

Глава 5

Поверхностные интегралы 1-го типа (продолжение)

5.1 Задачи в классе

Задача 5.1

(4349) Вычислить интеграл

$$I = \iint_{\mathcal{S}} z^2 dS,$$

где \mathcal{S} — часть поверхности конуса

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \sin \alpha, & y &= \rho \sin \varphi \sin \alpha, & z &= \rho \cos \alpha \\ (0 \leq \rho \leq h, & \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi) & \quad \alpha & \quad \left(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

РЕШЕНИЕ 5.1 Поверхность \mathcal{S} представляет собой часть координатной поверхности $\theta = \alpha$ сферической системы координат — вертикальную “воронку”, упирающуюся в начало координат. Образующие “воронки” наклонены к оси z под углом α .

Запишем векторное уравнение поверхности:

$$\vec{r}(\rho, \varphi) = \vec{i} \rho \cos \varphi \sin \alpha + \vec{j} \rho \sin \varphi \sin \alpha + \vec{k} \rho \cos \alpha.$$

Следовательно, входящее в двойной интеграл (4.4) векторное произведение равно:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \varphi \sin \alpha & \sin \varphi \sin \alpha & \cos \alpha \\ -r \sin \varphi \sin \alpha & r \cos \varphi \sin \alpha & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -\vec{i} \rho \cos \varphi \cos \alpha \sin \alpha - \vec{j} \rho \sin \varphi \cos \alpha \sin \alpha + \vec{k} \rho \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$$\left| \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right] \right| = \rho \sqrt{\cos^2 \varphi \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^2 \varphi \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha} = \rho \sin \alpha.$$

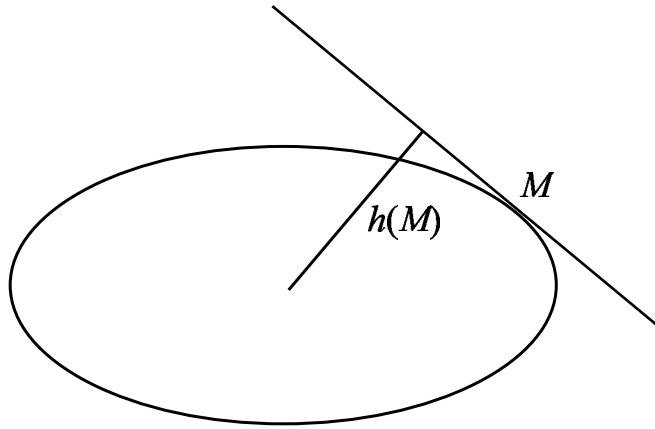


Рис. 5.1: Иллюстрация ко второй задаче: Двумерный аналог эллипсоида, плоскости, касающейся эллипсоида в текущей точке интегрирования M , и перпендикулярного плоскости отрезка длиной $h(M)$.

Как обычно, мы могли бы прийти к этому равенству из более наглядных геометрических соображений, найдя отношение площади $dS = dr r \sin \alpha d\varphi$ элемента конуса, отображающегося в прямоугольник со сторонами dr и $d\varphi$ на плоскости параметров (r, φ) , к площади $d\Omega = dr d\varphi$ указанного прямоугольника.

Так или иначе, поверхностный интеграл сводится к двойному интегралу:

$$I = \cos^2 \alpha \sin \alpha \int_0^h r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{2} h^4 \cos^2 \alpha \sin \alpha.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1 Роскошь решить задачу только одним способом может позволить себе разве что студент, рискующий лишь оценкой за неверный ответ. Серьезные исследователи стремятся применить разные подходы к поставленной проблеме. Поэтому предлагаем в качестве домашнего упражнения реализовать еще один путь решения, опирающийся на тот факт, что интегрируемую поверхность можно задать в явном виде и воспользоваться формулой (4.6).

Задача 5.2

(4347) Вычислить интеграл

$$I = \iint_S \frac{dS}{h},$$

где S – поверхность эллипсоида, а h – расстояние от центра эллипсоида до плоскости, касательной к элементарной площадке dS поверхности эллипсоида.

РЕШЕНИЕ 5.2 Очевидно, ответ не зависит от расположения эллипсоида. Поэтому для удобства аналитических выкладок возьмем эллипсоид, заданный каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Осуществим вначале переход от поверхностного к двойному интегралу. Для этого запишем параметрическое уравнение эллипсоида, взяв за параметры углы сферической системы координат:

$$\begin{aligned} x &= a \sin \theta \cos \varphi, & y &= b \sin \theta \sin \varphi, & z &= c \cos \theta \\ (0 \leq \theta \leq \pi, & & 0 \leq \varphi \leq 2\pi) . \end{aligned} \quad (*)$$

Соответственно, векторное уравнение эллипсоида примет вид:

$$\vec{r}(\theta, \varphi) = \vec{i} a \sin \theta \cos \varphi + \vec{j} b \sin \theta \sin \varphi + \vec{k} c \cos \theta,$$

а входящее в двойной интеграл векторное произведение оказывается равным:

$$\begin{aligned} [\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a \cos \theta \cos \varphi & b \cos \theta \sin \varphi & -c \sin \theta \\ -a \sin \theta \sin \varphi & b \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} bc \sin^2 \theta \cos \varphi + \vec{j} ac \sin^2 \theta \sin \varphi + \vec{k} ab \cos \theta \sin \theta . \end{aligned}$$

Таким образом:

$$|[\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi]| = \sqrt{b^2 c^2 \sin^4 \theta \cos^2 \varphi + a^2 c^2 \sin^4 \theta \sin^2 \varphi + a^2 b^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}$$

или, в более удобной для дальнейшего анализа форме:

$$|[\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi]| = abc \sin \theta \sqrt{\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{b^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2}} .$$

Перейдем к обсуждению подынтегрального выражения $1/h$. Необходимо записать его как функцию переменных интегрирования θ и φ . Однако с первого взгляда неясно как это сделать. Поэтому начнем двигаться к цели издали, пытаясь вспомнить знакомые формулы, ассоциирующиеся с поставленной задачей. К примеру, нам может прийти на ум уравнение плоскости, перпендикулярной единичному вектору \vec{e} , и удаленной на расстояние h от начала координат:

$$(\vec{e} \cdot \vec{r}) = h . \quad (**)$$

Чтобы эта плоскость касалась эллипсоида в некоторой его точке с координатами (x, y, z) , вектор \vec{e} должен быть перпендикулярным эллипсоиду в выбранной точке. Сконструируем \vec{e} с помощью вспомогательной функции

$$w(x, y, z) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) .$$

Ее поверхности равного уровня образуют эллипсоиды, один из которых, отвечающий уровню $w = 1/2$ — наш эллипсоид. Градиент этой функции

$$\text{grad } w = \vec{i} \frac{x}{a^2} + \vec{j} \frac{y}{b^2} + \vec{k} \frac{z}{c^2} ,$$

согласно геометрическому смыслу градиента, перпендикулярен, в точке (x, y, z) , эллипсоиду, проходящему через данную точку. Длина вектора градиента

$$|\text{grad } w| = \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} .$$

Следовательно, фигурирующий в уравнении плоскости единичный вектор равен:

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} \left(\vec{i} \frac{x}{a^2} + \vec{j} \frac{y}{b^2} + \vec{k} \frac{z}{c^2} \right).$$

Подставив его, вместе с радиус-вектором $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$ исследуемой точки эллипса, в уравнение плоскости (**), отыщем искомое расстояние от центра координат до плоскости, касающейся эллипсоида в этой точке:

$$h = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right).$$

Имея ввиду, что для нашего эллипсоида выражение в скобках равно единице, найдем искомое расстояние от начала координат до эллипсоида:

$$h = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$$

Поместив сюда, вместо (x, y, z) , параметрические уравнения эллипсоида (*), в итоге получим:

$$\frac{1}{h} = \sqrt{\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{b^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2}}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1 Мы могли бы сэкономить время, если бы вспомнили из курса аналитической геометрии уравнение плоскости, касательной к эллипсоиду в некоторой точке (x_1, y_1, z_1) :

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} + \frac{z z_1}{c^2} = 1,$$

или в векторной форме $(\vec{l} \cdot \vec{r}) = 1$, где

$$\vec{l} = \vec{i} \frac{x_1}{a^2} + \vec{j} \frac{y_1}{b^2} + \vec{k} \frac{z_1}{c^2}.$$

Длина этого вектора очевидно равна $1/h$. Вычислив ее, придем к уже знакомому равенству.

Продолжим наши вычисления. Подставив выражение для $1/h$ в двойной интеграл, к которому сводится наш поверхностный интеграл, будем иметь:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{|\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\theta|}{h} d\theta = abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta \left(\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{b^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2} \right) d\theta.$$

Сделаем во внутреннем интеграле замену переменной $u = -\cos \theta$, и учитывая четность относительно u подынтегрального выражения, получим

$$I = 2abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\frac{(1-u^2) \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{(1-u^2) \sin^2 \varphi}{b^2} + \frac{u^2}{c^2} \right) du =$$

$$2abc \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{3} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2a^2} + \frac{2}{3} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2b^2} + \frac{1}{3c^2} \right) d\varphi.$$

Здесь мы избавились от интеграла по u , заменив всюду u^2 на площадь криволинейной трапеции $S = 1/3$. Заметив далее, что интегралы от синуса и косинуса по целому числу периодов равны нулю, находим окончательно

$$I = \frac{4\pi}{3} abc \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right).$$

В качестве проверки укажем, что для частного случая сферы $a = b = c$, когда $h \equiv a$, эта формула дает заранее очевидный результат: $I = 4\pi a$.

5.2 Домашнее задание

4343, 4345, 4346, 4350

ЗАДАЧА 5.3

(4343) Вычислить поверхностный интеграл 1-го типа:

$$I = \iint_S (x + y + z) dS,$$

где S – поверхность верхней полусферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geq 0.$$

РЕШЕНИЕ 5.3 Запишем векторное уравнение поверхности, взяв за параметры углы сферической системы координат:

$$\begin{aligned} \vec{r}(\varphi, \theta) &= \vec{i} a \sin \theta \cos \varphi + \vec{j} a \sin \theta \sin \varphi + \vec{k} a \cos \theta, \\ dS &= |[\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\theta]| d\varphi d\theta = a^2 \sin \theta d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} I &= a^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin \theta (\cos \varphi + \sin \varphi) + \cos \theta] \sin \theta d\theta = \\ &= a^3 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta = \pi a^3. \end{aligned}$$

Здесь мы сразу выкинули слагаемые, содержащие функции $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$, поскольку интегралы от них по периоду равны нулю.

ЗАДАЧА 5.4

Вычислить поверхностный интеграл 1-го типа:

$$I = \iint_S \frac{dS}{(1 + x + y)^2},$$

где S – поверхность тетраэдра

$$x + y + z \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$$

РЕШЕНИЕ 5.4 Поверхность тетраэдра состоит из 4-х плоских границ. Соответственно, интеграл распадается на 4 части: $I = I_1 + I_2 + 2I_3$. Здесь I_1 – интеграл по верхней грани тетраэдра, I_2 – по его нижней грани, и $I_3 = I_4$ – по боковым граням, лежащим в плоскостях $x = 0$ и $y = 0$. Последние интегралы, в силу симметрии подынтегрального выражения, равны. Очевидно

$$I_1 + I_2 = (\sqrt{3} + 1) \iint_D \frac{dx dy}{(1 + x + y)^2},$$

где D – треугольник в плоскости $z = 0$. Входящий сюда двойной интеграл сводится к повторному интегралу:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= (\sqrt{3} + 1) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(1 + x + y)^2} = \\ &= (\sqrt{3} + 1) \int_0^1 \frac{dx}{1 + x + y} \Big|_{y=0}^{y=1-x} = \\ &= (\sqrt{3} + 1) \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \right) dx = \left(\ln |1+x| - \frac{x}{2} \right) \Big|_0^1 = (\sqrt{3} + 1) \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Вычислим оставшуюся пару интегралов:

$$\begin{aligned} 2I_3 &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{dx}{(1+x)^2} = -2 \int_0^1 dz \frac{1}{1+x} \Big|_0^{1-z} = \\ &= 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{z-2} + 1 \right) dz = 2(1 - \ln 2). \end{aligned}$$

Следовательно, окончательный результат:

$$I = (\sqrt{3} + 1) \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) + 2(1 - \ln 2) = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} + (\sqrt{3} - 1) \ln 2.$$

ЗАДАЧА 5.5

Вычислить поверхностный интеграл 1-го типа:

$$I = \iint_S |xyz| dS,$$

где S – часть поверхности $z = x^2 + y^2$, отсекаемая плоскостью $z = 1$.

РЕШЕНИЕ 5.5 Спроектировав указанный кусок параболоида на круг радиуса 1 в плоскости (x, y) и учитывая, что

$$dS = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy,$$

получим:

$$I = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} |xy(x^2 + y^2)| \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy.$$

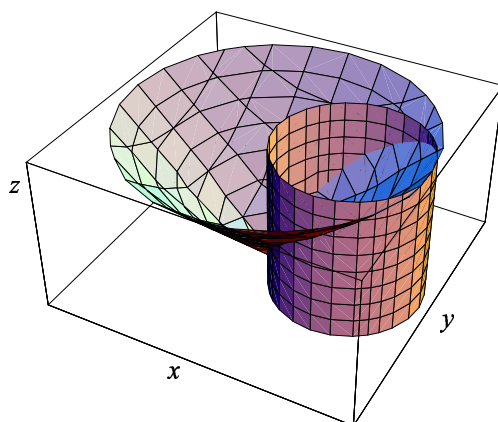


Рис. 5.2: Иллюстрация к шестой задаче: Конус и цилиндр, вырезающий из конуса поверхность, по которой ведется интегрирование. Часть вырезанной поверхности “выглядывает” из цилиндра.

Перейдя к полярной системе координат, будем иметь:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |\sin 2\varphi| d\varphi \int_0^1 r^5 \sqrt{1+4r^2} dr =$$

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi \int_0^1 r^5 \sqrt{1+4r^2} dr = 2 \int_0^1 r^5 \sqrt{1+4r^2} dr.$$

В последнем интеграле перейдем к новой переменной интегрирования $u^2 = 1 + 4r^2$, $8rdr = udu$:

$$I = \frac{1}{64} \int_1^{\sqrt{5}} u^2(u^2 - 1)^2 du = \frac{125 - \sqrt{5} - 1}{420}.$$

ЗАДАЧА 5.6

Вычислить поверхностный интеграл 1-го типа:

$$I = \iint_S (xy + yz + zx) dS,$$

где S – часть конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вырезанная поверхностью $x^2 + y^2 = 2ax$.

РЕШЕНИЕ 5.6 Данная поверхность представляет собой часть конуса, вырезанную вертикальным цилиндром $(x - a)^2 + y^2 = a^2$. По основанию этого цилиндра – кругу в плоскости (x, y) , и сведем интегрирование в двойном интеграле. При этом

$$dS = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \sqrt{2} dx dy.$$

Следовательно, искомый интеграл преобразуется к:

$$I = \iint_{(x-a)^2 + y^2 \leq a^2} (xy + (x+y)\sqrt{x^2 + y^2}) \sqrt{2} dx dy.$$

Перейдя к полярной системе координат, будем иметь:

$$I = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi \sin \varphi + (\cos \varphi + \sin \varphi)) d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} r^3 dr.$$

Вычислив внутренний интеграл и заметив, что интегралы в симметричных пределах от слагаемых, содержащих синусы, равны нулю, получим окончательно:

$$\begin{aligned} I &= 8\sqrt{2}a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \varphi d\varphi = 8\sqrt{2}a^4 \int_0^1 (1-u^2)^2 du = \\ &= 8\sqrt{2}a^4 \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{64}{15}\sqrt{2}a^4. \end{aligned}$$