Глава 1

Криволинейные интегралы 1-го типа

1.1 Необходимые сведения из теории

Криволинейные интегралы 1-го типа возникают во многих прикладных задачах. Например, при нахождении масс материальных кривых с известной линейной плотностью, полных электрических зарядов, распределенных вдоль заряженных нитей. Схема их вычисления та же, что и стандартного определенного интеграла. Поясним ее на примере нахождения массы гладкой материальной кривой $\mathcal{L}$.

Пусть кривая $\mathcal{L}$ задана параметрическим уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}\,(t)\,, \quad (\tau \le t \le T)\,, \tag{1.1}$$

отображающим каждую точку числового отрезка $t \in [\tau,\, T]$ в точку пространства с радиус-вектором $\vec{r}\,(t)$, заданным в некоторой системе координат. Чаще всего пользуются декартовой системой координат, где радиус-вектор задается в виде:

$$\vec{r}\,(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}\,. \tag{1.2}$$

Здесь $\{\vec{i},\, \vec{j},\, \vec{k}\}$ –тройка базисных векторов данной декартовой системы координат, а $\{x(t),\, y(t),\, z(t)\}$ –координаты радиус-вектора. Будем в дальнейшем считать кривую $\mathcal{L}$, по которой ведется интегрирование, *гладкой.* Для этого достаточно, чтобы во всех точках сегмента $[\tau,\, T]$ существовала непрерывная производная векторной функции $\vec{r}\,(t)$ по аргументу t. Операцию дифференцирования обозначим для краткости штрихом. Другими словами, по определению,

$$\vec{r}\,'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}\,.$$

Очевидно, эта производная указывает направление касательной к кривой в данной точке. Пусть вдоль кривой $\mathcal{L}$ распределено вещество с линейной (то есть равной массе, приходящейся на единицу длины) плотностью $\mu(\vec{r})$. Для определенности будем полагать плотность непрерывной функцией во

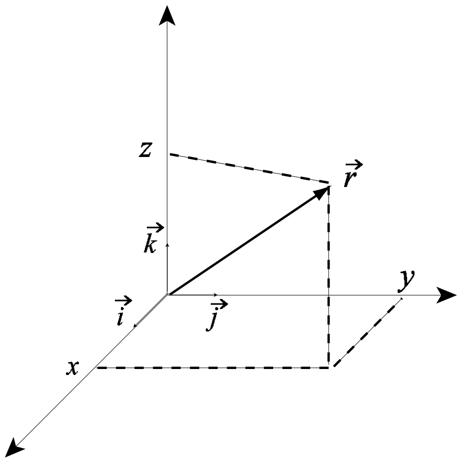

Рис. 1.1: График декартовой системы координат. Изображены взаимно-перпендикулярные оси декартовой системы координат и их *орты* –направленные вдоль осей единичные векторы $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Оси выбраны в таком порядке, чтобы орты образовывали правую тройку. Изображен также радиус-вектор некоторой точки пространства с координатами (x, y, z). Чтобы найти координаты радиус-вектора, надо опустить из его вершины перпендикуляры на соответствующие числовые оси. На графике определение координат x и y проведено в два приема: Вначале опущена вертикальная линия до пересечения с координатной плоскостью $z = 0$, а затем построены перпендикуляры к осям x и y.

всех точках кривой $\mathcal{L}$. Разобьем кривую на кусочки точками

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)\,, \quad \vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)\,, \ldots\,, \quad \vec{r}_n = \vec{r}(t_n)$$
$$(\tau = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T)\,.$$

Обозначим расстояние между точками $\vec{r}_{k-1}$ и $\vec{r}_k$ за $\Delta\ell_k$. Если эти расстояния достаточно малы, то массу соответствующего участка материальной кривой $\mathcal{L}$ можно вычислить с помощью приближенной формулы

$$\Delta m_k = \mu(\vec{r}_k^{\,*})\,\Delta\ell_k\,.$$

Здесь $\vec{r}_k^{\,*}$ -произвольная точка k-го участка кривой. Сложив их, получим интегральную сумму

$$m \cong \sum_{k=1}^{n} \mu(\vec{r}_k^{\,*})\,\Delta\ell_k\,,$$

примерно равную полной массе материальной кривой.

В математике доказывается, что если $\mu(\vec{r})$ -ограниченная, кусочно-непрерывная вдоль кривой $\mathcal{L}$ функция, то при $\max(\Delta\ell_k) \to 0$ интегральная сумма сходится к пределу, независящему от способа разбиения кривой на элементарные отрезки, то есть выбора точек $\vec{r}_k^{\,*}$. Этот предел называют *криволинейным интегралом 1-го типа вдоль кривой* $\mathcal{L}$, и пользуются для него обозначением:

$$m = \int\limits_{\mathcal{L}} \mu(\vec{r})\,d\ell\,.$$

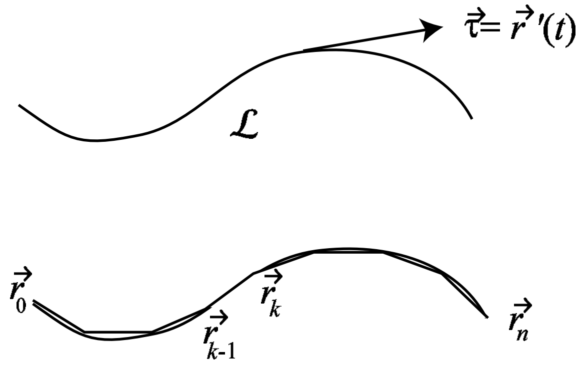

Рис. 1.2: Вверху изображена типичная гладкая кривая $\mathcal{L}$, вдоль которой берется криволинейный интеграл 1-го типа. Там же указан вектор касательной к некоторой точке кривой. Внизу та же кривая, разбитая на кусочки, фигурирующие в интегральной сумме, определяющей криволинейный интеграл.

В общем случае, вместо плотности $\mu(\vec{r}\,)$, под интегралом может стоять любая другая интегрируемая функция $f(\vec{r}\,)$. Заметим еще, что как видно из определения криволинейного интеграла 1-го типа, его величина не зависит от направления обхода кривой $\mathcal{L}$ при увеличении параметра t.

Чтобы свести криволинейный интеграл к стандартному определенному интегралу по отрезку $[\tau, T]$ на числовой оси t, замечают, что длина бесконечно малого отрезка кривой, с точностью до бесконечно малых более высокого порядка малости, может быть найдена по формуле

$$d\ell = |\vec{r}\,'|\,(t)\,dt\,,$$

и заменяют криволинейный интеграл определенным интегралом:

$$I = \int\limits_{\mathcal{L}} f(\vec{r}\,)\,d\ell = \int_\tau^T f(\vec{r}\,(t))\,|\vec{r}\,'|\,(t)\,dt\,. \tag{1.3}$$

Найдем явную формулу вычисления криволинейного интеграла 1-го типа в декартовой системе координат. Для этого продифференцируем радиус-вектор (2) по t и подставим его модуль

$$|\vec{r}\,'|\,(t) = \frac{d\ell}{dt} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$$

в правую часть формулы (3). В итоге получим:

$$I = \int_\tau^T f(\vec{r}\,(t))\sqrt{x'^{\,2}(t) + y'^{\,2}(t) + z'^{\,2}(t)}\,dt\,.$$

Заметив еще, что в используемой декартовой системе координат подынтегральная функция векторного аргумента сводится к функции трех аргументов

$$f(\vec{r}\,(t)) = f(x(t), y(t), z(t))\,,$$

перепишем интеграл в окончательном виде:

$$I = \int_\tau^T f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'^{\,2}(t) + y'^{\,2}(t) + z'^{\,2}(t)}\,dt\,. \tag{1.4}$$

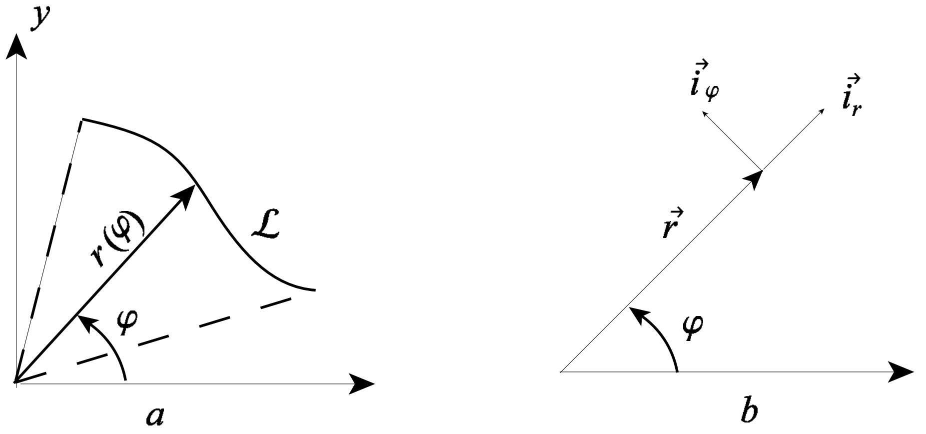

Рис. 1.3: Иллюстрация к вычислению криволинейного интеграла в полярных координатах. На рисунке a изображена кривая $\mathcal{L}$, по которой ведется интегрирование, а также текущий полярный угол φ точки прямой, отстоящей от начала координат на расстоянии $r(\varphi)$. Пунктирами указаны направления на крайние точки кривой интегрирования, отвечающие углам ϕ и Φ. На рисунке b изображен радиус-вектор точки в полярными координатами $\{r, \varphi\}$ и единичные векторы локального базиса полярной системы координат в данной точке. Если мысленно поместить базисный вектор $\vec{i}_r$ в начало координат, то с ростом φ он будет совершать чистое вращательное движение со скоростью вращения, равной $\vec{i}_\varphi$.

Интеграл по плоской кривой Приведем еще несколько полезных формул вычисления криволинейного интеграла. Так если кривая целиком лежит в плоскости $\{x,\, y\}$ $(z = 0)$, то $z' \equiv 0$, $f(\vec{r}) = f(x(t), y(t))$, и из (4) имеем:

$$I = \int_\tau^T f(x(t),(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt\,. \tag{1.5}$$

Пусть кроме того кривая задана однозначной функцией $y = y(x)$. Тогда за параметр t естественно выбрать координату x и вычислять криволинейный интеграл по формуле

$$I = \int_a^b f(x,\, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx\,. \tag{1.6}$$

Здесь $[a,\, b]$ –отрезок на оси x, на который проектируется плоская кривая.

Интегрирование в полярной системе координат Иногда плоскую кривую удобно задать в полярной системе координат $\{r,\, \varphi\}$, то есть так, что интересующий нас участок кривой задан уравнением

$$r(\varphi) = r(\varphi) \quad (\phi \le \varphi \le \Phi)\,. \tag{1.7}$$

Здесь $(\phi,\, \Phi)$ –раствор углов, под которым из начала координат виден исследуемый участок кривой.

В подобных случаях удобно свести криволинейный интеграл к определенному интегралу по углу φ. Чтобы сделать это, выразим декартовы координаты точек кривой через полярные координаты:

$$x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi\,, \quad y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi\,.$$

Заменив в (5) t на φ и подставив под знаком корня в интеграле квадраты производных x и y по φ:

$$x' = r'\cos\varphi - r\sin\varphi\,, \quad y' = r'\sin\varphi + r\cos\varphi\,,$$

придем к искомой форме записи криволинейного интеграла:

$$I = \int\limits_{\mathcal{L}} f(\vec{r}(\varphi))d\ell = \int_{\phi}^{\Phi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\,d\varphi\,. \tag{1.8}$$

Замечание 1.1 Изложенный выше переход от криволинейного интеграла к определенному интегралу по полярному углу, чересчур привязан к исходной декартовой системе координат $\{x, y\}$. Порой это создает неудобства, особенно если интегрируемая функция изначально задана как функция полярных координат: $f = f(r, \varphi)$. Поэтому выведем формулу, родственную (8), опираясь на разложение векторов по *локальному базису* полярной системы координат. Другими словами, в каждой точке пространства с полярными координатами $\{r,\, \varphi\}$ зададим два взаимно-перпендикулярных вектора $\vec{i}_r$ и $\vec{i}_\varphi$. Первый из них направлен от центра полярной системы координат в сторону рассматриваемой точки, а второй касателен окружности радиуса r, описанной вокруг центра полярной системы координат, и направлен в сторону возрастания угла φ. С их помощью радиус-вектор кривой интегрирования запишется в виде:

$$\vec{r}(\varphi) = r(\varphi)\,\vec{i}_r\,.$$

Дифференцируя его по φ и заметив, что производная базисного радиального вектора

$$\frac{d\vec{i}_r}{d\varphi} = \vec{i}_\varphi$$

–равна базисному угловому вектору ($\vec{i}_r \perp \vec{i}_\varphi$), получим:

$$d\ell = |\vec{r}\,'(\varphi)|\,d\varphi = \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2\,(\varphi)}d\varphi\,.$$

Здесь штрихом обозначена производная по φ. Следовательно, криволинейный интеграл по кривой, заданной в полярной системе координат, вычисляется по формуле:

$$I = \int\limits_{\mathcal{L}} f(r, \varphi)\,d\ell = \int_{\phi}^{\Phi} f\left(r(\varphi), \varphi\right)\sqrt{r^2(\varphi) + r'^{\,2}(\varphi)}\,d\varphi\,. \tag{1.9}$$

1.2 Задачи в классе

Задача 1.1
(4221) Вычислить криволинейный интеграл 1-го типа

$$\int\limits_{\mathcal{L}} (x + y)\,d\ell\,,$$

где $\mathcal{L}$ -контур треугольника с вершинами $O(0,0)$, $A(1,0)$ и $B(0,1)$.

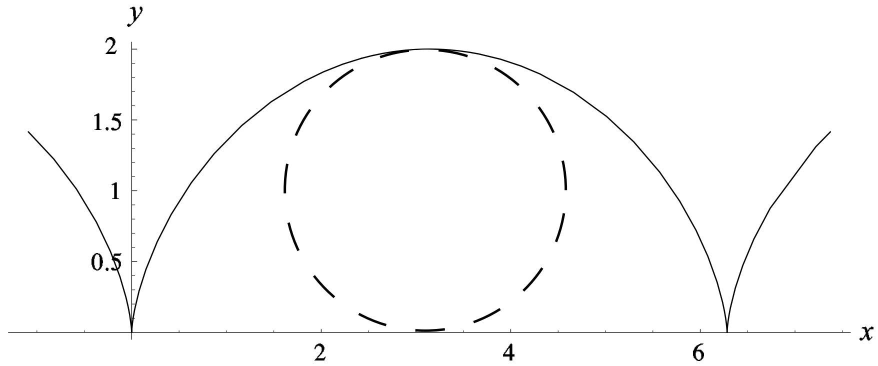

Рис. 1.4: Иллюстрация к задаче 2: График одной арки циклоиды — траектории движения точки на ободе колеса радиусом $a = 1$, катящегося по прямой без скольжения.

Решение 1.1 Кривая, вдоль которой ведется интегрирование, представляет собой треугольник, причем две его стороны лежат на осях координат. Поэтому естественно разбить этот интеграл на три обычных интеграла $I = I_1 + I_2 + I_3$. Первый из них равен интегралу по оси x в пределах от 0 до 1:

$$I_1 = \int_0^1 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}\,.$$

Аналогично вычисляется второй интеграл, по отрезку оси y: $I_2 = 1/2$.

Третий интеграл надо взять по прямой между точками A и B. Общая формула вычисления интегралов 1-го типа в данном двумерном случае задается формулой (5), где τ и T, соответственно, наименьшее и наибольшее значения параметра t, при изменении которого точка $x = x(t)$, $y = y(t)$, пробегает заданную кривую. В нашем случае $x(t) = t$, $y(t) = 1 - t$, $\tau = 0$, $T = 1$. Следовательно, третий интеграл равен:

$$I_3 = \int_0^1 \sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\,.$$

Таким образом, окончательный результат:

$$I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}\,.$$

Задача 1.2

(4222) Вычислить криволинейный интеграл 1-го типа

$$\int\limits_{\mathcal{L}} y^2\,d\ell\,,$$

где $\mathcal{L}$ -арка циклоиды, заданной параметрическим уравнением

$$x = a(t - \sin t)\,, \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \le t \le 2\pi)\,.$$

Решение 1.2 Напомним, циклоида представляет собой траекторию точки на ободе колеса радиусом a, катящегося без скольжения по оси x.

Начнем вычисление с нахождения производных под корнем в интеграле (5):

$$x'^{\,2}(t) = a^2\,(1-\cos t)^2\ , \quad y'^{\,2}(t) = a^2 \sin^2 t\,.$$

Соответственно, подкоренное выражение равно

$$a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t = 2a^2(1-\cos t)\,,$$

а интеграл принимает вид:

$$I = a^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 \sqrt{2-2\cos t}\, dt\,.$$

Чтобы вычислить полученный определенный интеграл, сделаем замену переменных $t = 2\alpha$ и воспользуемся известной тригонометрической формулой

$$1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha\,,$$

с учетом которой искомый интеграл примет вид:

$$I = -16a^3 \int_0^{\pi} \sin^4\alpha\, d\cos\alpha\,.$$

С помощью еще одной замены $z = \cos\alpha$, и принимая во внимание четность подынтегральной функции, сведем интеграл к следующему:

$$I = 32\,a^3 \int_0^1 (1-z^2)^2\, dz = 32\,a^3 \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{256}{15}\,a^3\,.$$

Задача 1.3
(4227) Вычислить интеграл

$$\int\limits_{\mathcal{L}} |y|\, d\ell\,,$$

где $\mathcal{L}$ –дуга лемнискаты

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)\,.$$

Решение 1.3 Вначале напомним геометрические свойства лемнискаты Бернулли. Это геометрическое место точек, для которых произведение их расстояний до двух фокусов (в нашем случае лежащих на оси x в точках $\pm a/\sqrt{2}$) есть постоянная величина (здесь $a^2/2$).

Уравнение лемнискаты задано в неявной форме, поэтому удобно перейти к полярной системе координат $x = r\cos\varphi\,, y = r\sin\varphi$, в которой уравнение лемнискаты примет вид: $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Вычислим заданный криволинейный интеграл по формуле (8). Заметим при этом, что лемниската лежит между прямыми $y = \pm x$ (так как $\cos 2\varphi$ должен быть неотрицателен) и симметрична как по отношению к оси x, так и к оси y. Тем же свойством симметрии обладает и подынтегральная функция. Поэтому достаточно вычислить интеграл по куску лемнискаты, лежащему в первом квадранте. Ему отвечают

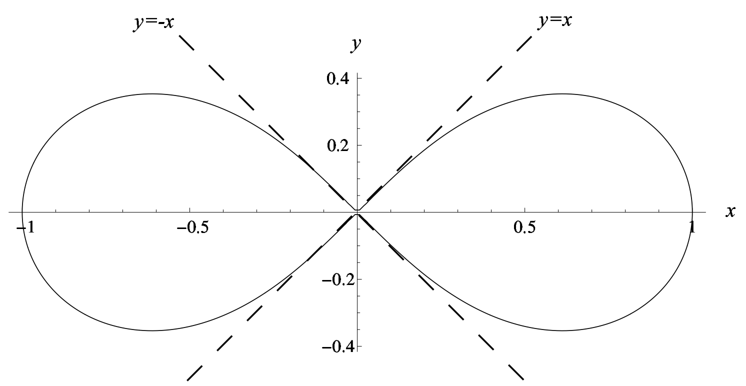

Рис. 1.5: Иллюстрация к задаче 3: Лемниската Бернулли. Ее график целиком умещается между биссектрисами 1-го — 3-го и 2-го — 4-го квадрантов.

пределы интегрирования $\phi = 0\,, \quad \Phi = \pi/4$. Кроме того, корень в определенном интеграле (8) в нашем случае равен:

$$\sqrt{\frac{a^4}{r^2}\sin^2 2\varphi + r^2} = \frac{1}{r}\sqrt{a^4\sin^2 2\varphi + r^4} = \frac{a^2}{r}\,.$$

Таким образом:

$$\int\limits_{\mathcal{L}} |y|\,d\ell = 4\int_0^{\pi/4} |\,r\sin\varphi|\,\frac{a^2}{r}\,d\varphi = 4a^2\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\,d\varphi = 2a^2(2-\sqrt{2})\,.$$

Задача 1.4
(4230) Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{\mathcal{L}} \frac{d\ell}{y^2}\,,$$

где $\mathcal{L}$ –цепная линия

$$y = a\,\cosh\frac{x}{a}\,.$$

Решение 1.4 За переменную интегрирования в определенном интеграле здесь проще всего взять x и прибегнуть к формуле (6). Имея ввиду, что

$$d\ell = \sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{a}}dx = \cosh\frac{x}{a}\,dx\,,$$

придем к равенству

$$I = \frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\cosh\frac{x}{a}} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{\cosh z}\,.$$

Здесь взята новая переменная интегрирования $z = x/a$. Далее

$$I = \frac{2}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^z\,dz}{e^{2z}+1} = \frac{2}{a}\int_0^{\infty}\frac{du}{u^2+1} = \frac{\pi}{a}\,.$$

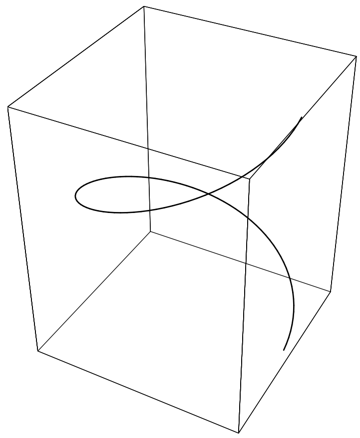

Рис. 1.6: Иллюстрация к задаче 5: График одного шага винтовой линии.

Задача 1.5
(4237) Вычислить интеграл

$$\int\limits_{\mathcal{L}} (x^2 + y^2 + z^2)\, d\ell\,,$$

где $\mathcal{L}$ - часть винтовой линии

$$x = a\cos t\,, \quad y = a\sin t\,, \quad z = bt \quad (0 \le t \le 2\pi)\,.$$

Решение 1.5 Мы уже взяли за правило зримо представлять себе форму обсуждаемых кривых. Не отступим от него и на сей раз, предварительно изобразив винтовую линию. Выполнив затем элементарные выкладки, основанные на формуле (4), будем иметь:

$$I = \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}\, dt = \frac{2\pi}{3}\,(3a^2 + 4\pi^2 b^2)\sqrt{a^2+b^2}\,.$$

Задача 1.6
(4241.1) Найти массу $\mathcal{M}$ дуги параболы

$$y^2 = 2px \quad \left(0 \le x \le \frac{p}{2}\right)\,,$$

если линейная плотность параболы в текущей точке $M(x, y)$ равна $|y|$.

Решение 1.6 Используем формулу (6). При этом учтем, что вклад от интегралов по разным ветвям параболы одинаков, так что можно взять в качестве результата удвоенный вклад от ее верхней ветви. Явный вид уравнения указанной ветви кривой и ее производной таков:

$$y = \sqrt{2px}\,, \quad y' = \sqrt{\frac{p}{2x}}\,.$$

Следовательно:

$$\mathcal{M} = 2\int_0^{p/2} y\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx = 2\sqrt{2p}\int_0^{p/2}\sqrt{x+\frac{p}{2}}\,dx =$$

$$\frac{4}{3}\sqrt{2p}\left(x+\frac{p}{2}\right)^{3/2}\Bigg|_0^{p/2} = \frac{2}{3}p^2(2\sqrt{2}-1)\,.$$

1.3 Домашнее задание

4224, 4226, 4229, 4231, 4244

Задача 1.7
(4224) Вычислить интеграл 1-го типа

$$I = \int\limits_{\mathcal{L}} xy\,d\ell\,,$$

где $\mathcal{L}$ *–дуга гиперболы*

$$x = \cosh t\,, \quad y = \sinh t \quad (0 \le t \le t_0)\,.$$

Решение 1.7 Пользуясь формулой (5) и известным соотношением $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, получаем:

$$I = a^3\int_0^{t_0}\cosh t\sqrt{2\cosh^2 t - 1}\;\sinh t\,dt\,.$$

Заменой переменной интегрирования $\cosh t = z$ сводим интеграл к виду

$$I = \int_1^{\cosh t} z\sqrt{2z^2-1}\,dz = \frac{1}{2}a^3\int_1^{\cosh^2 t_0}\sqrt{2u-1}\,du$$
$$= \frac{a^3}{6}\left[\cosh^{3/2}2t_0 - 1\right]\,.$$

Тут мы применили еще одно известное равенство: $2\cosh^2\varphi - 1 = \cosh 2\varphi$.

Задача 1.8
(4226) Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{\mathcal{L}} \exp\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\,d\ell\,,$$

где $\mathcal{L}$ *–выпуклый контур, ограниченный кривыми*

$$r = a\,, \quad \varphi = 0\,, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

(r *и* φ *–полярные координаты).*

Решение 1.8 Интеграл естественно разбить на два (одинаковых) интеграла по лучам, и интеграл по дуге окружности:

$$I = 2\int_0^a e^r\,dr + ae^a\int_0^{\pi/4} d\varphi\,.$$

Таким образом, имеем:

$$I = 2\,(e^a - 1) + \frac{\pi a}{4}e^a\,.$$

Задача 1.9
(4229) Сосчитать интеграл

$$\int\limits_{\mathcal{L}} \sqrt{x^2+y^2}\,d\ell\,, \qquad \mathcal{L} \quad - \quad x^2+y^2 = ax\,.$$

Решение 1.9 Обратим внимание, что уравнение окружности, по которой берется криволинейный интеграл, можно записать в виде:

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}\,.$$

Отсюда легко сообразить, что уравнение $\mathcal{L}$ проще всего в смещенной полярной системе координат $\{r\,,\varphi\}$, связанных с исходными координатами равенствами:

$$x = \frac{a}{2} + r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,.$$

При этом уравнение окружности запишется в форме:

$$r = \frac{a}{2} \quad (0 \le \varphi \le 2\pi)\,.$$

Соответственно, $d\ell = a\,d\varphi$. Представив искомый интеграл как удвоенный вклад от верхней полуокружности, будем иметь:

$$I = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi} \sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi\,.$$

Вспомнив затем тригонометрическую формулу

$$2\cos\varphi + 2 = 4\cos^2\frac{\varphi}{2}\,,$$

получим окончательно:

$$I = a^2\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 2\,a^2\,.$$

Задача 1.10
(4231) Найти длину дуги пространственной кривой

$$x = 3t\,, \quad y = 3\,t^2\,, \quad z = 2\,t^3\,,$$

от точки $O(0,0,0)$ *до точки* $A(3,3,2)$.

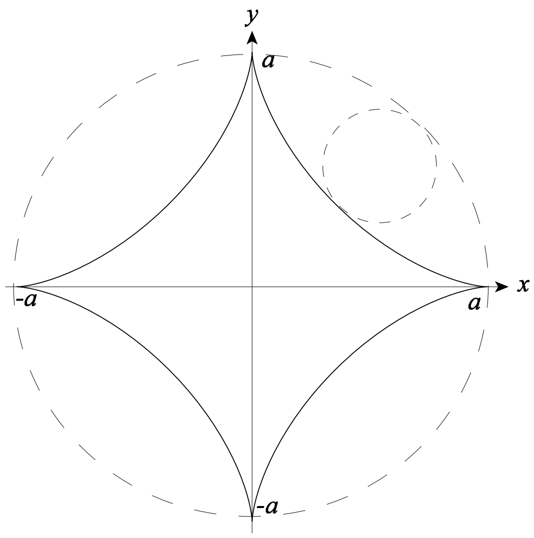

Рис. 1.7: Иллюстрация к задачам 11 и 14: График астроиды. Напомним геометрическое происхождение астроиды. Она представляет собой частный случай *гипоциклоид* –кривых, вычерченных фиксированной точкой окружности радиуса ma ($m < 1$), катящейся без скольжения по неподвижной окружности радиуса a с ее внутренней стороны. Астроида возникает, если отношение радиусов катящейся и неподвижной окружностей равно $m = 1/4$.

Решение 1.10 Точка с заданными координатами пробегает указанную дугу, если t меняется от 0 до 1. Таким образом, длина дуги равна интегралу:

$$L = 3\int_0^1 \sqrt{1+4t^2+4t^4}\,dt = 3\int_0^1 (1+2t^2)\,dt = 3\left(1+\frac{2}{3}\right) = 5\,.$$

Задача 1.11
(4244.1) Найти статические моменты

$$S_y = \int\limits_{\mathcal{L}} x\,d\ell\,, \quad S_x = \int\limits_{\mathcal{L}} y\,d\ell$$

дуги $\mathcal{L}$ астроиды

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \quad (x \geq 0\,, \quad y \geq 0)$$

относительно осей координат.

Решение 1.11 Из симметрии астроиды относительно осей координат видно, что искомые величины равны между собой. Поэтому вычислим лишь вторую, взяв за переменную интегрирования x. Подставив в (6)

$$y = \left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^{3/2} \qquad y'^{\,2} = \left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)\, x^{-2/3}\,,$$

$$\sqrt{1+y'^{\,2}} = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\,,$$

в итоге получим:

$$S_y = a^{1/3} \int_0^a \left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^{3/2} \frac{dx}{x^{1/3}}\,.$$

Сменив переменную интегрирования

$$u = x^{2/3} \qquad \left(\frac{dx}{x^{1/3}} = \frac{3}{2} du\right)\,,$$

найдем окончательно:

$$S_y = \frac{3}{2} \int_0^{a^{2/3}} \left(a^{2/3} - u\right)^{3/2} du = \frac{3}{5}\, a^2\,.$$

Замечание 1.1 Вычисление статических моментов станет еще проще, если использовать очевидную параметризацию астроиды:

$$x = a \cos^3 t\,, \quad y = a \sin^3 t \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)\,.$$

Несложные выкладки показывают, что

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = 3a^2 \sin t \cos t\,.$$

Следовательно, согласно (5),

$$S_y = 3a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t \sin t\, dt = -\frac{3}{5} a^2 \cos^5 t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{5}\, a^2\,.$$

Задача 1.12
(4244.2) Найти момент инерции окружности $x^2 + y^2 = a^2$ относительно ее диаметра.

Решение 1.12 Вначале вспомним из физики определение момента инерции тела относительно заданной оси. Так называют объемный интеграл по всей области, занятой телом, от произведения плотности тела на квадрат кратчайшего расстояния от оси до текущей точки тела. В нашем случае телом служит материальная окружность и неявно подразумевается, что плотность всех точек окружности одинакова и равна единице. Поэтому нахождение момента инерции здесь сводится к вычислению криволинейного интеграла от квадрата расстояния точек окружности до ее диаметра. В силу симметрии окружности результат не зависит от того, какой из диаметров мы выберем. Для простоты выкладок возьмем диаметр, лежащий на оси x, и примем во внимание, что искомый момент инерции равен удвоенному моменту инерции куска окружности, лежащей в 1-м квадранте. Тогда

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 + y'^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

и момент инерции выразится следующим интегралом:

$$I = 2 \int_{-a}^{a} y^2 \sqrt{1 + y'^{\,2}}\, dx = 2a \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \pi a^3\,.$$

Мы не стали аналитически вычислять последний интеграл, поскольку он, очевидно, равен половине площади круга.

Задача 1.13
(4244.3) Найти полярные моменты инерции

$$I_0 = \int\limits_{\mathcal{L}} (x^2 + y^2)\, d\ell\,,$$

относительно точки $O(0,0)$, следующих линий:

а) контура $\mathcal{L}$ квадрата $\max\{|x|,\,|y|\} = a$;

б) контура $\mathcal{L}$ правильного треугольника с вершинами в полярных координатах

$$P(a,\,0)\,,\quad Q\left(a,\,\frac{2\pi}{3}\right)\,,\quad R\left(a,\,\frac{4\pi}{3}\right)\,.$$

Решение 1.13 а) Достаточно вычислить полярный момент инерции верхней стороны квадрата и умножить его на 4:

$$I_0 = 4\int_{-a}^{a} (x^2 + a^2)\, dx = \frac{32}{3}a^3\,.$$

б) В силу симметрии треугольника относительно начала координат, искомый момент инерции равен утроенному моменту инерции левой стороны треугольника:

$$I_0 = 6\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \left(\frac{1}{4}a^2 + y^2\right)\, dy = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^3\,.$$

Задача 1.14
(4244.4) Найти средний полярный радиус астроиды

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}\,,$$

то есть число $r_0 \quad (r_0 > 0)$, определяемое формулой

$$I_0 = \ell\, r_0^2\,,$$

где I_0 –полярный момент инерции астроиды относительно начала координат, а ℓ –длина дуги астроиды.

Решение 1.14 Вспомнив замечание к задаче 11, сразу вычислим длину астроиды

$$\ell = \int\limits_{\mathcal{L}} d\ell = 4\int_0^{\pi/2} 3a\sin t\cos t\, dt = 6a\,.$$

Найдем теперь полярный момент астроиды. По определению он равен:

$$I_0 = \int\limits_{\mathcal{L}} (x^2 + y^2)\, d\ell = 4\int_0^{\pi/2} a^2\left(\cos^6 t + \sin^6 t\right) 3a\sin t\cos t\, dt =$$

$$12a^3\left(\int_0^{\pi/2} \cos^7 t\sin t\, dt + \int_0^{\pi/2} \sin^7 t\cos t\, dt\right) = 12a^3\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 3\,a^2\,.$$

Подставив найденные значения в формулу $I_0 = \ell\, r_0^2$, получаем:

$$3a^3 = 6a\, r_0^2 \quad\Rightarrow\quad r_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}\,.$$

Замечание 1.1 Протестируем найденное значение среднего полярного радиуса астроиды с точки зрения здравого геометрического смысла. По своей природе, средний радиус должен быть меньше радиуса описанной окружности a, но больше радиуса вписанной в астроиду окружности $a/2$. Так оно и есть:

$$\frac{a}{2} < \frac{a}{\sqrt{2}} < a$$

–средний полярный радиус астроиды равен *среднему геометрическому* наименьшего и наибольшего расстояний точек астроиды от центра.