Глава 15

Задания контрольной работы 2

Вариант 1

Задача 1
Найти производную поля $u = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $M(x_0, y_0)$ по направлению, перпендикулярному к линии уровня поля u, проходящей через данную точку $M(x_0, y_0)$.

Задача 2
Показать, что напряженность $\vec{F}(M)$ поля сил тяготения в точке $M(x, y, z)$, создаваемого массой m, сосредоточенной в точке $O(0, 0, 0)$, является градиентом скалярного поля.

Задача 3
В установившемся потоке несжимаемой идеальной жидкости скорость каждой частицы направлена к началу координат и по величине равна $1/r^2$ ($\vec{r}$ - радиус-вектор частицы). Вычислить количество жидкости, вытекающий из области $\mathcal{V}$ за единицу времени.

Задача 4
Доказать, что $\Delta(uv) = u\Delta v + v\Delta u + 2(\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v)$.

Задача 5
Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{a} = -y^2\vec{i} + x^2\vec{j} + (x + y)\vec{k}$$

вдоль окружности $\mathcal{C}$, полученной пересечением цилиндра $x^2 + y^2 = x + y$ плоскостью $z = 1$.

Вариант 2

Задача 1

Найти векторные линии поля $\vec{A} = \vec{i}\,x + \vec{j}\,y - \vec{k}\,z$.

Задача 2

Показать, что центральное векторное поле

$$\vec{A} = \frac{f(r)}{r}\vec{r}$$

является потенциальным и найти его потенциал.

Задача 3

Привлекая формулу Стокса, вычислить поток ротора поля

$$\vec{A} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$$

через часть поверхности $z^2 = 4(1 - x^2 - y^2)^4$, *"накрывающей"начало координат плоскости* xOy.

Задача 4

Доказать, что

$$[\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\,) - \nabla^2 \vec{A}\,.$$

Во что трансформируется данное соотношение в случае если поле $\vec{A}$ *– соленоидальное, потенциальное?*

Задача 5

Найти поток векторного поля

$$\vec{A} = x^2 y\,\vec{i} - xy^2 \vec{j} + z(x^2 + y^2)\vec{k}$$

из области $\mathcal{V}$, *ограниченной поверхностями* $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$.

Вариант 3

Задача 1
Найти производную плоского скалярного поля $U = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ *в точке* $A(3, 1)$ *по направлению вектора* $\overrightarrow{AB}$, *где точка* B *имеет координаты* $(6, 5)$.

Задача 2
Найти векторные линии поля

$$\vec{A} = \vec{i}\,x + \vec{j}\,y + \vec{k}\,z\,.$$

Задача 3
Пусть в начале координат расположена материальная точка массы m. *Найти поток ее вектора поля тяготения через поверхность вертикального цилиндра радиуса* R *и высоты* $2h$, *симметрично расположенного относительно плоскости* xOy *и оси* z, *в направлении внутренней нормали к цилиндру.*

Задача 4
Доказать, что векторное поле $\vec{A} = U \operatorname{grad} V$ *всюду ортогонально векторному полю* $\operatorname{rot} \vec{A}$.

Задача 5
Применяя формулу Стокса, найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{A} = -\vec{i}\,y^3 + \vec{j}\,x^3 + \vec{k}\,(x^2 + y^2)$$

вдоль параллелограмма $\mathcal{L}$ *в плоскости* $z = 0$ *со сторонами* $y = x$, $y = x + a$, $x = a$, $x = 3a$.

Вариант 4

Задача 1

Температурное поле задано функцией $T = x^2y - y^2z + 1$. *В каком направлении больше всего происходит возрастание температуры* T *в точке* $M(1, 1, 1)$*? (Указать направляющие косинусы единичного вектора, ориентированного в сторону наибыстрейшего изменения температурного поля.)*

Задача 2

Найти векторные линии поля

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3}$$

точечного заряда q, *где* r *–расстояние от точки наблюдения до заряда.*

Задача 3

Пользуясь формулой Стокса, найти циркуляцию поля скоростей точек твердого тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω *вокруг оси* Oz, *вдоль произвольной замкнутой кривой* $\mathcal{L}$, *расположенной в плоскости, перпендикулярной оси вращения.*

Задача 4

Пусть U *и* V *–дважды непрерывно-дифференцируемые скалярные поля. Доказать, что векторное поле* $[\vec{\nabla}U \times \vec{\nabla}V]$ *соленоидально.*

Задача 5

Найти поток Π *векторного поля*

$$\vec{A} = \vec{i}\,x^2yz + \vec{j}\,xy^2z - \vec{k}\,xyz^2$$

из области $\mathcal{V}$, *лежащей в 1-м октанте и ограниченной сверху поверхностью* $z = xy$, *а с боков плоскостями* $x = 1$ *и* $y = 1$.