Глава 2

Криволинейные интегралы 2-го типа

2.1 Необходимые сведения из теории

Напомним, обсужденный нами на предыдущем занятии криволинейный интеграл 1-го типа был удобен при отыскании *скалярных* величин, таких как полные массы материальных кривых, заряды электрически заряженных нитей. Эти величины не зависели от способа ориентации исследуемых кривых в пространстве. Напротив, криволинейные интегралы 2-го типа, которые мы будем учиться вычислять на этом занятии, тесно связаны с *векторными* полями и принципиально зависят от взаимной ориентации интегрируемых векторных полей и кривых, по которым ведется интегрирование.

К необходимости вычисления криволинейных интегралов 2-го типа приводят многие задачи, возникающие в различных разделах физики. Типичным примером подобного рода задач может служить проблема определения *работы*, которую надо совершить, чтобы переместить материальную точку в силовом поле вдоль заданной кривой. Обсудим эту проблему подробнее.

Пусть имеется силовое поле $\vec{F}(\vec{r})$, $\vec{r} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$. Вычислим работу по перемещению материального тела массы m вдоль гладкой ориентированной кривой $\mathcal{L}$, лежащей в области Ω и соединяющей точки A и B (см. Рис. 2.1.). Для этого разобьем кривую $\mathcal{L}$ точками

$$A = M_0\,,\ M_1\,,\dots\,,M_{k-1}\,,\ M_k\,,\dots\,,M_n = B$$

на дуги $M_{k-1}\ M_k$, $k = 1,\dots,n$. Как известно из физики, работа при перемещении вдоль маленькой, практически прямолинейной, дуги $M_{k-1}\ M_k$, вдоль которой силовое поле $\vec{F}(\vec{r})$ можно считать постоянным, приближенно равна

$$m\,\left(\vec{F}(\vec{r}_k^{\,*})\cdot\vec{\tau}(\vec{r}_k^{\,*})\right)\Delta\ell_k\,,$$

где $\vec{r}_k^{\,*}$ –любая точка дуги $M_{k-1}\ M_k$, $\vec{\tau}(\vec{r}_k^{\,*})$ –единичный касательный вектор к кривой в точке $\vec{r}_k^{\,*}$, направленный в сторону движения, $\Delta\ell_k$ –длина дуги $M_{k-1}\ M_k$. Здесь и всюду ниже $(\cdot)$ символизирует скалярное произведение векторов.

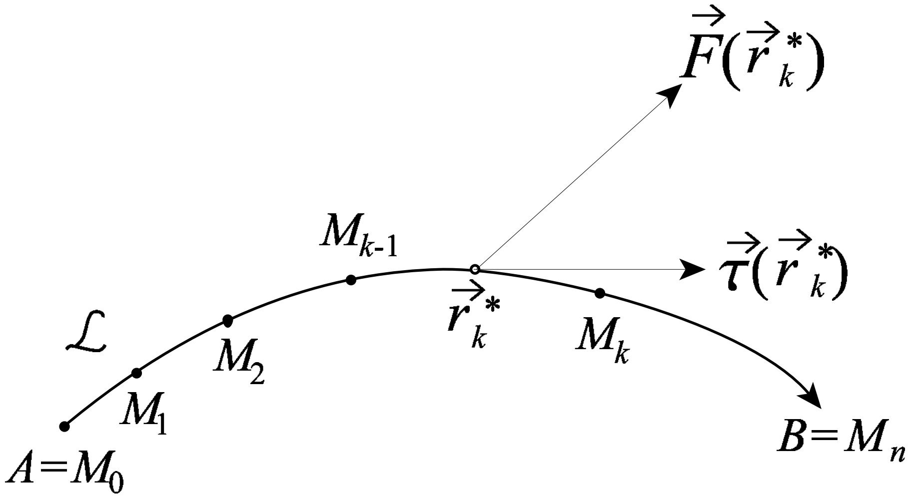

Рис. 2.1: Иллюстрация к определению работы перемещения материальной точки вдоль кривой $\mathcal{L}$ от начальной точки A до конечной точки B. Здесь же указаны векторы силового поля $\vec{F}$ и касательной $\vec{\tau}$ к кривой по направлению перемещения материальной точки, в некоторой точке $\vec{r}_k^*$ k-й элементарной дуги, на которые разбита данная кривая $\mathcal{L}$.

Складывая вместе работу вдоль всех дуг $M_{k-1}\ M_k$, найдем, что полная работа по перемещению материальной точки вдоль кривой $\mathcal{L}$ приближенно равна так называемой *интегральной сумме*

$$m \sum_{k=1}^{n} \Big(\vec{F}(\vec{r}_k^*) \cdot \vec{\tau}(\vec{r}_k^*) \Big) \, \Delta\ell_k \, .$$

Предел входящей сюда суммы при $\max \Delta\ell_k \to 0$ (существующий, в случае гладкой кривой $\mathcal{L}$ и непрерывного поля $\vec{F}(\vec{r})$, независимо от способа разбиения) называют криволинейным интегралом 1-го типа и обозначают с помощью значка интеграла:

$$\int\limits_{\mathcal{L}} \Big(\vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{\tau}(\vec{r}) \Big) \, d\ell \, .$$

Приведенный пример показывает, что криволинейный интеграл 2-го типа можно ввести стандартным способом — как предел интегральной суммы. Для нас же предпочтительнее будет другое, более лаконичное, определение, опирающееся на уже знакомое понятие криволинейного интеграла 1-го типа:

Определение 2.1 *Пусть $\mathcal{L}$ –гладкая ориентированная кривая кривая в* $\mathbb{R}$ *и $\vec{A}(\vec{r})$ –ограниченная векторная функция точки $\vec{r}$ кривой $\mathcal{L}$. Положим*

$$f(\vec{r}) = (\vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{\tau}(\vec{r})) \, , \quad \vec{r} \in \mathcal{L} \, ,$$

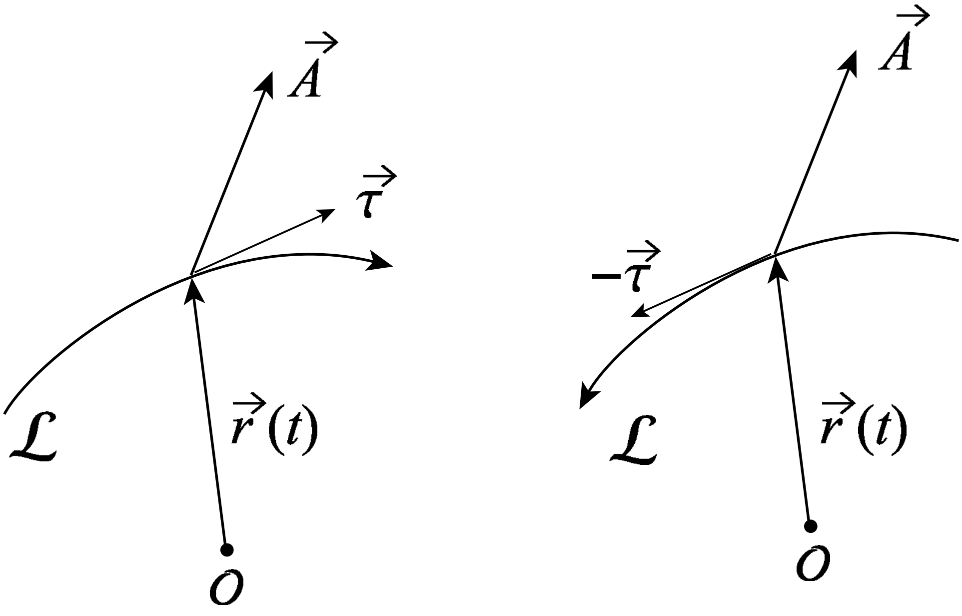

Рис. 2.2: Геометрическое пояснение смены знака криволинейного интеграла 2-го типа при смене направления обхода кривой интегрирования $\mathcal{L}$: В этом случае направление касательной к кривой $\mathcal{L}$ в каждой ее точке меняется на противоположное. Соответственно, скалярное произведение $f(\vec{r})$ всюду меняет знак, что и приводит смене знака криволинейного интеграла 2-го типа. На рисунке изображен также текущий радиус-вектор кривой $\vec{r}\,(t)$, испущенный из начала координат $\mathcal{O}$.

где $\vec{\tau}(\vec{r})$ –касательный единичный вектор к кривой $\mathcal{L}$ в точке $\vec{r}$, направление которого совпадает с выбранным направлением обхода кривой. Криволинейный интеграл 1-го типа

$$\int\limits_{\mathcal{L}} f(\vec{r})\, d\ell = \int\limits_{\mathcal{L}} (\vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{\tau}(\vec{r}))\, d\ell$$

называют криволинейным интегралом 2-го типа.

Замечание 2.1 Подчеркнем, из определения криволинейного интеграла 2-го типа следует, что последний, в отличие от криволинейного интеграла 1-го типа, зависит от выбранного обхода кривой. Точнее, при смене направления обхода кривой меняется знак криволинейного интеграла 2-го типа. Геометрическая суть указанного свойства криволинейного интеграла 2-го типа выражена на Рис. 2.2.

К криволинейному интегралу 2-го типа приводит, возникающее во многих разделах физики, понятие *циркуляции* векторного поля вдоль заданной кривой. Поясним это понятие подробнее. Пусть имеется векторное поле $\vec{A}\,(\vec{r})$, заданное в области $\nleq \subset \mathbb{R}^3$, включающей в себя гладкую кривую $\mathcal{L}$. Предположим на время, что это *контур*, то есть замкнутая кривая, заданная параметрическим уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(t)\,.$$

где $\vec{r}(t)$ непрерывно-дифференцируемая функция, что геометрически обеспечивает гладкость кривой – наличие единственной касательной в каждой ее точке. Выделим определенное направление обхода контура и зададим $\vec{\tau}(\vec{r})$ –единичный вектор, касательный к контуру в точке $\vec{r}$ и направленный в сторону обхода контура. Выберем из двух возможных его ориентаций ту, которая совпадает с направлением обхода контура.

Аппроксимируем контур набором малых отрезков и сопоставим с каждым из них вектор $\Delta\vec{r}\,(t) = \vec{\tau}\,\Delta\ell$. Здесь $\Delta\ell$ –длина соответствующего отрезка.

Определение 2.2 *Предел интегральной суммы скалярных произведений векторного поля $\vec{A}\,(\vec{r}\,)$ в некоторой точке выбранного отрезка и ориентированных отрезков контура $\Delta\vec{r}$, взятой по всем составляющим контур элементарным отрезкам, называют криволинейным интегралом 2-го типа, или циркуляцией векторного поля $\vec{A}\,(\vec{r}\,)$ вдоль контура $\mathcal{L}$.*

Вытекающая из геометрического смысла форма записи криволинейного интеграла 2-го типа такова:

$$\oint\limits_{\mathcal{L}} \left(\vec{A}\cdot d\vec{r}\right) \qquad \oint\limits_{\mathcal{L}} \left(\vec{A}\cdot\vec{\tau}\right) d\ell\,. \tag{2.1}$$

Кружок на знаке интеграла здесь и всюду ниже означает, что интегрирование ведется по замкнутому контуру. Если кружок отсутствует, то подразумевается, что кривая интегрирования $\mathcal{L}$ не замкнута.

Укажем для справки еще одну разновидность записи криволинейного интеграла, иногда используемую в физических приложениях. Для этого заметим, что $(\vec{A}\cdot d\vec{r}) = A_\tau\,d\ell$, где A_τ –проекция интегрируемого векторного поля на заданное направление обхода. Соответственно, криволинейный интеграл по контуру $\mathcal{L}$ записывают еще и так:

$$\oint\limits_{\mathcal{L}} A_\tau d\ell\,.$$

Пусть в пространстве задана декартова система координат (x, y, z) с базисными векторами $\{\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}\,\}$, а интегрируемое векторное поле $\vec{A}\,(\vec{r}\,)$ представимо в форме:

$$\vec{A}\,(\vec{r}\,) = \vec{i}\,P(x,y,z) + \vec{j}\,Q(x,y,z) + \vec{k}\,R(x,y,z)\,. \tag{2.2}$$

Здесь $\{P,\,Q,\,R\}$ –проекции векторного поля на оси декартовой системы координат. Скалярное произведение поля $\vec{A}$ и ориентированного элементарного отрезка

$$d\vec{r} = \vec{i}\,dx + \vec{j}\,dy + \vec{k}\,dz \tag{2.3}$$

кривой $\mathcal{L}$ равно

$$\left(\vec{A}\cdot d\vec{r}\right) = P(x,\,y,\,z)\,dx + Q(x,\,y,\,z)\,dy + R(x,\,y,\,z)\,dz\,.$$

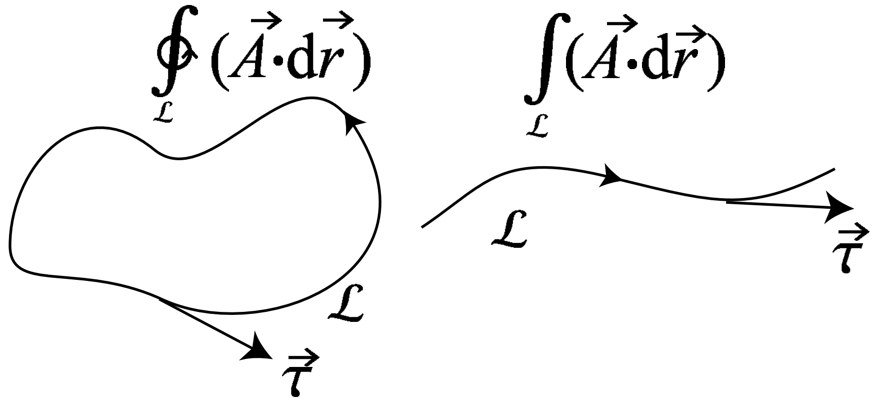

Рис. 2.3: Замкнутый контур (слева), незамкнутая кривая (справа) и соответствующие обозначения криволинейных интегралов второго типа. На кривых указаны направления обхода и касательные векторы в некоторой наугад выбранной точке.

Поэтому криволинейный интеграл 2-го типа часто записывают в форме:

$$I = \int\limits_{\mathcal{L}} \left(\vec{A}\cdot d\vec{r}\right) = I = \int\limits_{\mathcal{L}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz\,. \tag{2.4}$$

Для вычислении криволинейных интегралов как 1-го так и 2-го типов, их стараются свести к стандартным — определенным — интегралам. Покажем как это делается в случае криволинейного интеграла 2-го типа. Пусть кривая $\mathcal{L}$ задана в параметрической форме:

$$\vec{r}\,(t) = \vec{i}\,x(t) + \vec{j}\,y(t) + \vec{k}\,z(t)\,,$$

“привязанной” к некоторой декартовой системе координат (x, y, z). Причем параметр t выбран так, что при его возрастании от τ до T $(\tau < T)$ радиус-вектор $\vec{r}\,(t)$ вычерчивает всю кривую в заданном направлении обхода. Очевидно: $d\vec{r} = \vec{r}\,'(t)\,dt$, и входящее в определение криволинейного интеграла 2-го типа скалярное произведение равно:

$$\left(\vec{A}\cdot d\vec{r}\right) = \left(\vec{A}\,\left(\vec{r}\,(t)\right)\cdot \vec{r}\,'(t)\right)\,dt =$$
$$[P\,(x(t),\,y(t),\,z(t))\,x'(t) + Q\,(x(t),\,y(t),\,z(t))\,y'(t) +$$
$$R\,(x(t),\,y(t),\,z(t))\,z'(t)]\;dt\,.$$

Отсюда следует, что криволинейный интеграл 2-го типа выражается через стандартный определенный интеграл по формуле

$$\begin{gathered} I = \int_{\tau}^{T} [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \\ Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)]\;dt\,. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Мы придем к той же самой формуле перехода от криволинейного интеграла 2-го типа к определенному интегралу, подставив в (4) $dx = x'(t)dt$, $dy = y'(t)dt$, $dz = z'(t)dt$.

Подчеркнем еще раз, что в отличие от криволинейного интеграла 1-го типа, интеграл 2-го типа зависит от направления обхода заданной кривой. А именно, при смене направления обхода *кривой знак интеграла меняется.* Это свойство криволинейных интегралов 2-го типа роднит их с обычными определенными интегралами, меняющими знак при перестановке пределов интегрирования.

В физических приложениях важную роль играют так называемые *потенциальные* поля:

Определение 2.3 *Векторное поле $\vec{A}(\vec{r})$ называют потенциальным, если найдется такая скалярная функция $U(\vec{r})$, что во всей области определения векторного поля $\vec{A}(\vec{r})$ выполняется равенство*

$$\vec{A} = \vec{i}\,\frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial U}{\partial z}\,. \tag{2.6}$$

Входящую сюда скалярную функцию $U(\vec{r}) = U(x,y,z)$ называют потенциалом векторного поля $\vec{A}(\vec{r})$.

Если интегрируемое векторное поле $\vec{A}(\vec{r})$ потенциально, то подынтегральное выражение в криволинейном интеграле 2-го типа представляет собой полный дифференциал:

$$P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = dU(x,y,z)\,. \tag{6}$$

Вследствие этого интеграл не зависит от вида кривой $\mathcal{L}$, а только от ее начальной (x_0, y_0, z_0) и конечной (x_1, y_1, z_1) точек, и может быть вычислен по формуле:

$$\int\limits_{\mathcal{L}} \left(\vec{A}\cdot d\vec{r}\right) = U(x_1,y_1,z_1) - U(x_0,y_0,z_0)\,. \tag{7}$$

Из-за сходства этой формулы с формулой Ньютона-Лейбница теории определенных интегралов, потенциал $U(\vec{r})$ иногда называют *первообразной* интегрируемого векторного поля $\vec{A}(\vec{r})$.

Потенциал можно найти обычным интегрированием

$$U(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x,y,z)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y,z)\,dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0,y_0,z)\,dz + C\,. \tag{2.7}$$

Поясним геометрический смысл этой формулы. Ее правая часть представляет собой криволинейный интеграл по пути, соединяющем некоторую исходную точку (x_0, y_0, z_0) с произвольной точкой (x, y, z) нашего трехмерного пространства. Причем, для удобства интегрирования, путь составлен из трех прямых, параллельных осям координат: вначале мы идем вдоль оси z, по прямой $x = x_0$, $y = y_0$ (последний интеграл в правой части (8)). Затем движемся вдоль оси y, и наконец вдоль оси x. Поскольку потенциал определен с точностью до произвольной постоянной, в конце равенства помещена произвольная константа C.

Часто оказывается полезным, вытекающее из (2), (5), необходимое и достаточное условие наличия потенциальной функции:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}\,. \tag{2.8}$$

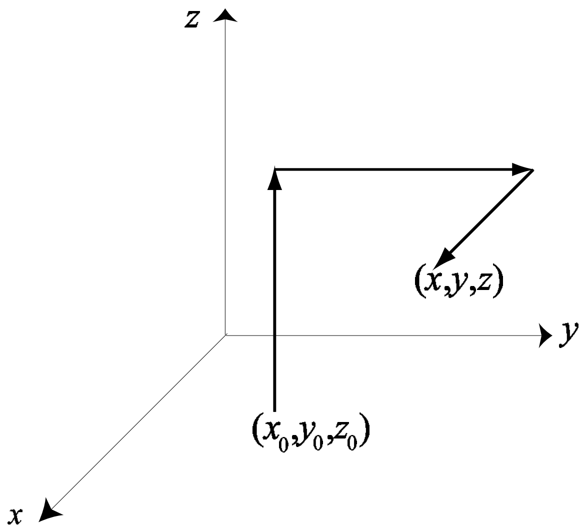

Рис. 2.4: Путь, сводящий нахождение потенциала к вычислению обычных определенных интегралов.

2.2 Задачи в классе

Задача 2.1
(4250) Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int\limits_{\mathcal{L}} (x^2 - 2xy)\; dx + (y^2 - 2xy)\, dy$$

по параболе $\mathcal{L}$

$$y = x^2 \quad (-1 \le x \le 1)\,,$$

пробегаемой слева направо.

Решение 2.1 За параметр, по которому ведется интегрирование в соответствующем определенном интеграле, в данном случае естественно взять x. Учитывая, что $y' = 2x$, получаем:

$$I = \int_{-1}^{1} (x^2 - 2x^3 + 2x^5 - 4x^4)\, dx = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{5}\right) = -\frac{14}{15}\,.$$

Здесь мы, воспользовавшись симметрией пределов, сразу проигнорировали вклад от подынтегральных слагаемых с нечетными степенями x.

Задача 2.2
(4252) Вычислить интеграл

$$I = \oint\limits_{\mathcal{L}} (x + y)\, dx + (x - y)\, dy\,,$$

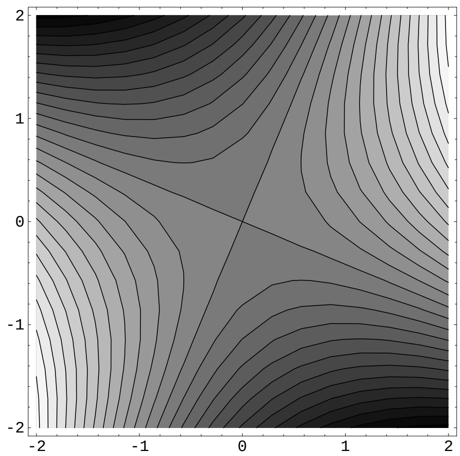

Рис. 2.5: Линии, вдоль которых потенциал из задачи 2 принимает одинаковые значения. Их называют еще линиями равного уровня или эквипотенциальными кривыми. Криволинейный интеграл 2-го типа от потенциального поля равен нулю, если кривая, по которой ведется интегрирование, соединяет точки, лежащие на одной линии равного уровня.

где $\mathcal{L}$ –эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \,,$$

пробегаемый против хода часовой стрелки.

Решение 2.2 При вычислении указанного интеграла удобно записать уравнение эллипса в параметрической форме:

$$x = a\cos t \,, \quad y = b\sin t \quad (0 \le t \le 2\pi) \,.$$

Отсюда $x' = -a\sin t$, $\quad y' = b\cos t$, и контурный интеграл сводится к

$$I = \int_0^{2\pi} [ab(\cos^2 t - \sin^2 t) - (a^2 + b^2)\sin t \cos t] \, dt \,,$$

или

$$I = \int_0^{2\pi} \left[ab\cos 2t - \frac{1}{2}(a^2 + b^2)\sin 2t \right] \, dt = 0 \,.$$

Замечание 2.1 Мы могли бы заранее предсказать результат, вовремя сообразив, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, а интеграл от полного дифференциала по замкнутому контуру равен нулю. Напомним, условие полного дифференциала в 2-мерном пространстве имеет вид:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \,.$$

В нашем случае $P = x + y$, $\quad Q = x - y$, и указанное условие выполняется.

Замечание 2.2 Приведенное рассуждение служит простейшей иллюстрацией того, как иногда совершаются научные открытия: Высказав и проверив гипотезу относительно происхождения полученного частного результата, мы доказали существенно более общее утверждение — интеграл от заданного подынтегрального выражения равен нулю для *любого* замкнутого контура интегрирования.

Для полноты картины, найдем потенциал интегрируемой векторной функции. Его легко вычислить с помощью двумерного варианта формулы (8), выбрав за исходную точку начало координат ($x_0 = 0,\ y_0 = 0$):

$$U(x,y) = \int_0^x P(x,y)\,dx + \int_0^y Q(0,y)\,dy + C = \\ = \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right) + x\,y + C\,.$$

Задача 2.3
(4255) Вычислить интеграл

$$I = \oint\limits_{ABCDA} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}\,,$$

где $\mathcal{L}$ –контур квадрата с вершинами $A(1,0)\,,\ B(0,1)\,,\ C(-1,0)\,,\ D(0,-1)$.

Решение 2.3 В качестве параметра здесь можно выбрать x и разбить интеграл на 4 –по каждой стороне квадрата. Заметив еще, что во всех точках контура интегрирования $|x| + |y| \equiv 1$, будем иметь

$$I = \int_1^0 0 \cdot dx + \int_0^{-1} 2dx + \int_{-1}^0 0 \cdot dx + \int_0^1 2dx = 0 - 2 + 0 + 2 = 0\,.$$

Нечетные интегралы здесь равны нулю, так как для них $dx + dy = dx - dx = 0$. Четные же интегралы взаимно сокращаются. Таким образом, окончательный результат: $I = 0$.

Задача 2.4
(4264) Вычислить интеграл

$$\int\limits_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

вдоль путей, не проходящих через начало координат.

Решение 2.4 В постановке задачи уже содержится подсказка: контур не определен однозначно, а заданы лишь координаты его начальной и конечной точек. Поэтому проверим прежде всего, не является ли подынтегральное выражение полным дифференциалом. Для этого вычислим производные:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\,,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\,.$$

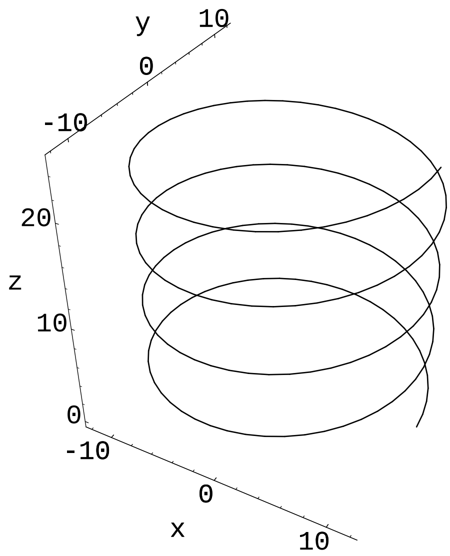

Рис. 2.6: График четырех витков винтовой линии при $a = 12$ и $b = 1$. В задаче 5 требуется вычислить интеграл по нижнему витку.

Они равны, а значит интеграл не зависит от пути интегрирования. Чтобы вычислить интеграл, нам осталось найти потенциал. Найдем его, двигаясь, например, от точки с координатами $x_0 = 1, y_0 = 1$ до произвольной точки плоскости (x, y):

$$U(x,y) = \int_1^x \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} + \int_1^y \frac{y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Таким образом

$$U(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + C$$

и исходный интеграл равен:

$$I = \sqrt{36+64} - 1 = 9\,.$$

Задача 2.5
(4280) Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{\mathcal{L}} y\ dx + z\ dy + x\ dz\,,$$

где $\mathcal{L}$ –виток винтовой линии

$$x = a\cos t\,, \quad y = a\sin t\,, \quad z = bt \quad (0 \le t \le 2\pi)\,,$$

пробегаемый в направлении возрастания параметра.

Решение 2.5 Разобьем интеграл на три:

$$I = -a^2\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt + ab\int_0^{2\pi} t\cos t\,dt + ab\int_0^{2\pi} \cos t\,dt\,.$$

Первый из них вычислим, пользуясь тригонометрической формулой $\sin^2 t = (1-\cos 2t)/2$, и сообразив, что интеграл от косинуса по удвоенному периоду равен нулю. Таким образом $I_1 = -\pi a^2$. Второй интеграл вычисляется интегрированием по частям:

$$ab\int_0^{2\pi} t\cos t\,dt = ab\int_0^{2\pi} t\,d\sin t = -\int_0^{2\pi}\sin t\,dt = 0\,.$$

Очевидно, третий интеграл также равен нулю. Следовательно, окончательный ответ: $I = -\pi a^2$.

Задача 2.6
(4285) Вычислить интеграл

$$\int\limits_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz\,.$$

Решение 2.6 Нетрудно сообразить, что подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал потенциала $U = xyz$. Таким образом, интеграл равен: $I = 6 - 6 = 0$, поскольку начальная и конечная точки лежат на одной эквипотенциальной поверхности $U = 6$.

Задача 2.7
(4271) Найти первообразную функцию z, если:

$$dz = (x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (x^2 - 2xy - y^2)\,dy\,.$$

Решение 2.7 Убедимся вначале в том, что правая часть этого равенства действительно является полным дифференциалом:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2y = \frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$

Вычислим потенциал, взяв за исходную точку начало координат:

$$z = \int_0^x x^2\,dx + \int_0^y (x^2 - 2xy - y^2)\,dy + C\,.$$

Отсюда имеем:

$$z = \frac{1}{3}x^3 + x^2 y - xy^2 - \frac{1}{3}y^3 + C\,.$$

Задача 2.8
(4291) Найти первообразную функцию U, если:

$$dU = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)\,dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)\,dy - \frac{xy}{z^2}\,dz\,. \qquad (*)$$

Решение 2.8 Вычислим потенциал, взяв за исходную точку, например, $(x_0 = 0, y_0 = 1, z_0 = 1)$. Пользуясь формулой (9), будем иметь:

$$U = \int_0^x \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)\,dx + \int_1^y \left(0 + \frac{0}{y^2}\right)\,dy - \int_1^z \frac{0\cdot dz}{z^2} + C\,.$$

При выбранном пути интегрирования последние два интеграла равны нулю. Таким образом

$$U = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} + C\,.$$

Осталось убедиться в том, что это равенство и соотношение (∗) не противоречат друг другу. Для этого надо продифференцировать U по x, y и z, и сравнить полученные выражения с коэффициентами при dx, dy, dz в (∗).

2.3 Домашнее задание

4254, 4256, 4263, 4284, 4290

Задача 2.9
(4254) Вычислить интеграл

$$I = \oint\limits_{\mathcal{L}} \frac{(x+y)\,dx - (x-y)\,dy}{x^2+y^2}\,,$$

где $\mathcal{L}$ – окружность $x^2 + y^2 = a^2$, пробегаемая против часовой стрелки.

Решение 2.9 При решении удобно записать уравнение окружности в параметрической форме: $x = a\cos t\,, \quad y = a\sin t\,.$ При этом, когда параметр t меняется от 0 до 2π, точка с указанными координатами пробегает окружность в заданном направлении. Таким образом, преобразуем интеграл к виду:

$$I = -\int_0^{2\pi} [(\cos t + \sin t)\sin t + (\cos t - \sin t)\cos t]\,dt\,.$$

Раскрыв скобки, получим:

$$I = -\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi\,.$$

Задача 2.10
(4256) Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{AB} dx\,\sin y + dy\,\sin x\,,$$

где AB – отрезок прямой между точками $A(0,\pi)$ и $B(\pi,0)$.

Решение 2.10 Уравнение прямой, по отрезку которой ведется интегрирование, имеет вид: $y = \pi - x$. Соответственно имеем:

$$I = \int_0^1 [\sin(\pi - x) - \sin x]\,dx = \int_0^1 0\cdot dx = 0\,.$$

Задача 2.11
(4263) Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$$

вдоль путей, не пересекающих оси y.

Решение 2.11 Вычислим потенциал, взяв за исходную точку $(1,0)$, и двигаясь вначале по оси x, а затем вдоль оси y. Это дает:

$$U(x,y) = \int_1^x 0 \cdot dx - \frac{1}{x}\int_0^y dy = -\frac{y}{x}\,.$$

Таким образом,

$$I = U(1,2) - U(2,1) = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}\,.$$

Задача 2.12
(4284) Найти криволинейный интеграл от полного дифференциала:

$$I = \int\limits_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x\,dx + y^2\,dy - z^3\,dz\,.$$

Решение 2.12 Найдем потенциал, двигаясь к произвольной точке (x,y,z) из начала координат, по оси x, а затем вдоль осей y и z:

$$U = \int_0^x x\,dx + \int_0^y y^2\,dy - \int_0^z z^3\,dz = \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{z^4}{4}\,.$$

Таким образом

$$I = (2 + 9 - 64) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = -53 - \frac{7}{12}\,.$$

Задача 2.13
(4290) Найти первообразную функцию U, если:

$$dU = (x^2 - 2yz)\,dx + (y^2 - 2xz)\,dy + (z^2 - 2xy)\,dz\,.$$

Решение 2.13 Пойдем от начала координат по оси x, а затем вдоль y и z. В результате получим:

$$U = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^3}{3} - 2xyz + C\,,$$

или окончательно

$$U = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz + C\,.$$