векторной функции одного аргумента имеет прозрачный геометрический смысл. Установим его. Но вначале строго сформулируем понятия *годографа* и *кривой*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.12 Пусть $\vec{f}: (\Omega \subset \mathbb{R}^k) \mapsto \mathbb{R}^3$. Поместим начало вектора $\vec{f}(\vec{x})$ в фиксированную точку \mathcal{O} пространства \mathbb{R}^3 . Множество концов вектора $\vec{f}(\vec{x})$, $\vec{x} \in \Omega$ назовем *годографом* векторной функции $\vec{f}(\vec{x})$.

Введенное только-что понятие *годографа* – очень общее понятие, включающее в себя, как частный случай, то, что мы интуитивно называем кривыми, поверхностями в пространстве, а также и другие, самые разнообразные геометрические объекты. Намереваясь изучить свойства некоторого более узкого класса пространственных объектов, мы должны наложить дополнительные условия на фигурирующую в определении *годографа* функцию, как это сделано в определении *пространственной кривой*:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.13 *Годограф непрерывной векторной функции $\vec{f}: [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3$ назовем ориентированной кривой \mathcal{C} , а функцию \vec{f} – векторным заданием кривой \mathcal{C} , или параметризацией этой кривой.*

Заметим еще, что кривая названа *ориентированной*, поскольку в определении задано направление обхода кривой, соответствующее возрастанию аргумента x функции \vec{f} . Если функция \vec{f} к тому же еще и дифференцируема, то кривая имеет в точках дифференцируемости функции \vec{f} касательную. Этот факт выражает следующая

ТЕОРЕМА 2.8

Пусть ориентированная кривая \mathcal{C} задана векторным уравнением

$$\vec{r} = \vec{f}(x), \quad a \leq x \leq b,$$

и $\vec{f}(x)$ – дифференцируемая функция в точке $x_0 \in (a, b)$. Тогда вектор $\vec{r}' = \vec{f}'(x)$ касается кривой \mathcal{C} в точке, определяемой значением аргумента $x = x_0$, и направлен в сторону возрастания аргумента x .

Доказательство: Из рис. 2.1 видно, что вектор

$$\frac{\Delta \vec{f}(x_0)}{\Delta x}$$

лежит на секущей \overrightarrow{AB} кривой \mathcal{C} , и направлен в сторону возрастания аргумента x . Переходя к пределу $\Delta x \mapsto 0$, получаем утверждение теоремы. \square

Теперь мы готовы дать определение *гладких* и *кусочно-гладких* кривых:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.14 Кривую C называют гладкой, если она имеет непрерывно-дифференцируемую параметризацию, и в каждой ее точке можно построить единственную касательную. Кривую называют кусочно-гладкой, если она состоит из конечного набора гладких кривых.

2.7 Дифференцирование векторной функции векторного аргумента

Выше дано понятие производной векторной функции одного аргумента. Аналогично, дифференцируемые векторные функции многих аргументов обладают частными производными:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.15 Пусть функция $\vec{f}: (\Omega \subset \mathbb{R}^k) \mapsto \mathbb{R}^n$ дифференцируема в точке $\vec{x}_0 \in \Omega$. Частной производной по аргументу x_i в данной точке называют предел

$$\frac{\partial \vec{f}(\vec{x}_0)}{\partial x_i} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(\vec{x}_0 + t \vec{e}_i) - \vec{f}(\vec{x}_0)}{t},$$

где $\vec{e}_i \in \mathbb{R}^k$ единичный вектор, все координаты которого, кроме i -й, равны нулю, а i -я координата равна 1:

$$\vec{e}_i = \{ \underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-i} \}$$

Связь частных производных с дифференциалом векторной функции векторного аргумента устанавливает

ТЕОРЕМА 2.9

Если $\vec{f}: (\Omega \subset \mathbb{R}^k) \mapsto \mathbb{R}^n$ дифференцируема в точке \vec{x}_0 , то все ее частные производные существуют, а дифференциал функции

$$d\vec{g}(\vec{x}_0) = \{ f_1(\vec{x}_0), \dots, f_n(\vec{x}_0) \}$$

выражается через них равенством

$$d\vec{g}(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\vec{x}_0} \cdot \Delta \vec{x}.$$

Доказательство: Пусть функция $\vec{f} : (\Omega \subset \mathbb{R}^k) \mapsto \mathbb{R}^n$ дифференцируема в точке $\vec{x}_0 \in \Omega$. Это означает, что справедливо равенство

$$\Delta \vec{f}(\vec{x}_0) = \hat{A} \cdot \Delta \vec{x} + \hat{\alpha}(\Delta \vec{x}) \cdot \Delta \vec{x},$$

где $\alpha_{ij} \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$ при $\Delta \vec{x} \xrightarrow{\mathbb{R}^k} \vec{O}$. Полагая $\Delta \vec{x} = t \vec{e}_i$, имеем

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(\vec{x}_0 + t \vec{e}_i) - \vec{f}(\vec{x}_0)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} (\hat{A} \cdot \vec{e}_i + \hat{\alpha} \cdot \vec{e}_i) = \hat{A} \cdot \vec{e}_i = \\ &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nk} \end{pmatrix} \cdot \vec{e}_i = \{A_{1i}, A_{2i}, \dots, A_{ni}\} = \frac{\partial \vec{f}(\vec{x}_0)}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Отсюда, и из определения частной производной, имеем

$$A_{ij} = \frac{\partial f_j(\vec{x}_0)}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k \quad j = 1, 2, \dots, n),$$

что и доказывает теорему. \square

Помимо частных производных функций векторного аргумента, в приложениях подобных функций большую роль играет понятие *производной по направлению*:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.16 Пусть $\vec{f} : (\Omega \subset \mathbb{R}^k) \mapsto \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1, k \geq 2$). Производной по направлению $\vec{\ell} \in \mathbb{R}^k$ в точке $\vec{x}_0 \in \Omega$ называют предел

$$\frac{\partial \vec{f}(\vec{x}_0)}{\partial \vec{\ell}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(\vec{x}_0 + \vec{\ell} \cdot t) - \vec{f}(\vec{x}_0)}{t}.$$

Отсюда видно, в частности, что введенная ранее частная производная $\partial \vec{f}(\vec{x}_0) / \partial x_i$ есть производная по направлению вектора \vec{e}_i . Оказывается, с помощью частных производных, можно выразить любую производную по направлению. Докажем это вначале для скалярной функции векторного аргумента.

ТЕОРЕМА 2.10

Если $f : (\Omega \subset \mathbb{R}^k) \mapsto \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $\vec{x}_0 \in \Omega$, то в этой точке существует производная по направлению скалярной функции $f(\vec{x})$, и эта производная равна

$$\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial \vec{\ell}} = (\text{grad } f(\vec{x}_0) \cdot \vec{\ell}). \quad (2.12)$$

Доказательство: Из дифференцируемости функции $f : (\Omega \subset \mathbb{R}^5) \mapsto \mathbb{R}$ в точке $\vec{x}_0 \in \Omega$ следует, что справедливо равенство

$$\Delta f(\vec{x}_0) = \vec{A} \cdot \Delta \vec{x} + \vec{\alpha}(\Delta \vec{x}) \cdot \Delta \vec{x},$$

где $\vec{\alpha}(\Delta x) \xrightarrow{\mathbb{R}^k} \vec{O}$ при $\Delta \vec{x} \xrightarrow{\mathbb{R}^k} \vec{O}$. Причем

$$\vec{A} = \text{grad } f(\vec{x}_0) = \left\{ \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_k} \right\}.$$

Полагая в предыдущем равенстве $\Delta \vec{x} = \vec{\ell} \cdot t$, и поделив обе части равенства на t , получаем

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + \vec{\ell} \cdot t) - f(\vec{x}_0)}{t} &= \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial \vec{\ell}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (\vec{A} \cdot \vec{\ell} + \vec{\alpha}(\Delta \vec{x}) \cdot \vec{\ell}) = \vec{A} \cdot \vec{\ell} = (\text{grad } f(\vec{x}_0) \cdot \vec{\ell}). \end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

Заметим еще, что в физических приложениях под производной по направлению обычно понимают *производную вдоль единичного вектора*, полагая, что длина вектора $\vec{\ell}$ равна единице ($|\vec{\ell}| \equiv 1$). Введенное выше понятие производной по направлению скалярной функции векторного аргумента позволяет определить производную по направлению векторной функции, как вектора от производных по направлению его компонент:

ТЕОРЕМА 2.11

Если $\vec{f} : (\Omega \subset \mathbb{R}^k) \mapsto \mathbb{R}^n$ дифференцируема в точке $\vec{x}_0 \in \Omega$, то в данной точке существует ее производная по любому направлению $\vec{\ell}$, равная

$$\frac{\partial \vec{f}(\vec{x}_0)}{\partial \vec{\ell}} = \left\{ \frac{\partial f_1(\vec{x}_0)}{\partial \vec{\ell}}, \dots, \frac{\partial f_n(\vec{x}_0)}{\partial \vec{\ell}} \right\}. \quad (2.13)$$

Доказательство: Подобно тому как и в предыдущей теореме, имеем

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(\vec{x}_0 + \vec{\ell} \cdot t) - \vec{f}(\vec{x}_0)}{t} &= \hat{A} \cdot \vec{\ell} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\vec{x}_0} \cdot \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_k \end{pmatrix} = \\ &= \{(\text{grad } f_1(\vec{x}_0) \cdot \vec{\ell}), \dots, (\text{grad } f_k(\vec{x}_0) \cdot \vec{\ell})\} = \left\{ \frac{\partial f_1(\vec{x}_0)}{\partial \vec{\ell}}, \dots, \frac{\partial f_n(\vec{x}_0)}{\partial \vec{\ell}} \right\}. \end{aligned}$$

□

Заметим в заключение, что производные высших порядков, как и в обычном анализе, вводятся по индукции, а многократное дифференцирование векторной функции сводится к многократному покоординатному дифференцированию.

2.8 Формула Тейлора

В приложениях выделенную роль играют ряд Тейлора и формула Тейлора. Поэтому приведем формулу для векторных функций. Ограничимся здесь формулой Тейлора векторной функции одного аргумента. С целью удобства дальнейших выкладок для функции $\vec{f} : ([a, b] \subset \mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}^n$ введем следующее обозначение

$$\vec{f}_{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n} \equiv \{f_1(\vec{x}_1), f_2(\vec{x}_2), \dots, f_n(\vec{x}_n)\},$$

символизирующее значения компонент функции при разных значениях аргумента. Для интересующей нас векторной функции одного аргумента данное обозначение примет вид

$$\vec{f}_{x_1, x_2, \dots, x_n} \equiv \{f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n)\}.$$

Вид формулы Тейлора для векторной функции одного аргумента вместе с остаточным членом устанавливает следующая

ТЕОРЕМА 2.12

Пусть $\vec{f} : ([a, b] \subset \mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}^n$, m – целое неотрицательное число, такое, что $\vec{f}(x) \in C^m[a, b]$, а $f^{(n+1)}(x)$ существует в любой точке $x \in (a, b)$. Если x_0 и x любые две точки сегмента $[a, b]$, то справедлива формула Тейлора

$$\vec{f}(x) = \sum_{p=1}^m \frac{\vec{f}^{(p)}(x_0)}{p!} (x - x_0)^p + \frac{(x - x_0)^{(m+1)}}{(m+1)!} \vec{f}_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}^{(m+1)}, \quad (2.14)$$

где $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – некоторые точки, лежащие между x_0 и x .

Соотношение (2.14) будем называть формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. **Доказательство:** При условиях теоремы, для каждой компоненты $f_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) векторной функции $\vec{f}(x)$ можно записать знакомую формулу Тейлора для функции одного переменного

$$f_i(x) = \sum_{p=1}^m \frac{f_i^{(p)}(x_0)}{p!} (x - x_0)^p + \frac{(x - x_0)^{(m+1)}}{(m+1)!} f_i^{(m+1)}(\xi_i), \quad (2.15)$$

где точки ξ_i лежат между x_0 и x . Используя правила сложения векторов и умножения вектора на число, отсюда получим

$$\begin{aligned}\vec{f}(x) &= \sum_{p=0}^m \frac{\vec{f}^{(p)}(x_0)}{p!} (x - x_0)^p + \\ &+ \frac{(x - x_0)^{(m+1)}}{(m+1)!} \{f_1^{(m+1)}(\xi_1), f_2^{(m+1)}(\xi_2), \dots, f_n^{(m+1)}(\xi_n)\} = \\ &= \sum_{p=1}^m \frac{\vec{f}^{(p)}(x_0)}{p!} (x - x_0)^p + \frac{(x - x_0)^{(m+1)}}{(m+1)!} \vec{f}_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}^{(m+1)}.\end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

Укажем пару полезных следствий данной теоремы: **Следствие 1:** Если в только-что доказанной теореме предположить, что $\vec{f}^{(n+1)}(x)$ ограничена на $[a, b]$ (согласно 2-й теореме Вейерштрасса, это действительно так, если $\vec{f}(x) \in C^{(n+1)}[a, b]$), то

$$\frac{(x - x_0)^{(m+1)}}{(m+1)!} \vec{f}_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}^{(m+1)} = \vec{o}((x - x_0)^m),$$

где $\vec{o}((x - x_0)^n)$ есть бесконечно-малая, при $x \mapsto x_0$, векторная величина более высокого порядка малости, чем $(x - x_0)^n$, и формула (2.14) может быть переписана в виде формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

$$\vec{f}(x) = \sum_{p=0}^m \frac{\vec{f}^{(p)}(x_0)}{p!} (x - x_0)^p + \vec{o}((x - x_0)^m).$$

Следствие 2: Если в формуле (2.14) положить $m = 0$, то получим формулу конечных приращений для векторной функции

$$\vec{f}(x) - \vec{f}(x_0) = \vec{f}'_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n} \cdot (x - x_0). \quad (2.16)$$

2.9 Интегрирование векторных функций одного аргумента

Завершим главу о векторных функциях естественным обобщением понятия риманова интеграла на векторные функции одного аргумента.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.17 Пусть $\vec{f} : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ –ограниченная функция, а множество точек $P = \{x_0, x_1, \dots, x_M\}$, таких, что

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

задает произвольное разбиение сегмента $[a, b]$. Составим интегральную сумму

$$\sigma(P, \vec{f}, t_i) = \sum_{i=1}^M \vec{f}(t_i) \Delta x_i,$$

где t_i – произвольная точка сегмента $[x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Введем обозначение $\mu(P) = \max_i \Delta x_i$. Вектор $\vec{A} \in \mathbb{R}^n$ называют пределом интегральной суммы $\sigma(P, \vec{f}, t_i)$ при $\mu(P) \mapsto 0$, если

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0) (\forall P \in [a, b], \mu(P) < \delta) (\forall t_i \in [x_{i-1}, x_i]) : \|\sigma(P, \vec{f}, t_i) - \vec{A}\| < \varepsilon.$$

Если предел интегральной суммы существует, то будем говорить, что функция $\vec{f}(x)$ интегрируема по Риману на $[a, b]$ и писать $\vec{f}(x) \in \mathcal{R}[a, b]$. Этот предел будем называть интегралом от векторной функции $\vec{f}(x)$ по сегменту $[a, b]$

$$\int_a^b \vec{f}(x) dx = \lim_{\mu(P) \mapsto 0} \sigma(P, \vec{f}, t_i).$$

Из этого определения легко получить, что

$$\int_a^b \vec{f}(x) dx = \left\{ \int_a^b f_1(x) dx, \int_a^b f_2(x) dx, \dots, \int_a^b f_n(x) dx \right\}.$$

Сформулируем основные свойства интегралов от векторной функции. Их доказательство проводится аналогично доказательству свойств интеграла от функции действительного переменного. 1. Если $\vec{f}(x) \in C[a, b]$, то $\vec{f}(x) \in \mathcal{R}[a, b]$. 2. Если $\vec{f}(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, $\vec{g}(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, то для любых действительных чисел α и β функция $\alpha \vec{f}(x) + \beta \vec{g}(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ и

$$\int_a^b [\alpha \vec{f}(x) + \beta \vec{g}(x)] dx = \alpha \int_a^b \vec{f}(x) dx + \beta \int_a^b \vec{g}(x) dx.$$

3. Если $\vec{f}(x) \in \mathcal{R}[a, b]$, то для любого c , $a < c < b$, $\vec{f}(x) \in \mathcal{R}[a, c]$, $\vec{f}(x) \in \mathcal{R}[c, b]$ и

$$\int_a^b \vec{f}(x) dx = \int_a^c \vec{f}(x) dx + \int_c^b \vec{f}(x) dx.$$

4. Если $\vec{f}(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ и $\vec{F}'(x) = \vec{f}(x)$ на $[a, b]$, то

$$\int_a^b \vec{f}(x) dx = \vec{F}(b) - \vec{F}(a).$$

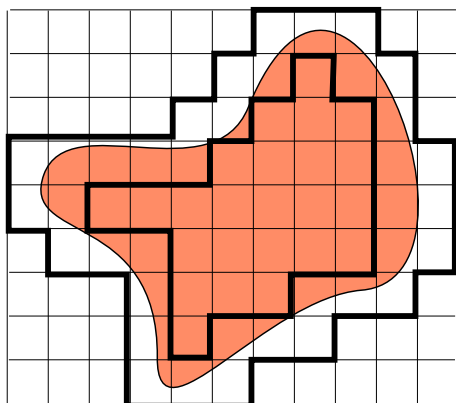


Рис. 2.1: Иллюстрация к нахождению площади (меры) измеримой плоской области.

Имеет место *теорема о среднем*:

ТЕОРЕМА 2.13

Если $\vec{f}(x) \in C[a, b]$, то существуют точки $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ сегмента $[a, b]$ такие, что

$$\int_a^b \vec{f}(x) dx = \vec{f}_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n} \cdot (b - a).$$

Доказательство: Каждая координата $f_i(x)$ векторной функции $\vec{f}(x)$ – непрерывная функция на $[a, b]$ и, следовательно, существуют $\xi_i \in [a, b]$ такие, что $\int_a^b f_i(x) dx = f_i(\xi_i)(b - a)$. Но тогда

$$\int_a^b \vec{f}(x) dx = (f_1(\xi_1), f_2(\xi_2), \dots, f_m(\xi_m))(b - a) = \vec{f}_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n} \cdot (b - a).$$

Теорема доказана. \square

2.10 Кратные интегралы

Помимо рассмотренных выше определенных интегралов, в приложениях широко используют *кратные интегралы*. Обсудим их на примере 2-кратного интеграла от функции $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$. Далее удобно будет записывать эту функцию в виде $f = f(x, y)$, явно указывающем ее аргументы.

Областью интегрирования 2-кратных интегралов служат *измеримые* (квадрируемые) плоские области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Напомним, какие плоские об-

ласти называют измеримыми. Для этого нанесем на плоскости (x, y) горизонтальные и вертикальные прямые, отстоящие друг от друга, соответственно, на расстояниях Δ_x и Δ_y (см. рис. 2.2). Обозначим за \mathcal{S}_* область, составленную из всех прямоугольников, полностью убирающихся внутрь области Ω , а за S_* ее суммарную площадь. Аналогично, \mathcal{S}^* область из прямоугольников, хотя-бы частично попадающих в Ω , а S^* -их площадь. Если, при $\Delta_x, \Delta_y \rightarrow 0$, пределы S^* и S_* существуют и равны между собой:

$$\lim_{\Delta_x, \Delta_y \rightarrow 0} S^* = \lim_{\Delta_x, \Delta_y \rightarrow 0} S_* = S,$$

то область Ω называют измеримой, а указанный предел S называют *мерой* (площадью) области Ω . Мы готовы к тому, чтобы дать определение 2-кратного интеграла:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.18 Пусть

$$\{\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_k, \dots, \Delta S_N\}$$

площади прямоугольников, составляющих область \mathcal{S}_* . Произвольным образом выберем в каждом из них точку M_k и составим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^N f(M_k) \Delta S_k. \quad (2.17)$$

Если предел этой суммы при $\Delta_x, \Delta_y \rightarrow 0$ существует, и не зависит от выбора точек $\{M_1, M_2, \dots, M_k, \dots, M_N\}$, то его называют 2-кратным интегралом от функции $f(M)$.

Можно показать, что, помимо условия измеримости области Ω , для существования 2-кратного интеграла достаточно, чтобы функция f была непрерывной на замкнутой области $\bar{\Omega}$.

Приведем два общеупотребительных обозначения 2-кратного интеграла:

$$\iint_{\Omega} f(M) dS = \iint_{\Omega} f(M) dx_1 dx_2.$$

В дальнейшем нам понадобится еще понятие *простой области*:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.19 Область $G \subset \mathbb{R}^2$ назовем *простой*, если ее можно разбить как на конечное число криволинейных трапеций вида

$$\{y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \quad a \leq x \leq b\},$$

так и на конечное число криволинейных трапеций вида

$$\{x_1(y) \leq x \leq x_2(y), \quad c \leq y \leq d\}.$$

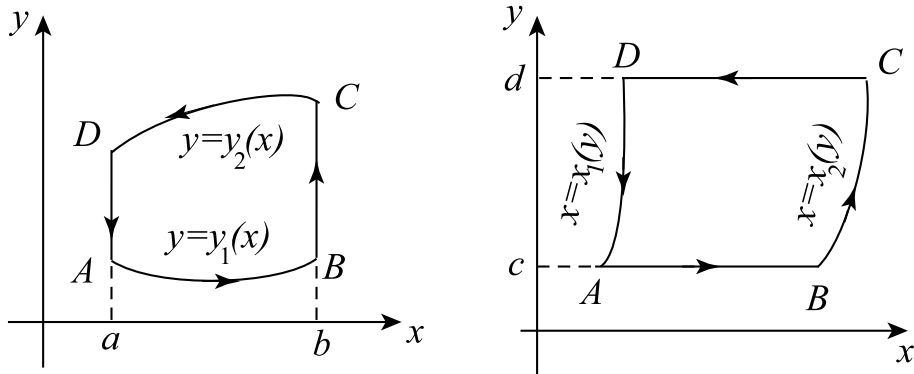


Рис. 2.2: Типичные примеры криволинейных трапеций.

На рис. 2.2 изображены типичные криволинейные трапеции, а на рис. 2.3 дан пример простой области, разбиваемой на криволинейные трапеции обоих типов.

Нетрудно показать, что любые области, ограниченные кусочно-гладкими кривыми, измеримы и простые.

Упомянем свойства 2-кратных интегралов, которые понадобятся нам в дальнейшем:

- Свойство аддитивности:** Если $\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n\}$ - набор конечного числа не пересекающихся областей, вместе составляющих область Ω , то интеграл по области Ω равен сумме интегралов по перечисленным областям:

$$\iint_{\Omega} f(M) dS = \sum_{k=1}^n \iint_{\Omega_k} f(M) dS$$

Если область простая, то 2-кратный интеграл выражается через повторные интегралы, а его вычисление сводится к последовательному вычислению обычных определенных интегралов. Это позволяет сделать следующее свойство:

- Сведение к повторному интегралу:** Если Ω - криволинейная трапеция вида

$$\{y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \quad a \leq x \leq b\},$$

то 2-кратный интеграл равен повторному интегралу

$$\iint_{\Omega} f(M) dS = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

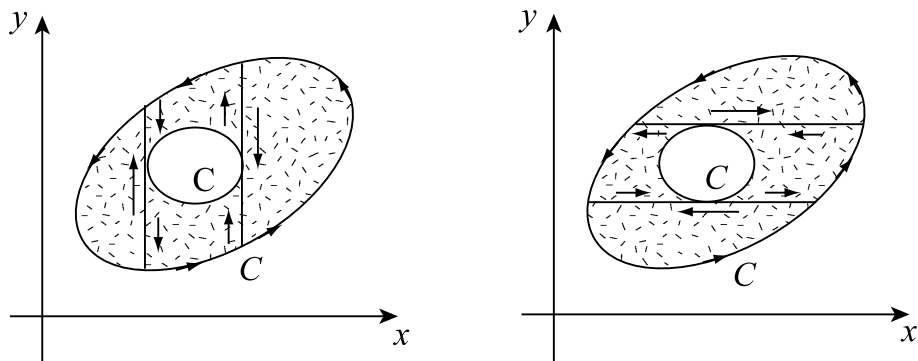


Рис. 2.3: Простая область, разбиваемая на конечное число криволинейных трапеций.

Аналогичное свойство справедливо и для криволинейных трапеций 2-го типа.

Помимо 2-кратных интегралов, в приложениях встречаются n -кратные интегралы по измеримым областям $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, естественным образом обобщающие понятие 2-кратного интеграла на арифметические пространства произвольной размерности n . Приведем теорему о среднем для n -кратного интеграла (через $\text{mes} \mathcal{D}$ обозначена мера области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$):

ТЕОРЕМА 2.14

Пусть \mathcal{D} – ограниченная, замкнутая, измеримая область в \mathbb{R}^k и функция $\vec{f}: \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}^m$ – непрерывная в \mathcal{D} . Тогда существуют $\vec{x}_i \in \mathcal{D}$ такие, что

$$\int_{\mathcal{D}} \vec{f}(\vec{x}) d^n x = \vec{f}_{\vec{x}_1 \vec{x}_2 \dots \vec{x}_m} \cdot \text{mes} \mathcal{D}.$$

В заключение дадим для справки формулу замены переменных в n -кратном интеграле: Пусть

$$\vec{x}: \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$$

-непрерывно-дифференцируемая векторная функция, осуществляющая взаимно-однозначное отображение области $\mathcal{B}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ на область

$\mathcal{A}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, и такая, что всюду в области $\overline{\mathcal{B}}$ якобиан отображения

$$J(\vec{y}) = \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

больше нуля. Тогда справедлива формула

$$\int_{\mathcal{A}} \vec{f}(\vec{x}) d^n x = \int_{\mathcal{B}} \vec{f}(\vec{x}(\vec{y})) J(\vec{y}) d^n y. \quad (2.18)$$