

Глава 4

Поверхностные интегралы 1-го типа

4.1 Необходимые сведения из теории

По аналогии с криволинейным интегралом 1-го типа, физическая иллюстрация которого состоит в нахождении массы материальной кривой с известной линейной плотностью, поверхностный интеграл 1-го типа выражает, к примеру, массу материальной поверхности по заданной поверхностной плотности. На языке математики, поверхностный интеграл 1-го типа

$$\iint_S f(x, y, z) dS \quad (4.1)$$

равен пределу, при стремлении наибольшего диаметра разбиения к нулю, интегральной суммы

$$\sum_i f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i ,$$

где ΔS_i площадь i -й площадки, на которые разбивают интегрируемую поверхность S , а $f(x_i, y_i, z_i)$ — значение интегрируемой функции в произвольной точке указанной площадки. Как обычно мы полагаем, что интегрируемая функция f задана в некоторой декартовой системе координат (x, y, z) . Кроме того за диаметр элементарной площадки ΔS_i естественно взять диаметр описывающего площадку шара.

Для вычисления поверхностного интеграла 1-го типа его сводят к более привычному двойному интегралу. Напомним как это делается в общем случае, когда поверхность задана векторным параметрическим уравнением

$$\vec{r} = \vec{i}x(u, v) + \vec{j}y(u, v) + \vec{k}z(u, v). \quad (4.2)$$

Пусть поверхность S взаимно-однозначно отображается векторной функцией (2) на некую область Ω плоскости (u, v) . Будем считать, что входящие сюда функции непрерывно-дифференцируемы в области Ω , что обеспечивает гладкость поверхности S и наличие в каждой из ее точек единственной касательной плоскости. При этом поверхностный интеграл 1-го типа по поверхности S сводится к двойному интегралу по области Ω . Установим вид

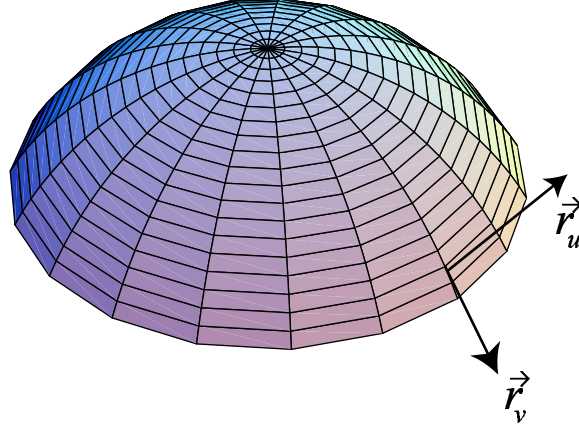


Рис. 4.1: Кусок сферической поверхности, заданной параметрическими уравнениями $x = \cos u \sin v$, $y = \sin u \sin v$, $z = \cos v$; $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, \pi/3]$. На поверхности нанесены линии $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$. Здесь же изображены векторы \vec{r}_u и \vec{r}_v , касательные к поверхности в выбранной точке.

двойного интеграла. Для этого найдем, чему равна площадь бесконечно малого dS элемента поверхности, отображаемого в прямоугольник площадью $d\Omega = dudv$. Построим два касательных к поверхности \mathcal{S} вектора

$$\partial_u \vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du, \quad \partial_v \vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv.$$

Очевидно, площадь упомянутого элемента поверхности \mathcal{S} , с точностью до бесконечно малой более высокого порядка, равна площади параллелограмма, образованного векторами $\partial_u \vec{r}$ и $\partial_v \vec{r}$:

$$dS = |[\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}]| = \left| \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right] \right| du dv. \quad (4.3)$$

Заменяя в (1) dS на правую часть последнего равенства, а поверхность интегрирования \mathcal{S} на область Ω , приходим к выводу, что поверхностный интеграл 1-го типа следующим образом выражается через двойной интеграл:

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z) dS = \iint_{\Omega} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left| \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right] \right| du dv. \quad (4.4)$$

При решении конкретных задач важно четко осознавать геометрический смысл множителя перед $du dv$. Поэтому поясним его еще раз. Пусть $d\Omega$ – площадь бесконечно малой окрестности точки (u, v) области Ω , а dS – площадь участка поверхности \mathcal{S} , куда отображается упомянутая окрестность. Отношение указанных площадей как раз и равно

$$\frac{dS}{d\Omega} = \left| \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right] \right| = |[\vec{r}_u \times \vec{r}_v]|. \quad (4.5)$$

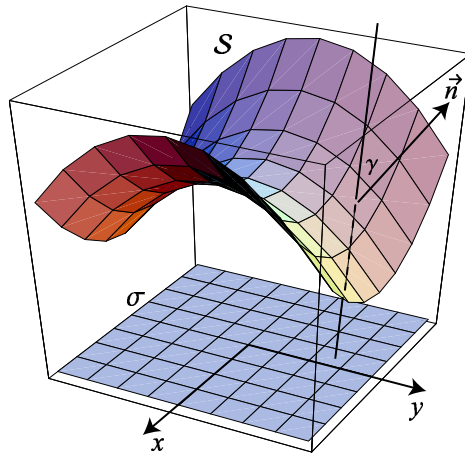


Рис. 4.2: Седлообразная поверхность \mathcal{S} , заданная явным уравнением $z = 2 + x^2 - y^2$ ($x \in [-1, 1], y \in [-1, 1]$). Здесь же изображен квадрат σ в плоскости (x, y) , куда проектируется данная поверхность. На поверхности нанесены кривые $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$, разделяющие поверхность на элементарные площадки. Каждая из них проектируется в свой квадратик на плоскости (x, y) . Из центра одного из квадратиков вышущена вертикальная прямая, соединяющая квадратик с соответствующим элементом поверхности \mathcal{S} . Косинус угла γ между нормалью \vec{n} к выбранному элементу поверхности и вертикальной прямой равен отношению площади квадратика к площади элемента поверхности.

Здесь применено, помимо стандартной формы записи частной производной, еще и более компактное обозначение:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \Leftrightarrow \vec{r}_u.$$

Впоследствии мы будем считать их равноправными и прибегать как к тем, так и другим обозначениям.

Упомянем один полезный частный случай формулы (4), когда поверхность, по которой ведется интегрирование, задана явно:

$$z = z(x, y), \quad (x, y) \in \sigma.$$

Здесь $z(x, y)$ – известная функция, а σ – область в плоскости (x, y) , куда проектируется интегрируемая поверхность. При этом векторное уравнение поверхности принимает вид:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z(x, y),$$

и после вычисления отношения (5) получим:

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z) dS = \iint_{\sigma} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (4.6)$$

Здесь роль u и v играют координаты горизонтальной плоскости (x, y) , на которую в данном случае проектируется поверхность \mathcal{S} .

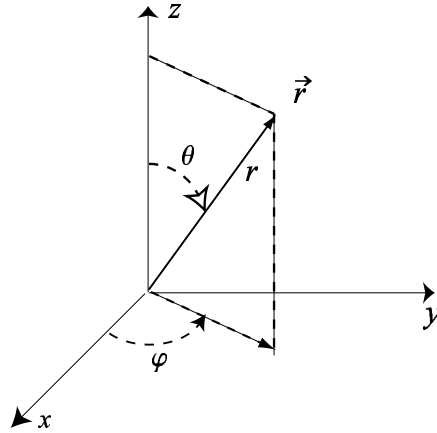


Рис. 4.3: Определение координат радиус-вектора \vec{r} в сферической системе координат. Координата r равна длине радиус-вектора, координата θ — это угол между радиус-вектором и осью z , а φ — угол между осью x и проекцией радиус-вектора на плоскость $z = 0$.

Подчеркнем, что отношение (5) приобретает здесь особенно наглядный геометрический смысл. Оно равно $1/\cos \gamma$, где γ — угол между горизонтальной плоскостью и плоскостью, касательной к поверхности \mathcal{S} , в точке с координатами (x, y) . Иначе говоря, справедливо следующее соотношение:

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}. \quad (4.7)$$

Часто это выражение трактуют еще как косинус угла между нормалью к поверхности и осью z декартовой системы координат (x, y, z) .

4.2 Задачи в классе

Задача 4.1

(4341) *Насколько отличаются друг от друга поверхностные интегралы*

$$I_1 = \iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2 + z^2) dS \quad \text{и} \quad I_2 = \iint_{\mathcal{P}} (x^2 + y^2 + z^2) dP,$$

где \mathcal{S} — поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, а \mathcal{P} — поверхность октаэдра, $|x| + |y| + |z| = a$, вписанного в эту сферу.

РЕШЕНИЕ 4.1 Вычислим вначале интеграл по сфере. Для этого найдем параметрическое уравнение сферы. Его можно получить из формул преобразования сферических координат в декартовы, приравняв радиальную координату r к радиусу нашей сферы a . При этом роль переменных (u, v) будут

играть угловые координаты (θ, φ) :

$$\begin{cases} x = a \sin \theta \cos \varphi, \\ y = a \sin \theta \sin \varphi, \\ z = a \cos \theta, \end{cases}$$

где углы меняются в пределах

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Соответствующее векторное уравнение поверхности имеет вид:

$$\vec{r}(\theta, \varphi) = \vec{i} a \sin \theta \cos \varphi + \vec{j} a \sin \theta \sin \varphi + \vec{k} a \cos \theta.$$

Сосчитаем фигурирующее в формуле (4) векторное произведение

$$[\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi] = a^2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix}.$$

Отсюда имеем:

$$[\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi] = \vec{i} a^2 \sin^2 \theta \cos \varphi + \vec{j} a^2 \sin^2 \theta \sin \varphi + \vec{k} a^2 \cos \theta \sin \theta.$$

Таким образом:

$$|[\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi]| = a^2 \sqrt{\sin^4 \theta + \cos^2 \theta \sin^2 \theta} = a^2 \sin \theta.$$

Следовательно, поверхностный интеграл сводится к двойному интегралу:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi a^4 \sin \theta d\theta = -2\pi a^4 \cos \theta \Big|_0^\pi = 4\pi a^4.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1 Обратим внимание на то, что использованное при вычислении интеграла по сфере соотношение $dS = a^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ можно легко получить с помощью наглядных геометрических построений. В самом деле, изменяя φ на $d\varphi$, мы опишем на окружности $\theta = \text{const}$ отрезок длиной $l_\varphi = a \sin \theta d\varphi$. Изменив затем θ на $d\theta$, мы продвинемся в перпендикулярном направлении на расстояние $l_\theta = a d\theta$. Это значит, что на бесконечно малый прямоугольник $d\Omega = d\theta d\varphi$ в плоскости (θ, φ) отображается элемент поверхности площадью $dS = l_\varphi l_\theta = a^2 \sin \theta d\Omega$.

Мы могли бы вовсе избежать утомительных выкладок, если бы сразу заметили, что на поверхности сферы подынтегральное выражение в I_1 равно постоянной a^2 , а значит

$$I_1 = a^2 S_{\text{sf}} = 4\pi a^4,$$

где $4\pi a^2$ – площадь сферы радиуса a .

Перейдем к вычислению интеграла I_2 . В силу симметрии поверхности и подынтегрального выражения, достаточно взять интеграл по куску поверхности октаэдра, находящейся в 1-м квадранте $x > 0, y > 0, z > 0$, и умножить результат на 8. В выбранном квадранте уравнение поверхности

приобретает особенно простой вид: $z = a - x - y$. Применяв формулу (6) и заметив, что

$$dS = \sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2} dx dy = \sqrt{3} dx dy,$$

получим двойной интеграл

$$I_2 = 8\sqrt{3} \iint_{\sigma} [x^2 + y^2 + (a - x - y)^2] dx dy.$$

Область интегрирования σ представляет собой внутренность треугольника, ограниченного осями x , y и прямой $y = a - x$. Поэтому искомый интеграл сводится к повторному интегралу:

$$I_2 = 8\sqrt{3} \int_0^a dx \int_0^{a-x} [x^2 + y^2 + (a - x - y)^2] dy.$$

Найдем внутренний интеграл. Хотя его легко свести к табличному, попробуем вычислить этот интеграл, опираясь на геометрические соображения. В дальнейшем мы часто будем прибегать к геометрическим способам расчетов, имея в виду, что ясное понимание геометрической структуры подынтегральных выражений способствует более глубокому пониманию сути конечного результата. Кроме того иногда “геометрический подход” легче ведет к цели, чем формальные аналитические выкладки.

Обратив внимание, что площади криволинейных трапеций, отвечающих слагаемым y^2 и $(a - x - y)^2$ во внутреннем интеграле, одинаковы и равны $(x - a)^3/3$, будем иметь:

$$I_2 = 8\sqrt{3} \int_0^a \left(x^2(a - x) + \frac{2}{3}(a - x)^3 \right) dx.$$

Пользуясь аналогичными геометрическими соображениями, запишем оставшийся интеграл в более простой форме:

$$I_2 = 8\sqrt{3} \int_0^a \left(ax^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) dx = 8\sqrt{3}a^4 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12} \right) = 2a^4\sqrt{3}.$$

Таким образом, разность между заданными интегралами равна

$$I_1 - I_2 = 2a^4(2\pi - \sqrt{3}).$$

Задача 4.2

(4344) Вычислить поверхностный интеграл 1-го типа:

$$I = \iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2) dS,$$

где \mathcal{S} – граница тела $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$.

РЕШЕНИЕ 4.2 Поверхность, по которой ведется интегрирование, представляет собой, расположенную в верхней полуплоскости $z > 0$, часть конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, накрытую “крышкой” – кругом единичного радиуса в

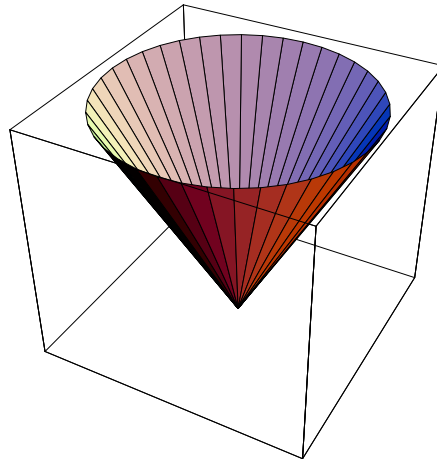


Рис. 4.4: Иллюстрация ко второй задаче: Конус, полученный вращением луча, испущенного из начала координат и наклоненного к горизонтальной плоскости $z = 0$ под углом $\gamma = 45^\circ$.

плоскости $z = 1$. Обсудим вначале интеграл по поверхности конуса. Частные производные, необходимые для перехода от поверхностного интеграла к двойному, равны:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Отсюда

$$dS = \sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2} dx dy = \sqrt{2} dx dy,$$

и искомый интеграл преобразуется к виду:

$$I = (1 + \sqrt{2}) \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) dx dy.$$

Здесь интегрирование ведется по кругу $\sigma : x^2 + y^2 \leq 1$ в плоскости $z = 0$. Единичка в скобке перед интегралом учитывает вклад от "крышки", а $\sqrt{2} = 1/\cos \gamma$, где $\gamma = \pi/4$ – угол между образующими конуса и горизонтальной плоскостью.

Переходя в интеграле к полярной системе координат и вспомнив, что якобиан преобразования декартовых в полярные координаты равен ρ , получим окончательно:

$$I = (1 + \sqrt{2}) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2} (1 + \sqrt{2}).$$

Задача 4.3

(4348) Вычислить интеграл

$$I = \iint_S z dS,$$

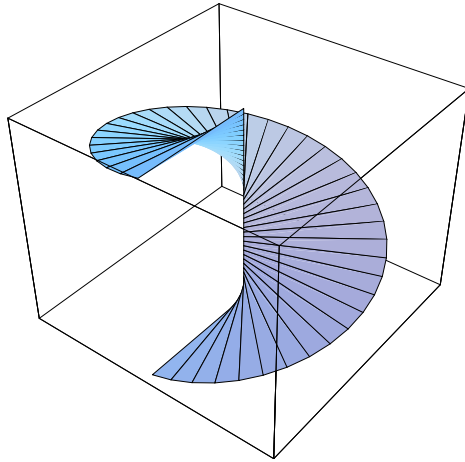


Рис. 4.5: Иллюстрация к третьей задаче: График одного шага геликоида, образованного равномерным вращением прикрепленного к оси z горизонтального отрезка, так же равномерно поднимающегося вверх.

где \mathcal{S} – часть поверхности геликоида

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = \varphi \quad (0 < \rho < a, \quad 0 < \varphi < 2\pi).$$

РЕШЕНИЕ 4.3 Начнем с того, что мысленно представим поверхность интегрирования. Для этого заметим, что при фиксированном ρ и меняющемся φ , мы имеем уже знакомую по занятию 2 (задача 5) винтовую линию, обвивающуюся вокруг оси z . Ее проекцией на плоскость (x, y) служит окружность радиуса ρ с центром в начале координат. Совокупность винтовых линий, отвечающих разным значениям ρ , и образует интегрируемую поверхность. Образно говоря, наш геликоид представляет собой винтовую полосу, образованную параллельными плоскости (x, y) отрезком длины a , один конец которого вертикально движется по оси z , а другой совершает еще и вращательное движение вокруг данной оси. По форме геликоид напоминает винтовую лестницу или раскрытый веер.

Очевидно, имеется взаимно-однозначное соответствие между точками интересующей нас части поверхности геликоида – одного шага винтовой полосы – и ее проекции на плоскость (x, y) – точками круга радиуса a . При этом переменные (ρ, φ) играют роль полярных координат в плоскости (x, y) .

Вернемся к поставленной задаче. Чтобы перейти от поверхностного интеграла к двойному, запишем векторное уравнение поверхности

$$\vec{r}(\rho, \varphi) = \vec{i} \rho \cos \varphi + \vec{j} \rho \sin \varphi + \vec{k} \varphi$$

и вычислим векторное произведение:

$$[\vec{r}_\rho \times \vec{r}_\varphi] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\rho \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \sin \varphi - \vec{j} \cos \varphi + \vec{k} \rho.$$

Соответственно, модуль векторного произведения равен:

$$|[\vec{r}_\rho, \vec{r}_\varphi]| = \sqrt{1 + \rho^2}.$$

Мы могли бы получить это соотношение с помощью менее громоздких выкладок, вовремя сообразив, что наклон геликоида к горизонтальной плоскости, на которую мы его проектируем, не зависит от азимутального угла φ , а лишь от расстояния до оси геликоида ρ . Поэтому при вычислении определителя $[\vec{r}_\rho \times \vec{r}_\varphi]$ можно выбрать φ так, чтобы вычисления были проще. К примеру, взяв $\varphi = 0$, будем иметь:

$$[\vec{r}_\rho \times \vec{r}_\varphi]_{\varphi=0} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 1 \end{vmatrix} = -\vec{j} + \vec{k}\rho \quad \Rightarrow \quad |[\vec{r}_\rho, \vec{r}_\varphi]| = \sqrt{1 + \rho^2}.$$

Продолжим вычисление искомого интеграла. Из сказанного ясно, что он сводится к повторному интегралу

$$I = \int_0^{2\pi} \varphi d\varphi \int_0^a \sqrt{1 + \rho^2} d\rho = 2\pi^2 \int_0^a \sqrt{1 + \rho^2} d\rho.$$

Последний интеграл

$$J = \int_0^a \sqrt{1 + \rho^2} d\rho$$

можно вычислить например заменой переменной интегрирования:

$$\rho = \sinh \mu \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \ln \left(\rho + \sqrt{1 + \rho^2} \right).$$

Для этого нам понадобятся формулы связи гиперболических функций:

$$1 + \sinh^2 \mu = \cosh^2 \mu, \quad \cosh^2 \mu = \frac{1}{2} (1 + \cosh 2\mu),$$

и

$$\sinh 2\mu = 2 \sinh \mu \cosh \mu = 2 \sinh \mu \sqrt{1 + \sinh^2 \mu}.$$

Указанной заменой соответствующий неопределенный интеграл сводится к

$$J = \int \cosh^2 \mu d\mu = \frac{1}{2} \left(\int d\mu + \int \cosh 2\mu d\mu \right)$$

или

$$J = \frac{1}{2} \left(\mu + \frac{1}{2} \sinh 2\mu \right)$$

или

$$J = \frac{1}{2} \left(\mu + \sinh \mu \sqrt{1 + \sinh^2 \mu} \right).$$

Возвращаясь к старой переменной интегрирования, будем иметь:

$$J = \frac{1}{2} \left[\ln \left(\rho + \sqrt{1 + \rho^2} \right) + \rho \sqrt{1 + \rho^2} \right].$$

Разность значений этой первообразной функции при $\rho = a$ и $\rho = 0$ дает величину искомого интеграла:

$$J = \frac{1}{2} \left(a \sqrt{1 + a^2} + \ln \left(a + \sqrt{1 + a^2} \right) \right).$$

Таким образом, окончательно:

$$I = 2\pi^2 J = \pi^2 \left[a \sqrt{1 + a^2} + \ln \left(a + \sqrt{1 + a^2} \right) \right].$$

Задача 4.4

Вычислить поверхностный интеграл 1-го типа

$$I = \iint_S \frac{dS}{r},$$

где S – часть поверхности гиперболического параболоида $z = xy$, отсеченная цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$, а r – расстояние от точки поверхности до оси z .

Решение 4.4 Очевидно, в силу симметрии интегрируемой поверхности и подынтегрального выражения, интеграл равен учетверенному вкладу от куска поверхности, лежащей в 1-м октанте. Спроектируем его на плоскость $z = 0$. В итоге получим:

$$I = 4 \iint \sigma \frac{\sqrt{1+x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy.$$

Здесь σ – четверть круга в плоскости $z = 0$ с центром в начале координат и радиусом R . Выберем в качестве переменных интегрирования полярные координаты. Это дает:

$$I = 4 \frac{\pi}{2} \int_0^R \sqrt{1+\rho^2} d\rho.$$

Сведем последний интеграл к табличному, применив гиперболическую подстановку $\rho = \sinh t$. Тогда соответствующий неопределенный интеграл преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+\rho^2} d\rho &= \int \cosh^2 t dt = \frac{1}{2} \int (1 + \cosh 2t) dt = \\ &= \frac{1}{2} (t + \frac{1}{2} \sinh 2t) = \frac{1}{2} (t + \sinh t \cosh t) = \frac{1}{2} (t + \sinh t \sqrt{1 + \sinh^2 t}). \end{aligned}$$

Последнее преобразование сделано для удобства перехода к исходной переменной интегрирования ρ . Вспомнив обратную к $\rho = \sinh t$ функцию: $t = \ln(\rho + \sqrt{1 + \rho^2})$, получим окончательно:

$$\begin{aligned} I &= \pi \left[\rho \sqrt{1+\rho^2} + \ln(\rho + \sqrt{1+\rho^2}) \right] \Big|_0^R = \\ &= \pi \left[R \sqrt{1+R^2} + \ln(R + \sqrt{1+R^2}) \right]. \end{aligned}$$

4.3 Домашнее задание

Задача 4.5

Используя результаты решения классной задачи 3, вычислить площадь поверхности геликоида, заданной уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, & y &= \rho \sin \varphi, & z &= b \varphi \\ (0 < \rho < a, & & 0 \leq \varphi \leq 2\pi). \end{aligned}$$

Исследовать геометрический смысл полученного выражения в зависимости от соотношения между радиусом геликоида a и (деленной на 2π) высотой b .

РЕШЕНИЕ 4.5 В данном случае векторное уравнение поверхности, площадь одного винтового шага которой мы намерены вычислить, таково:

$$\vec{r}(\rho, \varphi) = \vec{i}\rho \cos \varphi + \vec{j}\rho \sin \varphi + \vec{k}b\varphi.$$

Перейдем, как и в задаче 3, от поверхностного интеграла к двойному, по прямоугольной области в плоскости ρ, φ :

$$S = \iint_S dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\rho |\vec{r}_\rho \times \vec{r}_\varphi|$$

Мы специально “подгащили” дифференциалы к “родным” интегралам, чтобы не было сомнений, по каким переменным ведется интегрирование в каждом из них. Из опыта решения классной задачи (или исходя из геометрических свойств поверхности) мы знаем, что входящий сюда модуль векторного произведения не зависит от угла φ . А значит достаточно вычислить векторное произведение лишь при $\varphi = 0$:

$$[\vec{r}_\rho \times \vec{r}_\varphi]_{\varphi=0} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & b \end{vmatrix} = -\vec{j}b + \vec{k}\rho \Rightarrow |[\vec{r}_\rho, \vec{r}_\varphi]| = \sqrt{b^2 + \rho^2}.$$

В итоге вычисление искомой площади сведется к определенному интегралу

$$S = 2\pi \int_0^a \sqrt{b^2 + \rho^2} d\rho.$$

Вновь прибегая к опыту решения задачи 3, сообразим, что интеграл сводится к табличному заменой $\rho = b \sinh \mu$. После чего остается выполнить достаточно простые, хотя и громоздкие выкладки, которые дают:

$$S = \pi \left[a\sqrt{a^2 + b^2} + b^2 \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} \right].$$

Исследуем асимптотику найденного выражения при $a \ll b$ и $a \gg b$. Для этого применим вначале “физический подход”. А именно, вынесем за квадратную скобку величину, имеющую размерность площади. В результате функция внутри квадратных скобок будет зависеть лишь от одного — безразмерного — параметра $\varepsilon = a/b$:

$$S = \pi ab \left[\sqrt{1 + \varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \ln(\varepsilon + \sqrt{1 + \varepsilon^2}) \right].$$

Вычислив предел выражения внутри квадратных скобок при $\varepsilon \rightarrow 0$, найдем асимптотику площади куска геликоида при $a \ll b$:

$$S \sim 2\pi ab \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Геометрический смысл этой формулы достаточно прозрачен: При $a \ll b$ узкая лента геликоида практически отвесно устремляется ввысь, а ее площадь почти совпадает с площадью плоской прямоугольной ленты шириной a и высотой $2\pi b$.

В другом предельном случае главная асимптотика исследуемого выражения

$$S \sim \pi ab\varepsilon = \pi a^2 \quad (\varepsilon \rightarrow \infty)$$

–обусловлена тем, что при $a \gg b$ основная часть геликоида почти параллельна плоскости (x, y) , вследствие чего его площадь близка к площади круга радиусом a . Мы убедимся в этом, лишь только вообразим китайский веер, вполне смахивающий на идеальный круг.

Задача 4.6

Найти площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, заключенной внутри кругового цилиндра $x^2 + y^2 = b^2$ ($b \leq a$).

РЕШЕНИЕ 4.6 Мысленно разобьем исследуемую поверхность на 8 кусков одинаковой формы, расположенных в разных квадрантах декартовой системы координат, и найдем искомую площадь как уосьмеренную площадь куска, лежащего в первом квадранте. Мы провели разбиение для того, чтобы воспользоваться формулой (6), справедливой при явном задании поверхности. В нашем случае явное уравнение выделенного куска поверхности имеет вид: $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, а формула (6) дает:

$$S = 8 \iint_{\mathcal{G}} \frac{a \, dx \, dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

где \mathcal{G} –четверть круга в плоскости (x, y) с центром в начале координат и радиусом b . Симметрия области интегрирования и подынтегрального выражения наводит на мысль, что при сведении двойного интеграла к повторным удобно перейти к полярной системе координат. В итоге получим

$$S = 8a \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^b \frac{\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = 4\pi a(a - \sqrt{a^2 - b^2}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1 При обсуждении полученных решений часто чрезвычайно продуктивными оказываются попытки взглянуть на них с разных точек зрения. Применительно к данному случаю полезно заметить, что попутно нами решена задача стереометрии — о телесном угле, заключенном в круглом конусе с углом θ между осью конуса и его образующими. Поделив ответ на a^2 и заметив, что

$$\sin \theta = \frac{b}{a}.$$

будем иметь:

$$\Omega = 4\pi(1 - \cos \theta),$$

где 4π –полный телесный угол, а $(1 - \cos \theta)$ –доля телесного угла, заключенного внутри конуса.

Задача 4.7

Найти площадь части цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$, вырезаемой из него цилиндром $y^2 + z^2 = a^2$.

РЕШЕНИЕ 4.7 Как и в предыдущей задаче, удобно разбить исследуемую поверхность на восемь кусков и найти площадь части поверхности, расположенной в 1-м квадранте. Спроектируем выбранный кусок на четверть круга радиуса a в плоскости (y, z) . Иначе говоря, зададим уравнение поверхности в явном виде, полагая (y, z) – независимыми переменными, а x – функцией от них: $x = \sqrt{a^2 - y^2}$. При этом искомая площадь вычисляется при помощи очевидной модификации формулы (6):

$$S = 8 \iint_{\sigma} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz.$$

Здесь σ – упомянутая четверть круга с центром в начале координат и радиусом a . Сводя двойной интеграл к повторному, после несложных выкладок имеем:

$$S = 8a \int_0^a dz \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = 8a \int_0^a \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - z^2}}{a} dz.$$

Последний интеграл удобно вычислить заменой переменной $z = a \cos t$:

$$S = 8a^2 \int_0^1 t \sin t dt = 8a^2 (\sin t - t \cos t) \Big|_0^1 = 8a^2.$$

Мы устранили минус перед последним интегралом, “перевернув” пределы интегрирования.