Глава 14

Задания контрольной работы 1

Вариант 1

Задача 1
(4251) Вычислить криволинейный интеграл 2-го типа

$$I = \int\limits_{\mathcal{L}} (x^2 + y^2)\, dx + (x^2 - y^2)\, dy\,,$$

где $\mathcal{L}$ *–кривая, заданная уравнением* $y = 1 - |1 - x| \quad (0 \le x \le 2)\,.$

Задача 2
(4362) Не прибегая к формуле Гаусса-Остроградского, вычислить поверхностный интеграл 2-го типа:

$$I = \iint\limits_{\mathcal{S}} x\, dydz + y\, dzdx + z\, dxdy\,, \tag{$*$}$$

где $\mathcal{S}$ *–внешняя сторона сферы* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Задача 3
(4387) С помощью формулы Гаусса-Остроградского вычислить поверхностный интеграл

$$I = \iint\limits_{\mathcal{S}} x^2\, dydz + y^2\, dzdx + z^2\, dxdy\,,$$

где $\mathcal{S}$ *–внешняя сторона границы куба* $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a,\ 0 \le z \le a\,.$

Вариант 2

Задача 1

(4253) Вычислить криволинейный интеграл 2-го типа

$$I = \int\limits_{\mathcal{L}} (2a - y)\, dx + x\, dy\,,$$

где $\mathcal{L}$ *–арка циклоиды*

$$x = a(t - \sin t)\,, \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \le t \le 2\pi)\,.$$

Задача 2

Вычислить поверхностный интеграл 1-го типа:

$$I = \iint\limits_{\mathcal{S}} z^2\, dS\,,$$

где $\mathcal{S}$ *–поверхность, отсекаемая от верхней части конуса* $z^2 = k^2(x^2 + y^2)$ *цилиндром* $x^2 + y^2 - 2ax = 0$.

Задача 3

(4388) С помощью формулы Гаусса-Остроградского вычислить поверхностный интеграл

$$I = \iint\limits_{\mathcal{S}} x^3\, dydz + y^3\, dzdx + z^3\, dxdy\,,$$

где $\mathcal{S}$ *–внешняя сторона сферы* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Вариант 3

Задача 1

Вычислить двумя способами (непосредственно и с помощью формулы Грина) криволинейный интеграл 2-го типа:

$$I = \oint\limits_{\mathcal{L}} (xy + x + y)\,dx + (xy + x - y)\,dy\,,$$

где $\mathcal{L}$ *–эллипс*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Задача 2

Не прибегая к формуле Гаусса-Остроградского, вычислить поверхностный интеграл 2-го типа

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} yz\,dxdy + xz\,dydz + xy\,dzdx\,,$$

где $\mathcal{S}$ *–внешняя сторона замкнутой поверхности, расположенной в первом октанте и составленной из цилиндра* $x^2 + y^2 = R^2$*, а также координатных плоскостей* $x = 0$*,* $y = 0$*,* $z = 0$ *и плоскости* $z = H$*.*

Задача 3

Вычислить массу M *сферы, если поверхностная плотность в каждой ее точке равна квадрату расстояния этой точки до некоторой большой окружности сферы.*

Вариант 4

Задача 1

Вычислить двумя способами (непосредственно и с помощью формулы Грина) следующий криволинейный интеграл 2-го типа:

$$\oint_{\mathcal{L}} (e^{xy} + 2x\cos y)dx + (e^{xy} - x^2 \sin y)dy\,,$$

где $\mathcal{L}$ –квадрат $ABCDA$ с вершинами $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(0,1)$.

Задача 2

Не прибегая к формуле Гаусса-Остроградского, вычислить поверхностный интеграл 2-го типа

$$\iint_{\mathcal{S}} x\,dxdy + y\,dydz + z^2\,dzdx\,,$$

где $\mathcal{S}$ –внешняя сторона замкнутой поверхности, составленной из части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, расположенной в первом октанте, и координатных плоскостей $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Задача 3

Вычислить поверхностный интеграл 1-го типа

$$\iint_{\mathcal{S}} \frac{dS}{r^n}\,,$$

где $\mathcal{S}$ –сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, а r –расстояние от точки сферы до фиксированной точки P, отстоящей от центра сферы на расстояние ℓ $(\ell > R)$.