Глава 15

Контрольная работа 2

15.1 Предварительные замечания

В отличие от предыдущей контрольной, посвященной главным образом вычислению поверхностных и криволинейных интегралов, здесь в основном тестируется умение обращаться с дифференциальными операциями векторного анализа. Особое внимание уделяется технике обращения с вектором набла и способности ясно представлять геометрическую подоплеку совершаемых аналитических выкладок. Дополнительно в контрольную включены задачи на вычисление циркуляции и потока векторных полей, проверяющие умение вычислять криволинейные и поверхностные интегралы с применением формул Стокса и Остроградского-Гаусса.

15.2 Варианты контрольной работы

Вариант 1

Задача 1
Найти производную поля $u = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $M(x_0, y_0)$ по направлению, перпендикулярному к линии уровня поля u, проходящей через данную точку $M(x_0, y_0)$.

Решение 1 Линиями уровня поля $u = \ln(x^2 + y^2)$ являются концентрические окружности $x^2 + y^2 = c^2$. Направление, перпендикулярное к линии уровня в точке $M(x_0, y_0)$ задается, очевидно, вектором

$$\vec{\ell} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{i}\, x_0 + \vec{j}\, y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}\,.$$

Следовательно

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = (\mathrm{grad} u(M_0) \cdot \vec{\ell}\,) = \left(\vec{i}\,\frac{2x_0}{x_0^2 + y_0^2} + \vec{j}\,\frac{2y_0}{x_0^2 + y_0^2} \cdot \frac{\vec{i}\, x_0 + \vec{j}\, y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \right) = \frac{2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}\,.$$

Замечание 15.1 Ответ можно получить проще, вовремя заметив, что поле зависит лишь от расстояния до начала координат: $u = u(r)$. Поэтому производная по заданному направлению равна

$$\frac{du}{dr} = 2\frac{d\ln r}{dr} = \frac{2}{r}\,.$$

Задача 2
Показать, что напряженность $\vec{F}(M)$ поля сил тяготения в точке $M(x, y, z)$, создаваемого массой m, сосредоточенной в точке $O(0, 0, 0)$, является градиентом скалярного поля.

Решение 2 Из физики известно, что напряженность поля сил притяжения точечной массы обратно пропорциональна квадрату расстояния от точки наблюдения и направлена в сторону материальной точки. В рассматриваемом случае это означает, что векторное поле напряженности равно

$$\vec{F}(\vec{r}\,) = -m\frac{\vec{r}}{r^3}\,.$$

По определению, векторное поле, равное градиенту скалярного поля, есть потенциальное векторное поле. Таким образом от нас требуется доказать потенциальность поля напряженности точечной массы. Необходимым и достаточным условием потенциальности векторного поля в некоторой области пространства Ω является равенство нулю в Ω ротора поля. Вычислим ротор выписанного поля напряженности:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = -m\left[\vec{\nabla}\times\frac{\vec{r}}{r^3}\right] = \left[\vec{\nabla}\frac{1}{r^3}\times\vec{r}\right] + \frac{1}{r^3}\left[\vec{\nabla}\times\vec{r}\right] =$$
$$-\frac{3}{r^5}\left[\vec{r}\times\vec{r}\right] + \frac{1}{r^3}\left[\vec{\nabla}\times\vec{r}\right]\,,$$

причем $[\vec{r}\times\vec{r}] \equiv 0$ как векторное произведение параллельных векторов. Непосредственными выкладками нетрудно убедиться, что и $\left[\vec{\nabla}\times\vec{r}\right] \equiv 0$. Следовательно мы доказали, что всюду где ротор данного поля существует (при $r \neq 0$), он равен нулю.

Найдем потенциал векторного поля напряженности точечной массы в некоторой точке M. Для этого воспользуемся тем фактом, что криволинейный интеграл 2-го типа по произвольной гладкой кривой, соединяющей точки M_0 и M равен разности значений потенциала в данных точках:

$$-m\int\limits_{M_0}^{M}\frac{(\vec{r}\cdot d\vec{r})}{r^3} = U(M) - U(M_0)\,.$$

Заметив, что

$$(\vec{r}\cdot d\vec{r}) = \frac{1}{2}dr^2 = r dr\,,$$

сведем криволинейный интеграл к стандартному определенному интегралу

$$-m\int\limits_{M_0}^{M}\frac{(\vec{r}\cdot d\vec{r})}{r^3} = -m\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^2} = \frac{m}{r} - \frac{m}{r_0}\,.$$

Здесь r_0 –расстояние от начала координат до точки M_0, а r –расстояние до точки наблюдения M. Отсюда заключаем, что потенциал напряженности поля сил тяготения точечной массы, помещенной в начало координат, зависит лишь от расстояния до начала координат и равен:

$$U(r) = \frac{m}{r}\,.$$

Мы приняли для определенности, что потенциал в бесконечно удаленной точке равен нулю.

Задача 3
В установившемся потоке несжимаемой идеальной жидкости скорость каждой частицы направлена к началу координат и по величине равна $1/r^2$ ($\vec{r}$ - радиус-вектор частицы). Вычислить количество жидкости, вытекающий из области $\mathcal{V}$ за единицу времени.

Решение 3 Искомое количество жидкости, вытекающей из некоторой области за единицу времени, численно равно потоку поля скорости через замкнутую поверхность S, ограничивающую данную область. В свою очередь, согласно теореме Гаусса-Остроградского, поток равен объемному интегралу по области $\mathcal{V}$ от дивергенции поля скорости. Поэтому вычислим вначале его дивергенцию. Само поле скорости имеет вид $\vec{v} = -\vec{r}/r^3$. Его дивергенция во всех точках пространства, кроме начала координат, существует и равна

$$\operatorname{div}\vec{v} = \left(\vec{\nabla}\cdot -\frac{1}{r^3}\,\vec{r}\right) = \left(\vec{\nabla}\left(-\frac{1}{r^3}\right)\cdot\vec{r}\right) - \frac{1}{r^3}(\vec{\nabla}\cdot\vec{r}) = \left(\frac{3}{r^4}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{r}\right) - \frac{3}{r^3} = 0\,.$$

Если начало координат не лежит в области $\mathcal{V}$, то по формуле Гаусса-Остроградского поток равен

$$\iint\limits_{\mathcal{S}}(\vec{v}\cdot\vec{n})dS = \iiint\limits_{\mathcal{V}}\operatorname{div}\vec{v}\,dV = 0\,.$$

Если же начало координат содержится внутри $\mathcal{V}$, то формула Гаусса-Остроградского для вычисления потока непосредственно не применима. Положение спасает стандартный прием, состоящий в исключении из области $\mathcal{V}$ маленького шара, радиусом ε с центром в особой точке (в нашем случае –начале координат). При этом объемный интеграл снова окажется равным нулю, а искомый поток –равным потоку сквозь поверхность S_ε малого шара. Последний легко вычислить:

$$\iint\limits_{\mathcal{S}}(\vec{v}\cdot\vec{n})dS = \iint\limits_{\mathcal{S}_\varepsilon}\left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\right)dS = -\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{\mathcal{S}_\varepsilon}dS = -\frac{1}{\varepsilon^2}4\pi\varepsilon^2 = -4\pi\,.$$

Задача 4
Доказать, что $\Delta(uv) = u\Delta v + v\Delta u + 2(\vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}v)$.

Решение 4 Пользуясь свойствами вектора набла, имеем:

$$\begin{aligned}\Delta uv = \nabla^2\,uv = (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}uv) = (\vec{\nabla}\cdot u\vec{\nabla}v + v\vec{\nabla}u) =\\ = (\vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}v) + u\nabla^2 v + (\vec{\nabla}v\cdot\vec{\nabla}u) + v\nabla^2 u =\\ = u\Delta v + v\Delta u + 2(\vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}v)\,.\end{aligned}$$

В последней части равенства мы учли, что скалярное произведение вектора набла самого на себя

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) = \nabla^2 = \Delta$$

–равно оператору Лапласа.

Задача 5
Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{a} = -y^2\vec{i} + x^2\vec{j} + (x+y)\vec{k}$$

вдоль окружности $\mathcal{C}$, полученной пересечением цилиндра $x^2 + y^2 = x + y$ плоскостью $z = 1$.

Решение 5 Для нахождения искомой циркуляции воспользуемся формулой Стокса

$$\oint\limits_{\mathcal{C}} (\vec{A} \cdot \vec{\tau}) d\ell = \iint\limits_{x^2+y^2 \le x+y} (\mathrm{rot}\vec{A} \cdot \vec{n}) dxdy\,.$$

Здесь $\vec{\tau}$ –единичный вектор касательной к контуру, ориентированный вдоль выбранного направления обхода, а $\vec{n}$ –согласованная с обходом контура нормаль к плоской площадке, по которой ведется интегрирование в правой части равенства.

Вычислим вначале ротор исследуемого векторного поля:

$$rot\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x^2 & x+y \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} + 2(x+y)\vec{k}\,.$$

Далее, имея ввиду что $\vec{n} = \vec{k}$, получаем $(\mathrm{rot}\vec{A} \cdot \vec{n}\,) = 2(x+y)$. Подставив это выражение в двойной интеграл и воспользовавшись заменой переменных

$$x - \frac{1}{2} = r\cos\varphi\,, \quad y - \frac{1}{2} = r\sin\varphi\,,$$

найдем окончательно

$$\int\limits_{\mathcal{C}} (\vec{A} \cdot \vec{\tau}\,) d\ell = 2 \iint\limits_{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{2}} (x+y)\, dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} [r(\cos\varphi + \sin\varphi) + 1] rdr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} rdr = \frac{\pi}{2}\,.$$

Вариант 2

Задача 1
Найти векторные линии поля $\vec{A} = \vec{i}\,x + \vec{j}\,y - \vec{k}\,z$.

Решение 1 Векторная линия векторного поля $\vec{A}(M)$, заданная уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$, по определению удовлетворяет условию коллинеарности $d\vec{r} \parallel \vec{A}$. На координатном языке это означает, что справедливы равенства:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = -\frac{dz}{z}\,.$$

Решая данную систему дифференциальных уравнений, получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dz}{z} = -\dfrac{dx}{x}\,, \\ \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x}\,, \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ln|z| = -\ln|x| + \ln|c_1|\,, \\ \ln|y| = \ln|x| + \ln|c_2|\,, \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = \dfrac{c_1}{x}\,, \\ y = c_2 x\,. \end{array} \right.$$

Мы составим более наглядное представление о форме векторных линий, если перейдем в цилиндрическую систему координат $\{\rho,\, \varphi,\, z\}$. В итоге получим:

$$\varphi = \text{const}\,, \quad z\rho = C\,.$$

Иными словами, векторные линии представляют собой гиперболы $z\rho = C$, лежащие в плоскостях, проходящих через ось z.

Замечание 15.1 Те, кто предпочитает оставаться в рамках декартовой системы координат, могут составить себе представление о множестве векторных линий, заполнив плоскость $x = 0$ всевозможными гиперболами $yz = c$, а затем вращая ее вокруг оси z.

Задача 2
Показать, что центральное векторное поле

$$\vec{A} = \frac{f(r)}{r}\vec{r}$$

является потенциальным и найти его потенциал.

Решение 2 Необходимым и достаточным условием потенциальности векторного поля в некоторой области пространства является равенство нулю ротора этого поля в данной области. Поэтому вычислим вначале ротор приведенного в условии задачи поля:

$$\text{rot}\vec{A} = \left[\vec{\nabla} \times \frac{f(r)}{r}\,\vec{r}\right] =$$

$$\left[\vec{\nabla}\frac{f(r)}{r} \times \vec{r}\right] + \frac{f(r)}{r}\left[\vec{\nabla} \times \vec{r}\right] = \frac{f'(r) - f(r)}{r^3}\left[\vec{r} \times \vec{r}\right] + 0 = 0\,.$$

Таким образом, поле всюду потенциально. Найдем его потенциал. Для этого воспользуемся тем фактом, что криволинейный интеграл 2-го типа от потенциального поля вдоль кривой, соединяющей произвольные точки M_0 и M_1, не зависит от формы кривой и равен разности значений потенциала в этих точках:

$$\int\limits_{M_0}^{M_1} \frac{f(r)}{r}(\vec{r} \cdot d\vec{r}\,) = U(M_1) - U(M_0)\,.$$

Из геометрического смысла скалярного произведения следует, что $(\vec{r}\cdot d\vec{r}) = r\,dr$, где r –расстояние текущей точки кривой до начала координат. Следовательно, криволинейный интеграл сводится к определенному интегралу:

$$U(M_1) - U(M_0) = \int_{r_0}^{r_1} f(r)\,dr\,.$$

Здесь r_0 и r_1 –расстояния до начала координат исходной и конечной точек кривой, по которой ведется интегрирование. Поскольку потенциал определен с точностью до произвольной постоянной, то окончательное выражение для потенциала имеет вид:

$$U(M) = U(r) = \int_{r_0}^{r} f(r')\,dr' + C\,,$$

где C –произвольная постоянная.

Задача 3
Привлекая формулу Стокса, вычислить поток ротора поля

$$\vec{A} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$$

через часть поверхности $z^2 = 4(1 - x^2 - y^2)^4$, *“накрывающей"начало координат плоскости* xOy.

Решение 3 Уясним вначале геометрическую суть задачи. Для этого заметим, что указанная поверхность образована вращением вокруг оси z плоских кривых $z = \pm 2(1 - x^2)^2$. Очевидно, в задаче речь идет о верхней части этой поверхности, расположенной выше плоскости xOy. Последняя касается плоскости xOy в точках окружности $\mathcal{C}\,:\, x^2 + y^2 = 1$. Нас интересует “накрывающий"начало координат кусок поверхности $\mathcal{S}$, проектирующийся внутрь данной окружности.

Для вычисления потока ротора поля сквозь заданную поверхность $\mathcal{S}$ привлечем формулу Стокса, сводящую отыскание потока к нахождению циркуляции исходного поля вдоль окружности $\mathcal{C}$, ограничивающей поверхность $\mathcal{S}$:

$$\Pi = \iint\limits_{\mathcal{S}} (\mathrm{rot}\vec{A}\cdot\vec{n})dS = \oint\limits_{\mathcal{C}} (\vec{A}\cdot d\vec{r}) = \oint\limits_{x^2+y^2=1} ydx + zdy + xdz = \oint\limits_{x^2+y^2=1} y\,dx\,.$$

В данном случае формула Стокса значительно упрощает вычисления из-за очень простой формы контура в основании поверхности $\mathcal{S}$ –окружности $x^2 + y^2 = 1$. Сведем криволинейный интеграл к обычному определенному интегралу, задав уравнение окружности в параметрической форме:

$$x = \cos\varphi\,, \quad y = \sin\varphi\,.$$

В итоге получим:

$$\Pi = \int\limits_0^{2\pi} \sin\varphi(-\sin\varphi)d\varphi = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos 2\varphi)d\varphi = -\pi\,.$$

Замечание 15.1 Последние выкладки были бы излишними, если бы мы вспомнили, что интеграл

$$\oint_{\mathcal{L}} y dx$$

по любому лежащему в плоскости xOy контуру $\mathcal{L}$ равен площади ограниченной контуром области. Заметим также, что поток не зависит от формы поверхности: какую бы поверхность мы не натянули на круг $x^2 + y^2 = 1$ в плоскости $z = 0$, поток через нее заданного векторного поля $\vec{A}$ всегда равен $-\pi$.

Задача 4
Доказать, что

$$[\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}.$$

Во что трансформируется данное соотношение в случае если поле $\vec{A}$ – соленоидальное, потенциальное?

Решение 4 Из правил обращения с вектором набла мы знаем, что подобные выражения можно преобразовывать по законам векторной алгебры, записывая полученные соотношения так, чтобы дифференциальный оператор –вектор набла –оказался непосредственно слева от векторного поля $\vec{A}$, на которое он действует. Форма правой части доказываемого равенства подсказывает, что двойное векторное произведение слева имеет смысл преобразовать по формуле *bac* минус *cab*:

$$[\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Подставив сюда $\vec{a} = \vec{b} = \vec{\nabla}$, $\vec{c} = \vec{A}$, будем иметь:

$$[\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}).$$

Первое слагаемое справа здесь имеет вполне пристойный вид и равно градиенту дивергенции векторного поля $\vec{A}$. Зато во втором слагаемом дифференциальный оператор второго порядка "завис", поскольку поле, на которое он призван действовать, оказалось слева. Чтобы исправить положение, перепишем формулу *bac* минус *cab* в другой, эквивалентной с точки зрения векторной алгебры, форме:

$$[\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}.$$

В итоге приходим к доказываемому соотношению

$$[\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}.$$

В случае соленоидального поля $\mathrm{div}\vec{A} \equiv 0$ и данное соотношение принимает вид:

$$[\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}]] = -\Delta \vec{A}.$$

Если же поле $\vec{A}$ потенциально, то $[\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}]] \equiv 0$.

Задача 5
Найти поток векторного поля

$$\vec{A} = x^2 y\,\vec{i} - xy^2 \vec{j} + z(x^2 + y^2)\vec{k}$$

из области $\mathcal{V}$, ограниченной поверхностями $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$.

Решение 5 Заметим прежде всего, что интегрируемая поверхность представляет собой параболоид вращения, накрытый “крышкой” –кругом в плоскости $z = 2$.

При решении этой задачи естественно попытаться применить формулу Гаусса-Остроградского. Поэтому вычислим наперед дивергенцию указанного в условии задачи поля:

$$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{\partial x^2 y}{\partial x} + \frac{\partial(-xy^2)}{\partial y} + \frac{\partial z(x^2+y^2)}{\partial z} = x^2 + y^2 \,.$$

Согласно формуле Гаусса-Остроградского

$$\Pi = \iint\limits_{\mathcal{S}} (\vec{A} \cdot \vec{n}\,) dS = \iiint\limits_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\vec{A}\, dV = \iiint\limits_{\mathcal{V}} (x^2+y^2) dxdydz \,.$$

Круговая симметрия интегрируемой области по сути вынуждает нас перейти в объемном интеграле к цилиндрическим координатам

$$x = \rho\cos\varphi\,, \quad y = \rho\sin\varphi\,, \quad z = z\,,$$

Вспомнив еще, что якобиан перехода равен ρ, сведем объемный интеграл к повторным

$$\Pi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^3 d\rho \int\limits_{r^2/2}^{2} dz = 2\pi \int\limits_0^2 \left(2r^3 - \frac{r^5}{2}\right) dr =$$

$$= 2\pi \left(\frac{r^4}{2} - \frac{r^6}{12}\right)\Bigg|_0^2 = \pi\left(2^4 - \frac{2^5}{3}\right) = \frac{16}{3}\pi \,.$$

Вариант 3

Задача 1

Найти производную плоского скалярного поля $U = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ в точке $A(3,1)$ по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, где точка B имеет координаты $(6,5)$.

Решение 1 Напомним, производная по направлению равна

$$\frac{\partial U}{\partial \ell} = (\vec{\ell} \cdot \mathrm{grad} U)\,,$$

где $\vec{\ell}$ –единичный вектор в выбранном направлении. Поэтому найдем прежде всего градиент заданного поля $U = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$. Он равен

$$\mathrm{grad} u = \vec{i}\,(3x^2 - 6xy + 3y^2) + \vec{j}\,(-3x^2 + 6xy)\,.$$

Соответственно, градиент в указанной точке A равен $\mathrm{grad}U(A) = 12\vec{i} - 9\vec{j}$. Построим теперь единичный вектор, направленный от точки A к точке B:

$$\overrightarrow{AB} = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{\ell} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{3}{5}\,\vec{i} + \frac{4}{5}\,\vec{j}\,.$$

А значит
$$\frac{\partial U}{\partial \ell} = (\vec{l} \cdot \mathrm{grad} U) = 12\frac{3}{5} - 9\frac{4}{5} = 0\,.$$
Другими словами, указанное направление касательно к линии уровня поля U, проходящей через точку A.

Задача 2
Найти векторные линии поля
$$\vec{A} = \vec{i}\,x + \vec{j}\,y + \vec{k}\,z\,.$$

Решение 2 По определению, векторная линия векторного поля $\vec{A}(M)$, заданная уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$, подчиняется следующему условию коллинеарности $\vec{A} \| d\vec{r}$. Запишем его в координатной форме:
$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}\,.$$
Выбрав в качестве параметра координату x, перепишем уравнения в виде:
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x}\,, \\ \dfrac{dz}{z} = \dfrac{dx}{x}\,, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln|y| = \ln|x| + \ln|c_1|\,, \\ \ln|z| = \ln|x| + \ln|c_2|\,, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = c_1 x\,, \\ z = c_2 x\,. \end{cases}$$

Замечание 15.1 Мы могли бы сразу догадаться, что векторными линиями являются всевозможные лучи, испущенные из начала координат, поскольку векторное поле равно радиус-вектору $\vec{A} = \vec{r}$.

Задача 3
Пусть в начале координат расположена материальная точка массы m. Найти поток ее вектора поля тяготения через поверхность вертикального цилиндра радиуса R и высоты $2h$, симметрично расположенного относительно плоскости xOy и оси z, в направлении внутренней нормали к цилиндру.

Решение 3 Как известно, гравитационное поле тяготения точечной массы равно
$$\vec{F} = -\frac{m}{r^3}\,\vec{r}.$$
Его поток внутрь поверхности $\mathcal{S}$ указанного цилиндра вычисляется по формуле
$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \left(\frac{m}{r^3}\vec{r} \cdot \vec{n}\right) dS\,,$$
где $\vec{n}$ - внешняя нормаль к боковой поверхности цилиндра.

Введем цилиндрическую параметризацию поверхности
$$x = R\cos\varphi\,, \quad y = R\sin\varphi\,, \quad z = z\,.$$
При этом векторное уравнение поверхности принимает вид
$$\vec{r} = \vec{i}\,R\cos\varphi + \vec{j}\,R\sin\varphi + \vec{k}\,z, \quad r = \sqrt{R^2 + z^2}\,,$$

а поверхностный интеграл сводится к двойному

$$\Pi = m \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-h}^{h} \frac{(\vec{r}, \vec{r}_\varphi, \vec{r}_z)}{(R^2 + z^2)^{3/2}} d\varphi\, dz\,.$$

Сосчитаем входящее в интеграл смешанное произведение

$$(\vec{r}, \vec{r}_\varphi, \vec{r}_z) = \begin{vmatrix} R\cos\varphi & R\sin\varphi & z \\ -R\sin\varphi & R\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = R^2\,.$$

В итоге интеграл преобразуется к виду

$$\Pi = mR^2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int_{-h}^{h} \frac{dz}{(R^2+z^2)^{3/2}} = 4\pi m R^2 \int\limits_0^{h} \frac{dz}{(R^2+z^2)^{3/2}}\,.$$

Для вычисления последнего интеграла сделаем замену переменной интегрирования, $z = R^2 \mathrm{tg}\,\varphi$, сводящую искомый интеграл к табличному:

$$\int \frac{dz}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \int \frac{\cos^3\varphi}{R^3} \cdot \frac{R}{\cos^2\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{R^2}\sin\varphi = \frac{1}{R^2}\frac{\mathrm{tg}\varphi}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}} = \frac{z}{R^2\sqrt{R^2+z^2}}\,.$$

Отсюда имеем окончательно

$$\Pi = 4\pi m R^2 \frac{z}{R^2\sqrt{R^2+z^2}}\Bigg|_0^h = \frac{4\pi m h}{\sqrt{R^2+h^2}}\,.$$

Замечание 15.1 Решение любой задачи нельзя считать завершенным, пока не обсуждены всевозможные следствия выведенных соотношений. Сказанное справедливо и по отношению к только что найденному ответу. Посмотрим, прежде всего, что будет, если устремить h к бесконечности. Легко сообразить, что при этом $\Pi \to 4\pi m$. Вид данного предельного равенства вызывает ассоциации с чем-то уже знакомым. Порывшись в памяти, мы обнаруживаем, что поток численно равен массе m, умноженной на полный телесный угол 4π, под которым из начала координат "виден"бесконечно длинный цилиндр. И тут нас осеняет — поток исследуемого поля тяготения внутрь любой незамкнутой поверхности должен быть равен $m\Omega$, где Ω –телесный угол, под которым поверхность видна из начала координат. Проверить высказанное предположение с нашим опытом вычисления поверхностных интегралов не составляет труда. В итоге ответ задачи, как и возможные его обобщения, приобретает наглядный геометрический смысл.

Задача 4

Доказать, что векторное поле $\vec{A} = U\,\mathrm{grad}\,V$ всюду ортогонально векторному полю $\mathrm{rot}\,\vec{A}$.

Решение 4 Выясним вначале структуру последнего векторного поля. Для этого запишем его на языке вектора набла:

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \left[\vec{\nabla} \times U\,\vec{\nabla}V\right] = \left[\vec{\nabla}U \times \vec{\nabla}V\right] + \left[\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\right]V\,.$$

Последнее слагаемое здесь содержит дифференциальный оператор $[\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}]$, действие которого на любое дважды непрерывно-дифференцируемое поле, как нетрудно показать непосредственной проверкой в декартовой системе координат, дает тождественный нуль. Первое же слагаемое в правой части, в силу свойств векторного произведения, ортогонально вектору $\vec{\nabla}V = \operatorname{grad}V$, параллельному вектору $\vec{A}$.

Задача 5
Применяя формулу Стокса, найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{A} = -\vec{i}\,y^3 + \vec{j}\,x^3 + \vec{k}\,(x^2 + y^2)$$

вдоль параллелограмма $\mathcal{L}$ в плоскости $z = 0$ со сторонами $y = x$, $y = x + a$, $x = a$, $x = 3a$.

Решение 5 Прибегнем, для нахождения циркуляции, к помощи формулы Стокса. Поэтому прежде всего вычислим ротор заданного векторного поля

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y^3 & x^3 & x^2 + y^2 \end{vmatrix} = 2y\,\vec{i} - 2x\,\vec{j} + 3(x^2 + y^2)\,\vec{k}\,.$$

Подставив его в формулу Стокса, получим:

$$\Gamma = \oint\limits_{\mathcal{L}} (\vec{A} \cdot d\vec{r}) = 3 \iint\limits_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2)\,dxdy\,.$$

Интегрирование ведется по внутренности $\mathcal{D}$ указанного в условии задачи параллелограмма. Кроме того здесь учтено, что вектор нормали к области $\mathcal{D}$ совпадает с ортом $\vec{k}$ оси z. Сведя двойной интеграл к повторному, получим окончательно:

$$\Gamma = 3 \int\limits_a^{3a} dx \int\limits_x^{x+a} (x^2 + y^2)dy =$$

$$= 3 \int\limits_a^{3a} \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_x^{x+a} dx = 3 \int\limits_a^{3a} \left(ax^2 + \frac{(x+a)^3}{3} - \frac{x^3}{3}\right) dx =$$

$$= 3\left(\frac{ax^3}{3} + \frac{(x+a)^4}{12} - \frac{x^4}{12}\right)\Bigg|_0^{3a} = 18a^4\,.$$

Вариант 4

Задача 1

Температурное поле задано функцией $T = x^2y - y^2z + 1$. В каком направлении больше всего происходит возрастание температуры T в точке $M(1,1,1)$? (Указать направляющие косинусы единичного вектора, ориентированного в сторону наибыстрейшего изменения температурного поля.)

Решение 1 Из свойств градиента скалярной функции мы знаем, что он направлен в сторону наибольшего возрастания функции. Поэтому вычислим градиент указанного в условии задачи температурного поля

$$\operatorname{grad} T = \vec{i}\, 2xy + \vec{j}\,(x^2 - 2yz) + \vec{k}\, y^2 \,.$$

В частности, в заданной точке градиент равен:

$$\operatorname{grad} T(M) = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\,.$$

Вычислив его модуль $|\operatorname{grad} T| = \sqrt{6}$, найдем направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}\,, \quad \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{6}}\,, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}\,.$$

Задача 2

Найти векторные линии поля

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3}$$

точечного заряда q, где r –расстояние от точки наблюдения до заряда.

Решение 2 Согласно геометрическому смыслу векторных линий, поле $\vec{E}$ направлено по касательной к любой точке векторной линии. Поэтому векторная функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$, задающая векторную линию, должна подчиняться уравнению

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \kappa\,\vec{E}\,.$$

Входящий сюда коэффициент $\kappa \neq 0$ вообще говоря зависит от $\vec{r}$ и может быть выбран из соображений удобства. Например так, что в нашем случае уравнение для векторной линии примет вид:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}\,.$$

Его решение

$$\vec{r} = \vec{r}_0\, e^t$$

имеет наглядный геометрический смысл: Это уравнение луча, исходящего из начала координат и проходящего через любую наперед заданную точку с радиус-вектором $\vec{r}_0$.

Задача 3

Пользуясь формулой Стокса, найти циркуляцию поля скоростей точек твердого тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси Oz, вдоль произвольной замкнутой кривой $\mathcal{L}$, расположенной в плоскости, перпендикулярной оси вращения.

Решение 3 Мы уже не раз убеждались, что обобщение постановки исходной проблемы часто делает ее решение проще и нагляднее. Поэтому, хотя в условии задана конкретная ось вращения (ось z), попробуем решить более общую задачу, полагая, что тело вращается вокруг произвольно ориентированной оси, проходящей через начало координат. При этом поле скоростей твердого тела может быть записано в виде:

$$\vec{v}(\vec{r}\,) = [\vec{\omega} \times \vec{r}\,]\,,$$

где $\vec{\omega}$ –вектор угловой скорости вращения. Пусть также $\mathcal{L}$ –не обязательно плоский произвольный контур. Согласно формуле Стокса, циркуляция векторного поля $\vec{v}(\vec{r}\,)$ вдоль контура $\mathcal{L}$

$$\Gamma = \oint\limits_{\mathcal{L}} (\vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{\tau}\,)\, d\ell = \iint\limits_{\mathcal{S}} (\vec{n} \cdot \mathrm{rot}\vec{v}\,)\, dS$$

–равна поверхностному интегралу 2-го типа по поверхности $\mathcal{S}$, натянутой на контур $\mathcal{L}$. Здесь, как обычно, $\vec{\tau}$ –касательный к контуру $\mathcal{L}$ вектор, указывающий направление обхода контура, а $\vec{n}$ –единичная нормаль к согласованной с обходом контура стороне поверхности $\mathcal{S}$.

Вычислим входящий в поверхностный интеграл ротор поля скорости, оперируя вектором набла:

$$\mathrm{rot}\vec{v} = \left[\vec{\nabla} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}\,]\right]\,.$$

Распишем возникшее двойное векторное произведение с помощью формулы bac минус cab:

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = \left[\vec{\nabla} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}\,]\right] = \vec{\omega}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{r}\right) - \vec{r}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega}\right)\,.$$

Заметим, что в 1-м слагаемом правой части равенства вектор набла попал “точно в лузу встав слева от вектора $\vec{r}$, на который он должен действовать. Зато во втором слагаемом он “проскочил вперед оказавшись правее радиус-вектора. Положение однако легко поправить, вспомнив правила векторной алгебры. А именно, воспользовавшись коммутативностью операций скалярного произведения и умножения вектор на скаляр, будем иметь:

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = \left[\vec{\nabla} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}\,]\right] = \vec{\omega}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{r}\right) - \left(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{r}.$$

Элементарные расчеты в декартовой системе координат дают

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{r}\right) = 3\,, \quad \left(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{r} = \vec{\omega}\,.$$

Следовательно,

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = \left[\vec{\nabla} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}\,]\right] = 2\vec{\omega}\,,$$

а искомая циркуляция равна

$$\Gamma = 2\iint\limits_{\mathcal{S}} (\vec{n} \cdot \vec{\omega})\, dS\,.$$

Обсудим полученное выражение. Предположим для определенности, что поверхность $\mathcal{S}$ взаимнооднозначно проектируется на плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{\omega}$. Тогда последний интеграл приобретает прозрачный геометрический смысл: Он равен, помноженной на величину угловой скорости ω, площади проекции поверхности $\mathcal{S}$ на плоскость, перпендикулярную вектору угловой скорости. Причем эта площадь берется со знаком плюс, если угол между вектором нормали к поверхности $\mathcal{S}$ острый, и со знаком минус — если тупой. Обозначим площадь упомянутой проекции поверхности $\mathcal{S}$ за D. Тогда окончательное выражение для циркуляции оказывается равным:

$$\Gamma = \pm \omega D \,,$$

где знак зависит от направления обхода контура $\mathcal{L}$. Применительно к конкретной исходной постановке задачи D –площадь плоской области, ограниченной контуром $\mathcal{L}$.

Замечание 15.1 Чтобы не перегружать наше пространственное воображение, мы предположили выше, что поверхность $\mathcal{S}$ однозначно проектируется на перпендикулярную вектору $\vec{\omega}$ плоскость. Однако, поразмыслив еще немного, нетрудно сообразить, что это требование совершенно излишне.

Задача 4
Пусть U и V –дважды непрерывно-дифференцируемые скалярные поля. Доказать, что векторное поле $[\vec{\nabla} U \times \vec{\nabla} V]$ соленоидально.

Решение 4 Необходимым и достаточным условием соленоидальности векторного поля является равенство нулю его дивергенции. Поэтому выпишем дивергенцию заданного в условии задачи поля, пользуясь языком вектора набла:

$$\operatorname{div}[\vec{\nabla} U \times \vec{\nabla} V] = \left(\vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla} U \times \vec{\nabla} V]\right) \,.$$

На минуту будем считать последнее векторное поле $\vec{\nabla} V$ постоянным и воспользуемся тем, что циклическая перестановка сомножителей не меняет значения смешанного произведения. Иными словами справедливо равенство:

$$\left(\vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla} U \times \vec{\nabla} V]\right) = \left(\vec{\nabla} V \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}]\right) U \,.$$

Векторное произведение векторов набла, как нетрудно показать непосредственной проверкой, порождает тождественно нулевой вектор при действии на любое дважды непрерывно-дифференцируемое векторное поле. Поэтому правая часть последнего равенства тождественно равна нулю. Аналогично доказывается, что в искомом выражении для дивергенции поля $[\vec{\nabla} U \times \vec{\nabla} V]$ тождественно равно нулю и второе слагаемое, возникающее в предположении, что $\vec{\nabla} V$ –переменное, а $\vec{\nabla} U$ –постоянное поле.

Задача 5
Найти поток Π векторного поля

$$\vec{A} = \vec{i}\, x^2 y z + \vec{j}\, x y^2 z - \vec{k}\, x y z^2$$

из области $\mathcal{V}$, лежащей в 1-м октанте и ограниченной сверху поверхностью $z = xy$, а с боков плоскостями $x = 1$ и $y = 1$.

Решение 5 Применив формулу Остроградского-Гаусса, сведем вычисление потока к следующему тройному интегралу:

$$\Pi = 2 \int_0^1 x dx \int_0^1 y dy \int_0^{xy} z dz = \left(\int_0^1 x^3 dx \right)^2 = \frac{1}{16} .$$