Глава 3

Криволинейные интегралы

В данной главе мы подробно обсудим понятия криволинейных интегралов, берущихся вдоль кривых в пространстве. К подобным интегралам приводит, например, необходимость вычислять массы материальных кривых (нитей, проволок переменной линейной плотности), а также работу, совершаемую при перемещении масс и зарядов в силовых полях. Но прежде чем дать определение и научиться вычислять подобные интегралы, освежим в памяти математическое описание пространственных кривых.

3.1 Пространственные кривые

Напомним, что кривой (обозначим ее $\mathcal{C}$) называют годограф непрерывной векторной функции $\vec{r}(t)$, отображающей отрезок $[a, b]$ оси t в точки трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$. При этом функцию $\vec{r}(t)$ называют *векторной параметризацией* кривой $\mathcal{C}$.

Для определенности будем полагать, что в трехмерном пространстве имеется декартова система координат (см. рис. 3.1), направления осей которой заданы тремя единичными *базисными* векторами *ортами* декартовой системы координат) $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Соответственно, каждой точке пространства поставлен в соответствие, испущенный из начала декартовой системы координат, радиус-вектор $\vec{r}$ с координатами $\{x, y, z\}$:

$$\vec{r} = \vec{i}\, x + \vec{k}\, y + \vec{k}\, z\,.$$

При этом возможны три способа задания кривой

1. С помощью векторной функции

$$\vec{r} = \vec{r}(t)\,, \qquad t \in [\tau, T]\,,$$

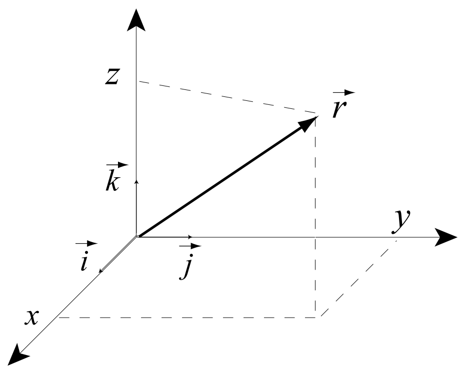

Рис. 3.1: Образ элемента пространства $\mathbb{R}^3$ в декартовой системе координат. Показаны оси декартовой системы и их *орты* –направленные вдоль осей единичные векторы $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Оси выбраны в таком порядке, чтобы орты образовывали правую тройку.

2. в явном виде

$$y = y(x)\,, \qquad z = z(x)\,, \qquad x \in [a, b]\,,$$

3. параметрически

$$x = x(t)\,, \qquad y = y(t)\,, \qquad z = z(t) \qquad t \in [\tau, T]\,.$$

Кроме того, если известно явное или параметрическое задание кривой, то ее можно записать в векторном виде:

$$\vec{r} = \vec{i}\,x + \vec{j}\,y(x) + \vec{k}\,z(x)\,, \qquad x \in [a, b]\,, \tag{3.1}$$

или

$$\vec{r} = \vec{i}\,x(t) + \vec{j}\,y(t) + \vec{k}\,z(t)\,, \qquad t \in [\tau, T]\,. \tag{3.2}$$

В дальнейшем мы будем, в основном, оперировать *простыми кривыми*, не имеющими точек самопересечения. Дадим математическое определение подобных кривых:

Определение 3.1 *Кривую $\mathcal{C}$ называют простой, если ее векторная параметризация $\vec{r}(t) : [\tau, T] \mapsto \mathbb{R}^3$ осуществляет взаимно-однозначное отображение отрезка $[\tau, T]$ в $\mathbb{R}^3$.*

Имеется также строгое математическое определение *гладкой кривой*, высвечивающее прямую связь между аналитическими свойствами векторных функций и гладкостью соответствующих кривых.

Определение 3.2 *Простую кривую $\mathcal{C}$ называют гладкой, если ее параметризация $\vec{r}(t) : [\tau, T] \mapsto \mathbb{R}^3$ – непрерывно-дифференцируемая на $[\tau, T]$.*

Кроме того, в дальнейшем нам понадобится определение *кусочно-гладкой кривой*:

Определение 3.3 *Простую кривую $\mathcal{C}$ называют кусочно-гладкой, если ее параметризация $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [\tau, T]$ – непрерывно-дифференцируемая функция на отрезке $[\tau, T]$, за исключением конечного числа точек $t_i \in [\tau, T]$.*

3.2 Длина кривой

Первое, чем обычно интересуются, изучая кривые в пространстве, это длина кривой. Дадим строгое математическое определение данного понятия.

Определение 3.4 *Пусть $\mathcal{C}$ – кривая в пространстве $\mathbb{R}^3$ ($\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$), соединяющая точки A и B. Разобьем эту кривую точками*

$$A = M_0,\, M_1,\, \ldots, M_{i-1},\, M_i, \ldots, M_N = B\,, \tag{3.3}$$

так, чтобы они шли в порядке возрастания индекса от точки A к точке B. Соединив последовательно эти точки отрезками, получим ломаную кривую

$$\overrightarrow{M_0M_1} \ldots \overrightarrow{M_{i-1}M_i} \ldots \overrightarrow{M_{N-1}M_N}\,,$$

вписанную в кривую $\mathcal{C}$. Периметр p этой ломаной равен

$$p = \sum_{i=1}^{N} |\,\overrightarrow{M_{i-1}M_i}\,|\,.$$

Длиной $L = L[\mathcal{C}]$ кривой $\mathcal{C}$ называют точную верхнюю грань множества периметров всевозможных вписанных в кривую ломаных:

$$L = \sup\{L\}\,.$$

Если это число ограничено, то кривую называют спрямляемой.

Следующую теорему, которую часто используют как определение длины кривой, примем без доказательства:

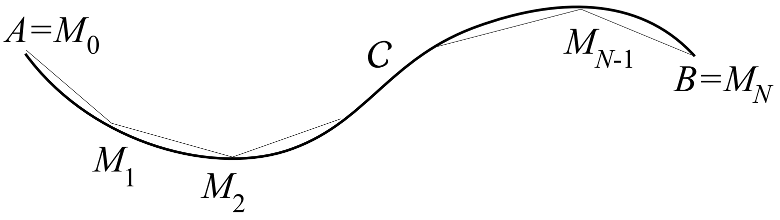

Рис. 3.2: Типичная спрямляемая кривая $\mathcal{C}$ и вписанная в нее ломаная кривая.

Теорема 3.1
Если $\mathcal{C}$ простая спрямляемая кривая, соединяющая точки A и B, то ее длина равна пределу

$$L[\mathcal{C}\,] = \lim_{\max|\,\overrightarrow{M_{i-1}M_i}\,|\to 0} \sum_{i=1}^{N} |\,\overrightarrow{M_{i-1}M_i}\,|\,,$$

где точки (3.3) –любые точки, расположенные на кривой в порядке следования от A к B.

Математический инструмент вычисления длины кривой дает следующая

Теорема 3.2
Если $\mathcal{C}$ – гладкая кривая с параметризацией $\vec{r}(t) : [\tau, T] \mapsto \mathbb{R}^3$, то длина кривой существует и равна величине определенного интеграла

$$L[\mathcal{C}\,] = \int_{\tau}^{T} |\vec{r}\,'(t)|\,dt\,. \tag{3.4}$$

Доказательство: Разобьем отрезок $[\tau, T]$ точками

$$\tau = t_0 < t_1 < \ldots d < t_{i-1} < t_i < t_n = T\,,$$

которым на кривой $\mathcal{C}$ соответствуют точки (3.3) и периметр вписанной ломаной

$$p = \sum_{i=1}^{N} |\overrightarrow{M_{i-1}M_i}\,| = \sum_{i=1}^{N} |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})|.$$

Используем формулу конечных приращений (2.16)

$$\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1}) = \vec{r}\,'_{\xi_1\xi_2\xi_3}\Delta t_i\,,$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 — точки из интервала (t_{i-1}, t_i). Тогда

$$p = \sum_{i=1}^{n} |\vec{r}\,'_{\xi_1\xi_2\xi_3}|\Delta t_i\,.$$

Откуда, переходя к пределу, получаем

$$L[\mathcal{C}] = \lim_{\max|\overrightarrow{M_{i-1}M_i}|\mapsto 0} \sum_{i=1}^{n} |\overrightarrow{M_{i-1}M_i}| = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} |\vec{r}'_{\xi_1\xi_2\xi_3}|\Delta t_i = \int_a^b |\vec{r}'(t)|\, dt\,.$$

Последний предельный переход требует более детального доказательства, которое мы здесь опускаем.

3.3 Естественный параметр

Пусть $\mathcal{C}$ –спрямляемая кривая, соединяющая точки A и B. Для любой точки $M \in \mathcal{C}$ введем *естественный параметр* ℓ, $0 \leqslant \ell \leqslant L$ (L – длина кривой $\mathcal{C}$), равный длине дуги AM, отсчитываемой от точки A. Если на кривой введен естественный параметр, то

$$L = \int_0^L d\ell = L\,.$$

Если же кривая задана с помощью непрерывно-дифференцируемой векторной функции $\vec{r}(t) : [\tau, T] \mapsto \mathbb{R}^3$, то $\ell = \ell(t)$, и

$$\ell(t) = \int_\tau^t |\vec{r}'(t)|\, dt \qquad \Rightarrow \qquad L = \int_0^L d\ell = \int_\tau^T |\vec{r}'(t)|\, dt\,.$$

Рассмотрим сегмент $[t_0, t_0 + \Delta t] \subset (a, b)$. Его длина равна

$$\Delta\ell = \ell(t_0 + \Delta t) - \ell(t_0) = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} |\vec{r}'(t)|\, dt\,.$$

Пусть кривая $\mathcal{C}$ гладкая. Тогда $|\vec{r}'(t)|$ непрерывная функция и, по теореме о среднем, имеется точка $\xi \in [t_0, t_0 + \Delta t]$, такая, что

$$\Delta\ell = |\vec{r}'(\xi)|\Delta t\,.$$

В силу непрерывности $|\vec{r}'(t)|$ в точке t_0 имеем $|\vec{r}'(\xi)| = |\vec{r}'(t_0)| + \alpha$, где $\alpha \mapsto 0$ при $\Delta t \mapsto 0$. Соответственно

$$\Delta\ell = |\vec{r}'(t_0)|\Delta t + \alpha \cdot \Delta t\,,$$

то есть $\ell(t)$ дифференцируемая функция, а ее дифференциал равен (в силу произвольности точки t_0)

$$d\ell = |\vec{r}'(t)|\, dt\,. \tag{3.5}$$

Назовем его *дифференциалом длины дуги кривой*. Из сказанного, в частности, следует, что если кривая задана в виде

$$\vec{r}(t) = \vec{i}\,x(t) + \vec{j}\,y(t) + \vec{k}\,z(t)\,,$$

то

$$\vec{r}'(t) = \vec{i}\,x'(t) + \vec{j}\,y'(t) +)\vec{k}z'(t)\,, \tag{3.6}$$

и дифференциал длины дуги равен

$$d\ell = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt = \sqrt{(x'(t)dt)^2 + (y'(t)dt)^2 + (z'(t)dt)^2}\,,$$

или, на языке дифференциалов,

$$d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\,.$$

Следовательно, квадрат длины дуги кривой вычисляется по формуле

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2\,. \tag{3.7}$$

Последняя формула является естественным аналогом известной теоремы Пифагора.

Рассмотрим единичный вектор $\vec{\tau}$, касательный к кривой $\mathcal{C}$ в точке M, и направленный в сторону возрастания параметра ℓ (так называемый *положительный обход кривой*). Очевидно, этот вектор равен

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} \tag{3.8}$$

Заметим еще, что если в формуле (3.5) положить $t = \ell$, то приходим к равенству $d\ell = |\vec{r}'(\ell)|\,d\ell$, откуда имеем $|\vec{r}'(\ell)| = 1$. Последнее означает, что если $t = \ell$ – естественный параметр, то касательный вектор равен

$$\vec{\tau} = \vec{r}'(\ell) = \vec{i}\,\cos\alpha + \vec{j}\,\cos\beta + \vec{j}\,\cos\gamma\,, \tag{3.9}$$

где $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ направляющие косинусы вектора касательной к кривой $\mathcal{C}$. Из (3.9) и (3.6) видно, что

$$\cos\alpha = x'(\ell)\,, \qquad \cos\beta = y'(\ell)\,, \qquad \cos\gamma = z'(\ell)\,. \tag{3.10}$$

3.4 Криволинейный интеграл 1-го типа

Обсудим понятие *криволинейного интеграла 1-го типа*, к которым сводится, например, вычисление масс материальных кривых (нитей, проволок и т.д.), имеющих переменную плотность. Подынтегральными функциями подобных интегралов служат скалярные функции векторного аргумента. Например функция $f(M)$, определенная во всех точках M кривой $\mathcal{C}$.

Дадим строгое определение криволинейного интеграла 1-го типа:

Определение 3.5 *Пусть $\mathcal{C}$ спрямляемая кривая, соединяющая точки A и B, а $f(M) : \mathcal{C} \mapsto \mathbb{R}$ ограниченная скалярная функция. Разобьем кривую точками (3.3) на дуги $M_{i-1}M_i$, $i = 1, 2, \dots, N$. Выберем на каждой из дуг $M_{i-1}M_i$ точку M_i, и составим сумму*

$$\sum_{i=1}^{N} f(M_i)\, \Delta\ell_i\,,$$

где $\Delta\ell_i$ — длина дуги $M_{i-1}M_i$. Если предел

$$\lim_{\max \Delta\ell_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(M_i) \Delta\ell_i$$

существует, то его называют криволинейным интегралом 1-го типа и обозначают

$$\int\limits_{\mathcal{C}} f(M)\, d\ell\,. \tag{3.11}$$

Сделаем несколько замечаний по поводу данного определения:

Замечание: В зависимости от способа указания точек в пространстве, будем использовать, наравне с (3.11), и другие формы записи криволинейного интеграла 1-го типа. Например

$$\int\limits_{\mathcal{C}} f(\vec{r})\, d\ell \qquad\qquad \int\limits_{\mathcal{C}} f(x, y, z)\, d\ell\,. \qquad \triangle$$

Замечание: Из определения следует, что величина криволинейного интеграла 1-го типа *не зависит от выбранного направления обхода кривой*. Этим он отличается от обыкновенного определенного интеграла, "переворачивание" пределов которого влечет смену знака интеграла. $\triangle$

Замечание: Напомним физический смысл криволинейного интеграла 1-го типа: Если линейная плотность материальной кривой $\mathcal{C}$ равна

$\varrho = f(M)$, то масса всей кривой равна криволинейному интегралу (3.11). $\triangle$

Криволинейные интегралы 1-го типа вычисляют, сводя их к обычным определенным интегралам. Формула перехода от криволинейного интеграла 1-го типа к определенному интегралу содержится в следующей теореме:

Теорема 3.3
Пусть $\mathcal{C}$ гладкая кривая с параметризацией $\vec{r}(t) : [\tau, T] \mapsto \mathbb{R}^3$, и $f(M)$ функция, интегрируемая вдоль этой кривой. Тогда

$$\int\limits_{\mathcal{C}} f(M)\, d\ell = \int\limits_{\tau}^{T} f(\vec{r}(t))\, |\vec{r}\,'(t)|\, dt\,. \tag{3.12}$$

Доказательство: Разобьем сегмент $[a, b]$ на интервалы

$$[t_{i-1}, t_i]\,, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \qquad \text{точками} \qquad \tau = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T\,.$$

При этом кривая $\mathcal{C}$ разбивается на дуги $M_{i-1}M_i$ точками M_i, соответствующими значениям t_i. Выбирая на дугах $M_{i-1}M_i$ произвольные точки M_i, составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{N} f(M_i)\, \Delta\ell_i\,.$$

Длина дуги $M_{i-1}M_i$ вычисляется по формуле

$$\Delta\ell_i = L[M_{i-1}\, M_i] = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} |\vec{r}\,'(t)|\, dt\,.$$

Отсюда и из теоремы о среднем имеем $\Delta\ell_i = |\vec{r}\,'(\eta_i)|\Delta t_i$, где $\eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Выберем точк $M_i = \vec{r}(\eta_i)$, тогда

$$\sum_{i=1}^{N} f(M_i)\, \Delta\ell_i = \sum_{i=1}^{N} f(\vec{r}(\eta_i))|\vec{r}\,'(\eta_i)|\, \Delta t_i\,.$$

Переходя здесь к пределу $\max \Delta t_i \to 0$ (тогда, в силу непрерывности функции $\vec{r}(t)$, и $\max \Delta\ell_i \to 0$), приходим к формуле (3.12). $\square$

3.5 Вычисление криволинейных интегралов 1-го типа

При вычислении криволинейных интегралов чаще всего пользуются декартовой системой координат, где радиус-вектор задается равенством (3.2). Будем в дальнейшем считать кривую $\mathcal{C}$, по которой ведется интегрирование, гладкой. Последнее означает, что входящие в (3.2) функции $\{x(t), y(t), z(t)\}$ непрерывно-дифференцируемы на отрезке $t \in [\tau, T]$.

Найдем явную формулу вычисления криволинейного интеграла 1-го типа в декартовой системе координат. Для этого подставим модуль производной радиус-вектора (3.6)

$$|\vec{r}\,'(t)| = \frac{d\ell}{dt} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$$

в правую часть формулы (3.12). В итоге получим:

$$\int\limits_{\mathcal{C}} f(M)\, d\ell = \int\limits_{\tau}^{T} f(\vec{r}\,(t))\sqrt{x'\,^2(t) + y'\,^2(t) + z'\,^2(t)}\, dt\,.$$

Заметив еще, что в декартовой системе координат подынтегральная функция векторного аргумента сводится к функции трех аргументов

$$f(\vec{r}\,(t)) = f(x(t), y(t), z(t))\,,$$

перепишем формулу в окончательном виде:

$$\int\limits_{\mathcal{C}} f(M)\, d\ell = \int\limits_{\tau}^{T} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'\,^2(t) + y'\,^2(t) + z'\,^2(t)}\, dt\,. \tag{3.13}$$

Приведем несколько других полезных формул вычисления криволинейного интеграла. Так если кривая целиком лежит в плоскости $\{x,\, y\}$ $(z = 0)$, то $z' \equiv 0$, $f(\vec{r}\,) = f(x(t), y(t))$, и из (4) имеем:

$$\int\limits_{\mathcal{C}} f(M)\, d\ell = \int\limits_{\tau}^{T} f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt\,. \tag{3.14}$$

Пусть, кроме того, кривая задана однозначной функцией $y = y(x)$. Тогда за параметр t естественно выбрать координату x и вычислять криволинейный интеграл по формуле

$$\int\limits_{\mathcal{C}} f(M)\, d\ell = \int\limits_{a}^{b} f(x,\, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx\,. \tag{3.15}$$

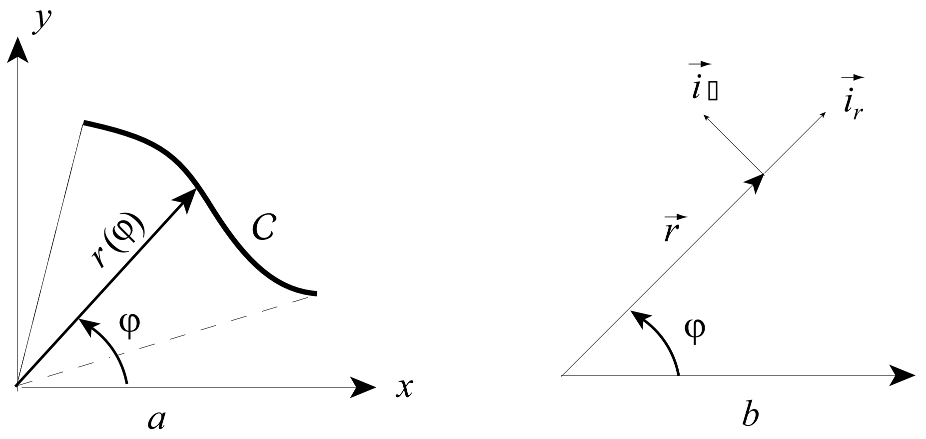

Рис. 3.3: Иллюстрация к вычислению криволинейного интеграла в полярных координатах. Слева дана кривая $\mathcal{C}$, по которой ведут интегрирование, и текущий полярный угол φ точки, удаленной от начала координат на $r(\varphi)$. Пунктиры дают направления на крайние точки кривой, отвечающие углам ϕ и Φ. Справа изображен радиус-вектор точки и орты локального базиса полярных координат $\{r,\varphi\}$ в этой точке. Если сместить базисный вектор $\vec{i}_r$ в начало координат, то с ростом φ он будет вращаться со скоростью $\vec{i}_\varphi$.

Здесь $[a,\, b]$ –отрезок на оси x, на который проектируется плоская кривая.

Иногда плоскую кривую удобно задать в полярной системе координат $\{r,\, \varphi\}$, то есть так, что интересующий нас участок кривой задан уравнением

$$r = r(\varphi) \qquad (\phi \leq \varphi \leq \Phi)\,.$$

Здесь $(\phi,\, \Phi)$ –раствор углов, под которым из начала координат виден исследуемый участок кривой.

В подобных случаях удобно свести криволинейный интеграл к определенному интегралу по углу φ. Чтобы сделать это, выразим декартовы координаты точек кривой через полярные координаты:

$$x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi\,, \quad y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi\,.$$

Заменив в (3.14) t на φ и подставив под знаком корня в интеграле квадраты производных x и y по φ:

$$x' = r'\cos\varphi - r\sin\varphi\,, \quad y' = r'\sin\varphi + r\cos\varphi\,,$$

придем к искомой форме записи криволинейного интеграла:

$$\int\limits_{\mathcal{C}} f(\vec{r}(\varphi))d\ell = \int_\phi^\Phi f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, d\varphi\,. \tag{3.16}$$

Изложенный выше переход от криволинейного интеграла к определенному интегралу по полярному углу, чересчур "привязан" к исходной декартовой системе координат $\{x, y\}$. Порой это создает неудобства, особенно если интегрируемая функция изначально задана как функция полярных координат: $f = f(r, \varphi)$. Поэтому выведем формулу, родственную (3.16), опираясь на разложение векторов по *локальному базису* полярной системы координат. Другими словами, в каждой точке пространства с полярными координатами $\{r,\ \varphi\}$ зададим два взаимноперпендикулярных вектора $\vec{i}_r$ и $\vec{i}_\varphi$. Первый из них направлен от центра полярной системы координат в сторону рассматриваемой точки, а второй касателен окружности радиуса r, описанной вокруг центра полярной системы координат, и направлен в сторону возрастания угла φ (см. рис. 3.3 справа). С их помощью радиус-вектор кривой интегрирования запишется в виде:

$$\vec{r} = r(\varphi)\,\vec{i}_r\,.$$

Дифференцируя его по φ и заметив, что производная базисного радиального вектора

$$\frac{d\vec{i}_r}{d\varphi} = \vec{i}_\varphi$$

равна базисному угловому вектору ($\vec{i}_r \perp \vec{i}_\varphi$), получим:

$$d\ell = |\vec{r}\,'(\varphi)|\,d\varphi = \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2\,(\varphi)}d\varphi\,.$$

Здесь штрихом обозначена производная по φ. Следовательно, криволинейный интеграл по кривой, заданной в полярной системе координат, вычисляется по формуле:

$$\int\limits_{\mathcal{L}} f(r, \varphi)\,d\ell = \int_\phi^\Phi f\left(r(\varphi), \varphi\right)\sqrt{r^2(\varphi) + r'\,^2(\varphi)}\,d\varphi\,. \tag{3.17}$$

3.6 Криволинейный интеграл 2-го типа

В отличие от криволинейного интеграла 1-го типа, подынтегральной функцией в криволинейном интеграле 2-го типа служит векторная функция векторного аргумента $\vec{A}(M) : \mathcal{C} \mapsto \mathbb{R}^3$:

Определение 3.6 *Пусть $\mathcal{C}$ — гладкая кривая и $\vec{A}(M) : \mathcal{C} \mapsto \mathbb{R}^3$ ограниченная векторная функция. Положим*

$$f(M) = \left(\vec{A}(M)\cdot\vec{\tau}(M)\right)\,, \qquad M \in \mathcal{C}\,,$$

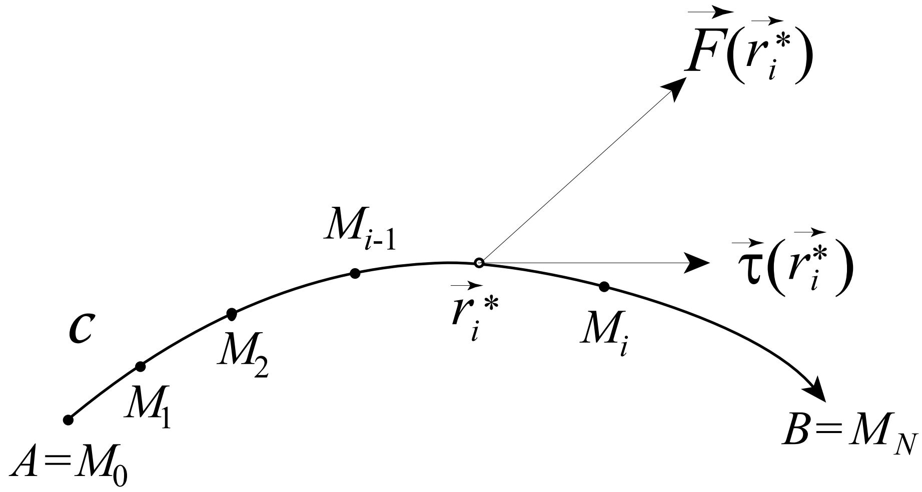

Рис. 3.4: Иллюстрация к определению работы перемещения частицы вдоль кривой $\mathcal{C}$ от начальной A до конечной точки B. Указаны векторы силового поля $\vec{F}$ и касательной $\vec{\tau}$ к кривой в направлении движения частицы, в некоторой точке $\vec{r}_i^*$ i-й элементарной дуги, на которые разбита кривая $\mathcal{C}$.

где $\vec{\tau}(M)$ — касательный к кривой $\mathcal{C}$, в точке M, единичный вектор, направление которого совпадает с выбранным направлением обхода кривой. Интеграл

$$\int\limits_{\mathcal{C}} f(M)\, d\ell = \int\limits_{\mathcal{C}} \Big(\vec{A}(M)\cdot\vec{\tau}(M)\Big)\, d\ell \tag{3.18}$$

называют криволинейным интегралом 2-го типа.

Замечание: Из определения следует, что криволинейный интеграл 2-го типа зависит от выбранного направления обхода кривой. При этом, если $\mathcal{C}$ — кривая, соединяющая точки A и B, то

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \Big(\vec{A}\cdot\vec{\tau}\Big)\, d\ell = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} \Big(\vec{A}\cdot\vec{\tau}\Big)\, d\ell\,.$$

Смена знака происходит из-за того, что при смене направления касательного вектора $\vec{\tau}$ на противоположное, меняется знак скалярного произведения в определении криволинейного интеграла 2-го типа. $\triangle$

Поясним физический смысл криволинейного интеграла 2-го типа на примере вычисления работы, совершаемой частицей в силовом поле.

Пусть имеется силовое поле $\vec{F}(M) : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, действующее на движущуюся частицу. Вычислим работу по перемещению частицы вдоль гладкой ориентированной кривой $\mathcal{C}$, соединяющей точки A и B. Для этого разобьем кривую $\mathcal{C}$ точками

$$A = M_0\,,\ M_1\,, \ldots\,, M_{k-1}\,,\ M_k\,, \ldots\,, M_N = B$$

на дуги $M_{i-1}\ M_i$, $i = 1, \ldots, n$. Из физики известно, что работа при перемещении вдоль маленькой, практически прямолинейной, дуги $M_{i-1}\ M_i$, вдоль которой силовое поле $\vec{F}(M)$ можно считать постоянным, приближенно равна

$$\left(\vec{F}(M_i^*) \cdot \vec{\tau}(M_i^*)\right) \Delta\ell_k\,,$$

где M_i^* –любая точка дуги $M_{i-1}\ M_i$, $\vec{\tau}(M_i^*)$ –единичный касательный вектор к кривой в точке M_i^*, направленный в сторону движения, $\Delta\ell_k$ – длина дуги $M_{k-1}\ M_k$. Складывая вместе работу вдоль всех дуг $M_{i-1}\ M_i$, найдем, что полная работа по перемещению материальной точки вдоль кривой $\mathcal{C}$ приближенно равна интегральной сумме

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}(M_i^*) \cdot \vec{\tau}(M_i^*)\right) \Delta\ell_i\,.$$

Предел входящей сюда суммы при $\max \Delta\ell_i \to 0$ (существующий, в случае гладкой кривой $\mathcal{L}$ и непрерывного поля $\vec{F}(\vec{r})$, независимо от способа разбиения) равен криволинейному интегралу 2-го типа:

$$\int \left(\vec{F}(M) \cdot \vec{\tau}(M)\right) d\ell\,.$$

Способ вычисления криволинейного интеграла 2-го типа в декартовой системе координат указан в следующей теореме:

Теорема 3.4
Пусть $\mathcal{C}$ –гладкая кривая, заданная уравнением

$$\vec{r} = \vec{i}\,x(t) + \vec{j}\,y(t) + \vec{k}\,z(t)\,, \qquad t \in [\tau, T]\,.$$

Кроме того

$$\vec{A}(x, y, z) = \vec{i}\,P(x, y, z) + \vec{j}\,Q(x, y, z) + \vec{k}\,R(x, y, z) \tag{3.19}$$

непрерывная векторная функция, заданная на кривой $\mathcal{C}$. Тогда криволинейный интеграл 2-го типа (3.18) существует и может быть вычислен по формуле

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \left(\vec{A} \cdot \vec{\tau}\right)\, d\ell = \int\limits_{\tau}^{T} \left(\vec{A} \cdot \vec{r}'\right)\, dt\,, \tag{3.20}$$

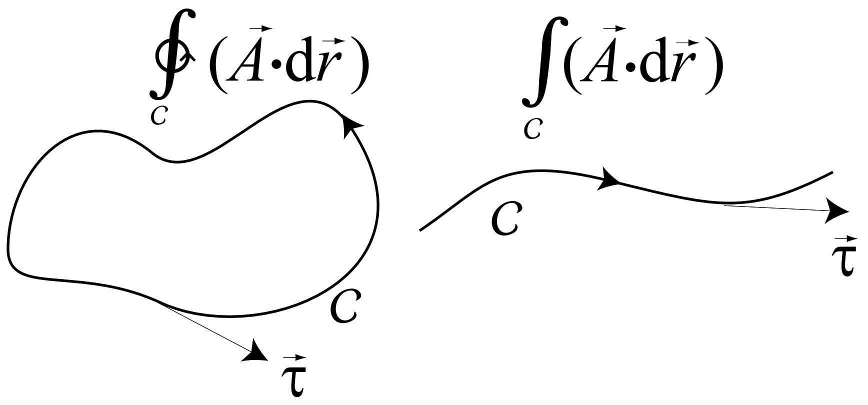

Рис. 3.5: Замкнутый контур (слева), незамкнутая кривая (справа) и соответствующие обозначения криволинейных интегралов 2-го типа. На кривых указаны направления обхода и касательные векторы в произвольно выбранной точке.

или

$$\begin{gathered}\int_{\mathcal{C}} \left(\vec{A}\cdot\vec{\tau}\right)\, d\ell = \\ = \int_{\tau}^{T} [P(x(t),y(t),z(t))\,x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))\,y'(t) + \\ + R(x(t),y(t),z(t))\,z'(t)]\; dt\,.\end{gathered} \tag{3.21}$$

Доказательство: Существование интеграла вытекает из непрерывности функции $\left(\vec{A}\cdot\vec{\tau}\right)$. Используя формулу (3.12) вычисления криволинейного интеграла 1-го типа, а также выражение для единичного касательного вектора (3.8), имеем

$$\int_{\mathcal{C}} \left(\vec{A}\cdot\vec{\tau}\right)\, d\ell = \int_{\tau}^{T} \left(\vec{A}\cdot\frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}\right) |\vec{r}\,'(t)|\, dt = \int_{\tau}^{T} \left(\vec{A}\cdot\vec{r}\,'\right)\, dt\,.$$

Пользуясь равенствами (3.6), (3.19) для векторов $\vec{r}\,'$, $\vec{A}$, и расписывая скалярное произведение в декартовой системе координат, придем к равенству (3.21). $\square$

Добавим еще, что поскольку

$$x'(t)\,dt = dx\,, \qquad y'(t)\,dt = dy\,, \qquad y'(t)\,dt = dy\,,$$

то для обозначения криволинейного интеграла 2-го типа часто используют запись:

$$
\begin{gathered}
\int\limits_C \left(\vec{A}\cdot\vec{\tau}\right)\, d\ell \equiv \\
\int\limits_C P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz\,.
\end{gathered} \tag{3.22}
$$

Другая форма записи криволинейного интеграла 2-го типа основана на том замечании, что

$$\vec{r}\,'\,dt = d\vec{r}\,.$$

Имея это ввиду, пишут

$$\int\limits_C \left(\vec{A}\cdot\vec{\tau}\right)\, d\ell \equiv \int\limits_C \left(\vec{A}\cdot d\vec{r}\right)\,. \tag{3.23}$$

Замечание: В приложениях векторного анализа выделенную роль играют криволинейные интегралы 2-го типа, взятые по *замкнутым кривым.* Их еще называют *контурами*, а соответствующие интегралы называют *контурными интегралами.* Иллюстрация контурных интегралов и их обозначений дана на рис. 3.5. △

3.7 Потенциальные векторные поля

В физических проблемах важную роль играют так называемые *потенциальные* векторные поля:

Определение 3.7 *Векторное поле $\vec{A}\,(\vec{r}\,)$ называют потенциальным, если найдется такая скалярная функция $U(\vec{r}\,)$, что во всей области определения векторного поля $\vec{A}(\vec{r}\,)$ выполняется равенство*

$$\vec{A} = \vec{i}\,\frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial U}{\partial z}\,. \tag{3.24}$$

Входящую сюда скалярную функцию $U(\vec{r}\,) = U(x,y,z)$ называют потенциалом векторного поля $\vec{A}\,(\vec{r}\,)$.

Если интегрируемое векторное поле $\vec{A}\,(\vec{r}\,)$ потенциально, то подынтегральное выражение в криволинейном интеграле 2-го типа представляет собой полный дифференциал:

$$P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = dU(x,y,z)\,. \tag{3.25}$$

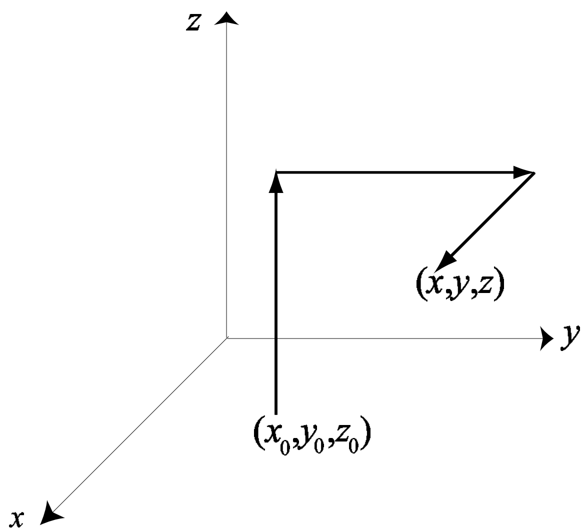

Рис. 3.6: Путь, сводящий нахождение потенциала к вычислению обычных определенных интегралов.

Вследствие этого интеграл не зависит от вида кривой $\mathcal{C}$, а только от положения ее начальной $A = (x_0, y_0, z_0)$ и конечной $B = (x_1, y_1, z_1)$ точек, и может быть вычислен по формуле:

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \left(\vec{A} \cdot d\vec{r}\right) = U(x_1, y_1, z_1) - U(x_0, y_0, z_0)\,. \tag{3.26}$$

Из-за сходства последнего равенства с формулой Ньютона-Лейбница теории определенных интегралов, потенциал $U(\vec{r}\,)$ иногда называют *первообразной* интегрируемого векторного поля $\vec{A}\,(\vec{r}\,)$.

Потенциал можно найти обычным интегрированием

$$U(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x,y,z)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y,z)\,dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0,y_0,z)\,dz + C\,.$$

Поясним геометрический смысл этой формулы. Ее правая часть представляет собой криволинейный интеграл по пути, соединяющем некоторую исходную точку (x_0, y_0, z_0) с произвольной точкой (x, y, z) нашего трехмерного пространства. Причем, для удобства интегрирования, путь составлен из трех прямых, параллельных осям координат: вначале мы идем вдоль оси z, по прямой $x = x_0$, $y = y_0$ (последний интеграл в правой части (8)). Затем движемся вдоль оси y, и наконец вдоль оси x. Поскольку потенциал определен с точностью до произвольной постоянной, в конце равенства помещена произвольная константа C.

Замечание: Часто оказывается полезным, известное из курса математического анализа, необходимое и достаточное условие потенциальности векторного поля:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}\,. \tag{3.27}$$

В дальнейшем мы выясним связь этих условий с основными понятиями векторного анализа. $\triangle$

3.8 Формула Грина

Имеются важные соотношения, связывающие контурные интегралы с интегралами по поверхностям. Простейшую, но вместе с тем ключевую, формулу такого рода называют *формулой Грина.* Она связывает криволинейные интегралы 2-го типа, взятые по плоским контурам, с двойными интегралами по области, ограниченной контуром. Для определенности будем считать, что контур $\mathcal{C}$ лежит в плоскости $\{x, y\}$ $(z \equiv 0)$, а G – область данной плоскости, ограниченная контуром $\mathcal{C}$. Кроме того нам понадобится определение *положительного обхода контура*:

Определение 3.8 *Обход контура считают положительным, а сам контур называют положительно ориентированным, если при движении в выбранном направлении ограничиваемая контуром область остается по левую руку от идущего.*

Вид формулы Грина и ее доказательство применительно к простым областям содержатся в следующей теореме:

Теорема 3.5
Пусть выполнены следующие условия:

1. G –простая область, ограниченная кусочно-гладкой границей $\mathcal{C}$, состоящей из одного или нескольких замкнутых контуров.

2. Функции $P(x,y) \in C^1(\overline{G})$, $Q(x,y) \in C^1(\overline{G})$ –непрерывно дифференцируемы в замкнутой области $\overline{G}$.

Тогда имеет место формула Грина

$$\oint\limits_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy\,, \tag{3.28}$$

где обход по контурам границы $\mathcal{C}$ берется такой, что область G остается слева (обход против часовой стрелки).

Доказательство: Рассмотрим вначале область

$$G_1 = \{y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\,, \quad a \leqslant x \leqslant b\}\,,$$

имеющую вид криволинейной трапеции (см. рис. 3.7 слева). Кроме того, граничный контур $\mathcal{C}_1 = ABCD$ области G_1 будем считать положительно ориентированным.

Заметим далее, что двойной интеграл, взятый по криволинейной трапеции, можно записать в виде повторного интеграла. Например

$$I_1 = \iint\limits_{G_1} \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy\,.$$

Поскольку первообразной внутреннего интеграла служит функция $P(x,y)$, то имеем

$$\iint\limits_{G_1} \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy = \int\limits_a^b P(x, y_2(x))\, dx - \int\limits_a^b P(x, y_1(x))\, dx\,.$$

В свою очередь, каждый из оставшихся определенных интегралов можно трактовать как криволинейный интеграл 2-го типа по верхней и нижней кускам криволинейной трапеции $\mathcal{C}_1$:

$$\int\limits_a^b P(x, y_2(x))\, dx = \int\limits_{\overset{\frown}{DC}} P(x,y)\, dx = -\int\limits_{\overset{\frown}{CD}} P(x,y)\, dx\,,$$

а также

$$-\int\limits_a^b P(x, y_1(x))\, dx = -\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P(x,y)\, dx\,.$$

Учитывая далее, что соответствующие криволинейные интегралы по вертикальным отрезкам BC и DA равны нулю:

$$\int\limits_{\overline{BC}} P(x,y)\, dx = \int\limits_{\overline{DA}} P(x,y)\, dx = 0\,,$$

обнаруживаем, что исследуемый двойной интеграл I_1 совпадает, с точностью до знака, с криволинейным интегралом по граничному контуру $\mathcal{C}_1$:

$$\oint\limits_{\mathcal{C}_1} P(x,y)\, dx = -\iint\limits_{G_1} \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy\,.$$

Рассмотрим еще одну область

$$G_2 = \{x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y)\,, \quad c \leqslant y \leqslant d\}\,,$$

представляющую собой криволинейную трапецию со сторонами, параллельными оси y (см. рис. 3.7 справа), и ограниченную положительно ориентированным контуром $\mathcal{C}_2 = ABCD$. Выкладки, аналогичные предыдущим, приводят к следующему равенству между двойным и криволинейным интегралами:

$$\oint\limits_{\mathcal{C}_2} Q(x,y)\,dy = \iint\limits_{G_1} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy\,.$$

Рассмотрим теперь произвольную простую область G. Ее можно разбить на конечное число n трапеций вида G_1:

$$G = \bigcup_{i}^{n} G_{1i}$$

с положительно ориентированными границами $\mathcal{C}_{1i}$ (см. рис. 3.8 слева), для каждой из которых выполняется равенство

$$\oint\limits_{\mathcal{C}_{1i}} P(x,y)\,dx = -\iint\limits_{G_{1i}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy\,, \qquad (*)$$

или на конечное число m трапеций вида G_2

$$G = \bigcup_{i}^{m} G_{2i}$$

(см. рис. 3.8 справа), для каждой из которых выполняется равенство

$$\oint\limits_{\mathcal{C}_{2i}} Q(x,y)\,dy = \iint\limits_{G_{2i}} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy\,. \qquad (**)$$

Сложим равенства $(*)$ для всех криволинейных трапеций G_{1i}, составляющих область G. При этом сумма правых частей даст двойной интеграл по всей области G:

$$\sum_{i=1}^{n} \oint\limits_{\mathcal{C}_{1i}} P(x,y)\,dx = -\iint\limits_{G} \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy\,,$$

Сумма же в левой части равна контурному интегралу по граничному контуру $\mathcal{C}$, поскольку интегралы по всем внутренним прямым, разбивающим простую область G на криволинейные трапеции, входят в сумму

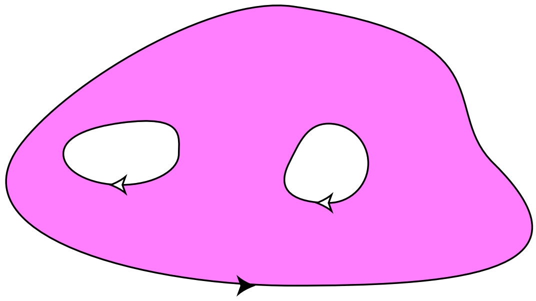

Рис. 3.7: Пример составного контура, состоящего из трех контуров. Указаны направления обхода контуров, при которых, согласно формуле Грина, сумма криволинейных интегралов $\oint Pdx + Qdy$ по всем контурам равна двойному интегралу по затененной на графике области.

два раза с разными знаками, и взаимно уничтожаются. Точно также взаимно компенсируются интегралы по внутренним прямым, при сложении равенств (∗∗). В итоге приходим к равенствам

$$\oint_{\mathcal{C}} P(x,y)\,dx = -\iint_{G} \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy\,, \quad \oint_{\mathcal{C}} Q(x,y)\,dy = -\iint_{G} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy\,. \tag{3.29}$$

Складывая эти равенства, приходим к формуле Грина (3.28). □

Замечание: Напомним, формула Грина (3.28) остается справедливой и когда область $\mathcal{S}$ ограничена не одним, а несколькими контурами. При этом в левой части равенства (3.28) оказывается несколько интегралов, по всем контурам, ограничивающим область $\mathcal{S}$, а направления обхода каждого контура определяют упомянутым правилом “левой руки” (см. рис. 3.9). △

Формула Грина бывает полезна при вычислении конкретных криволинейных интегралов по плоским контурам, поскольку, за счет дифференцирования, подынтегральное выражение в двойном интеграле часто оказывается достаточно простым. Однако этим не ограничивается значение формулы Грина. Позволяя лучше понять геометрический и физический смысл исследуемого криволинейного интеграла, она служит важным инструментом теоретической физики. К примеру, в механике широко используется тот факт, что интеграл

$$\oint_{\mathcal{L}} x\,dy$$

равен, согласно формуле Грина, площади области, ограниченной контуром $\mathcal{L}$.

Из формулы Грина сразу следует уже знакомый нам вывод, что если P и Q всюду подчиняются равенствам:

$$P(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}\,, \quad Q(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}\,,$$

где $U(x,y)$ –некоторая потенциальная функция, то криволинейный интеграл в левой части формулы Грина тождественно равен нулю.

В заключение укажем одно гидромеханическое применение формулы Грина. Пусть P и Q, соответственно, x и y компонента поля скорости плоского течения несжимаемой жидкости. В этом случае, как известно из гидромеханики, P и Q выражаются через *функцию тока* $\Psi(x,y)$:

$$P(x,y) = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}\,, \quad Q(x,y) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}\,,$$

а формула Грина принимает вид

$$\oint P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{\int} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right) dxdy\,.$$